

УДК 535.3
EDN: QRNGYA

© А. Е. Суханов, В. В. Галуцкий, Е. В. Строганова, Н. Д. Докучаев, 2026

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ГРАДИЕНТНЫХ КРИСТАЛЛАХ НИОБАТА ЛИТИЯ

В статье рассматривается влияние внутренних процессов в градиентном кристалле ниобата лития на основе моделирования распространения лазерного излучения внутри его структуры. Актуальность работы обусловлена необходимостью повышения эффективности нелинейно-оптических преобразователей для генерации второй гармоники. В ходе исследования продемонстрировано, что создание различных концентрационных профилей вдоль кристалла позволяет существенно повысить эффективность генерации второй гармоники по сравнению с кристаллами постоянного состава. Выявлены качественные и количественные отличия в характеристиках излучения второй гармоники для градиентного ниобата лития по сравнению с традиционными кристаллами однородного состава. Особое внимание уделено сравнению гауссова импульса и импульса формы гиперболического секанса. Установлено, что форма входного импульса существенно влияет на эволюцию ширины импульса в зависимости от начальной мощности. Показано, что варьирование концентрационного профиля и начальной мощности позволяет эффективно управлять дисперсионным и дифракционным распылываниями лазерного пучка. Параболически спадающий профиль продемонстрировал наибольшую стабильность в широком диапазоне мощностей, тогда как параболически возрастающий профиль показал нестабильное поведение при определенных условиях. Результаты работы могут быть применены при проектировании лазерных систем с высокой эффективностью генерации второй гармоники.

Ключевые слова: вторая гармоника, градиентный кристалл, ниобат лития, численное моделирование

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время ниобат лития является ключевым материалом в фотонике, что позволяет использовать его в промышленности благодаря его коммерческой доступности и физическим свойствам [1–3]. Периодически поляризованный ниобат лития (PPLN — Periodically Poled Lithium Niobate) успешно используется для получения второй гармоники лазерного излучения, который является хорошим аналогом объемных нелинейно-оптических преобразователей из ниобата лития [4]. Применение PPLN-структуры является эффективным решением при преобразовании излучения непрерывных полупроводниковых и волоконных лазеров, а также при создании параметрических генераторов света [5].

Для улучшения более высокоэффективных градиентных PPLN-преобразователей были проведены исследования скоростей роста доменных стенок в градиентных образцах ниобата лития [6]. Однако данные исследования проводились только для постоянного конгруэнтного или стехиометрического составов. Присутствие градиента примеси, например, в виде изменения количества лития в структуре может приводить к изменению ло-

кальной скорости роста доменных стенок, что в свою очередь оказывает свое влияние на эффективность работы преобразователя [7], т.к. матрица кристалла будет поглощать, вследствие чего будет изменяться температурное поле внутри. Необходимость повышения энергетической эффективности применима к различным областям, связанных с обработкой и передачей сигналов, включая радиосвязь, оптические системы, акустические приложения и др. [8].

Для анализа влияния градиента состава вдоль оси PPLN на эффективность преобразования излучения накачки на длине 1064 нм во вторую гармонику излучения (ГВГ) была использована схема, представленная на рис. 1.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Согласно фундаментальной классификации [9], классическим нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ) принято называть уравнение вида

$$iu_x + au_{xx} + f(|u|)u = 0. \quad (1)$$

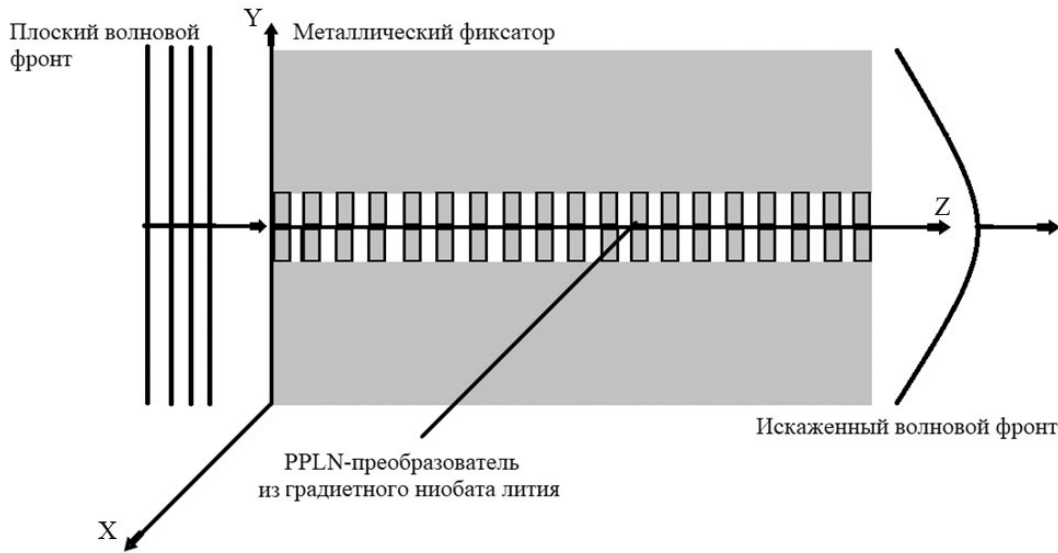


Рис. 1. Схема PPLN-преобразователя

Для исследования влияния градиентного состава кристалла ниобата лития введем выражения для нахождения локальных значений амплитуды волны в модуляторе. С учетом гауссова пучка связана система классического НУШ для Фурье-метода расщепления по физическим факторам [10]:

$$\begin{aligned}
 -i \frac{\partial A_1}{\partial z} &= \frac{1}{2k_1} \Delta^2 A_1 - \frac{1}{2} \beta_2^{(1)} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + \\
 &+ \frac{2\pi i \omega_1^2}{k_1 c^2} \chi^{(2)} A_2 A_1^* e^{-i\Delta k z}, \\
 -i \frac{\partial A_2}{\partial z} &= \frac{1}{2k_2} \Delta^2 A_2 - \frac{1}{2} \beta_2^{(2)} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + \\
 &+ \frac{4\pi i \omega_2^2}{k_2 c^2} \chi^{(2)} A_2^2 e^{-i\Delta k z},
 \end{aligned}
 \quad (2)$$

где $A_{1,2}$ — амплитуды излучения (1-я и 2-я гармоники); z — координата, вдоль которой будет проходить эволюция; $k_{1,2}$ — волновые числа; β_2 — дисперсия групповой скорости (ДГС); Δk — волновая расстройка, $\chi^{(2)} = 2 \times d_{\text{eff}}$.

Важным специальным случаем уравнения (1) при $f(|u|) = k|u|^2$ является кубическая нелинейность. В связанной системе для каждой из волн эта нелинейность лежит в основе процессов ГВГ, которые, в свою очередь, демонстрируют, что происходит обмен энергиями между амплитудами (2). Соответственно, другие члены в выражении (1) являются прямыми аналогиями для выражений (2):

$$iu_x = -i \frac{\partial A_1}{\partial z}, \quad au_{xx} = \frac{1}{2k_1} \Delta^2 A_1 - \frac{1}{2} \beta_2^{(1)} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}.$$

Стоит отметить, что для второго члена присутствуют как пространственные, так и временные производные второго порядка.

В теоретической физике, в частности в нелинейной оптике, распространенным приемом является переход в систему координат, движущуюся с групповой скоростью импульса $T = t - z/v_g$, $Z = z$ [11]. Такая замена позволяет исключить эффекты "сноса" и привести уравнение к безразмерному виду, удобному для анализа солитонных решений. Однако научная новизна заключается в исследовании влияния градиентного состава, который, в свою очередь, оказывает влияние на показатель преломления от продольной координаты z . Введение данной замены будет обоснованным из-за усложнения расчета при помощи ЭВМ, т.к. групповая скорость станет функцией координаты $v_g(z)$ из-за вышеописанной зависимости концентрационного профиля.

В настоящей работе моделирование проводилось для излучения с длиной волны накачки $\lambda = 1064$ нм (ближний инфракрасный диапазон), что соответствует типичным параметрам Nd:YAG-лазеров. Выбор данной длины волны обусловлен как широким распространением таких лазеров в экспериментальной практике, так и наличием надежных спектральных данных для кристалла ниобата лития, в частности, для расчета показателя преломления по формуле Зельмейера [12].

Один из подходов в рамках спектральных методов, который активно применяется при интегрировании нелинейного уравнения Шредингера, — это метод расщепления по физическим процессам [13–14]. Эта схема не требует условий устойчивости, легко реализуется в коде и по скорости вычислений выигрывает у многих конечно-разностных методов [15].

Для решения уравнений (2) был использован симметричный Фурье-метод расщепления по физическим факторам [16]:

$$A_{1,2}(x, z, t) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}_{1,2}\right)\exp(h\hat{N}_{1,2})\exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}_{1,2}\right)A_{01,02}(x, t), \quad (3)$$

где A_{01} — начальная амплитуда излучения для волны накачки, учитывающая в себе гауссов пучок; $A_{02} = 0$ — начальная амплитуда излучения второй гармоники; $\hat{L}, \hat{N}$ — соответственно дисперсионный и нелинейный операторы. В тривиальном случае операторы имеют вид:

$$\hat{L}_1 A_1 = \frac{1}{2k_1}\Delta^2 A_1 - \frac{1}{2}\beta_2^{(1)}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\hat{N}_1 A_1 = -\frac{2\pi i \omega_1^2}{k_1 c^2} \chi^{(2)} A_2 A_1^* e^{-i\Delta k z},$$

$$\hat{L}_2 A_2 = \frac{1}{2k_2}\Delta^2 A_2 - \frac{1}{2}\beta_2^{(2)}\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\hat{N}_2 A_2 = \frac{4\pi i \omega_2^2}{k_2 c^2} \chi^{(2)} A_1^2 e^{-i\Delta k z}.$$

В общем случае начальная амплитуда излучения с гауссовым пучком представляет собой следующий вид:

$$A_{01}(x, t) = \sqrt{I_0} \exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2}{\omega_1^2}\right] \exp\left[\left(\frac{\tau}{2T}\right)^2\right]. \quad (6)$$

В связи с тем, что значения для длительности лазерных импульсов $\tau < 10^{-12}$ с, были учтены потери на поглощение Бугера – Ламберта – Бера и на двухфотонное поглощение [11]:

$$A_{\text{abs1,2}} = \exp\left(-\frac{a_{1,2}}{2} dz\right) A_{1,2} \exp\left(-\frac{\beta}{2}|A|^2 dz\right) \exp\left(-\frac{a_{1,2}}{2} dz\right),$$

где $a_{1,2}$ — коэффициент поглощения для волн накачки и второй гармоники соответственно, β — коэффициент двухфотонного поглощения.

Данная последовательность выбрана в связи с использованным ранее методом расщепления по физическим процессам.

Для получения графиков распределений внутри кристалла необходимо найти локальные интенсивности волны, которые были заданы на сетке $128 \times 1024 \times 64$ следующим выражением (7):

$$I_{\text{local}}(x, z, t) = \frac{c\varepsilon_0 n}{2} |A(x, z, t)|^2. \quad (7)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В данном разделе проведен анализ распространения лазерного излучения в нелинейной среде кристалла ниобата лития с учетом двух факторов: гауссова профиля поперечного распределения интенсивности пучка (в пл. XY, рис. 1) и неоднородного характера концентрационного профиля лития вдоль направления распространения Z.

Графическое отображение эволюции гауссова пучка представлено на рис. 2.

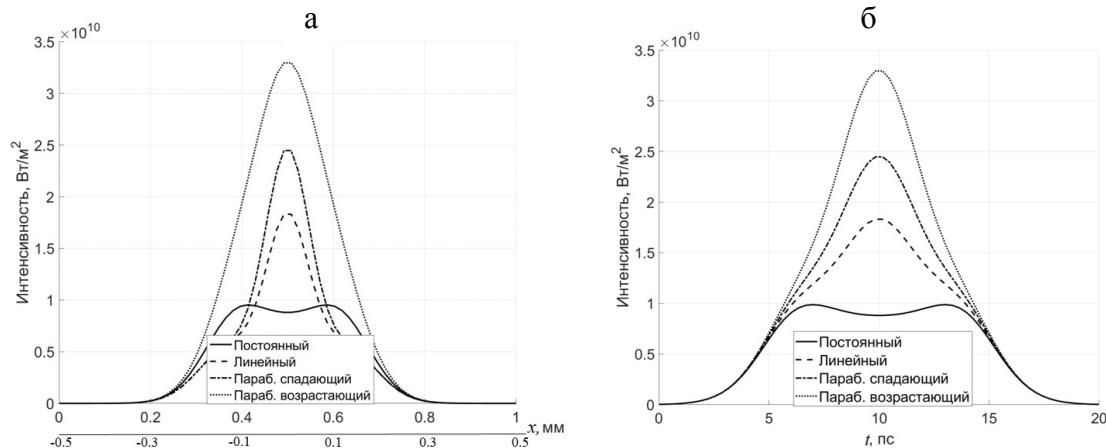


Рис. 2. Зависимости интенсивности гауссового пучка на выходе преобразователя для концентрационных профилей по Z: а) в плоскости XY от x ; б) на оси Z от времени t

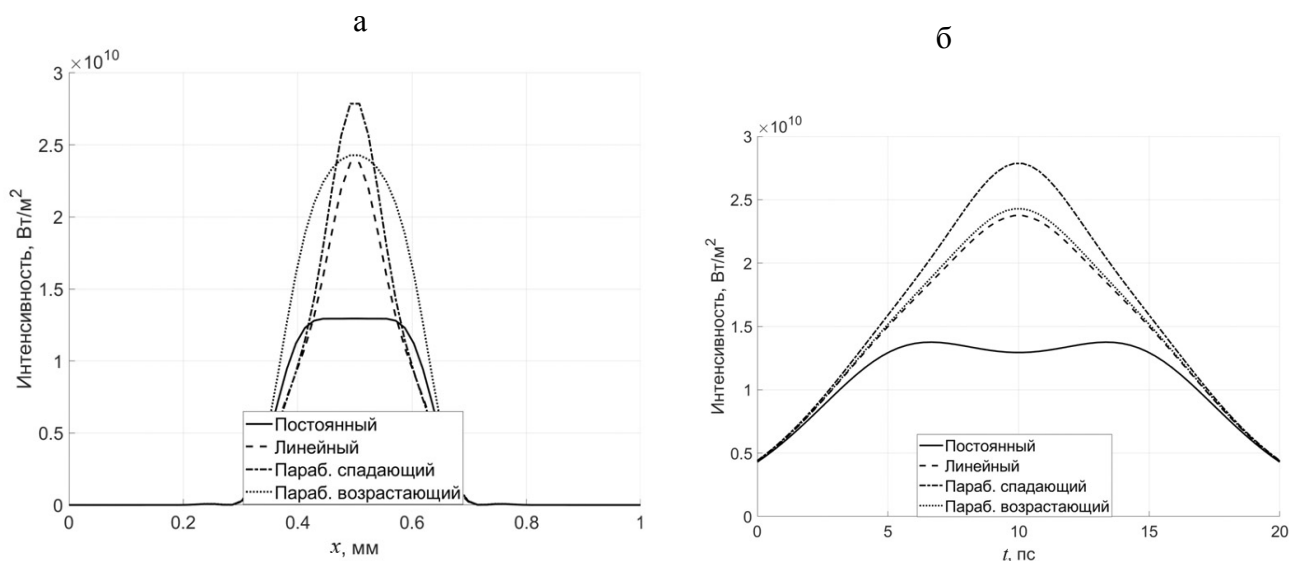


Рис. 3. Зависимости интенсивности излучения от импульса формы гиперболического секанса на выходе преобразователя для концентрационных профилей по Z : а) в плоскости XY от x ; б) на оси Z от времени t

Примечание. Графики на рис. 2, 3 зависимостей интенсивности выходного излучения в поперечнике к направлению Z приведены в координатах по оси X , сдвинутой симметрично вершине пиков, как на рис. 2, а.

Положительным эффектом, продемонстрированным на рис. 2, является то, что как линейный, так и параболические концентрационные профили позволяют сфокусировать пучок лазерного излучения в более узкий пучок, а следовательно, использовать это для улучшения преобразования излучения во вторую гармонику. Также стоит отметить, что значение интенсивности для параболически спадающего концентрационного профиля по длине преобразователя в центре импульса значительно больше по сравнению с постоянным составом, у которого интенсивность распределена в связи с уширением пучка. В свою очередь, значение для параболически возрастающего профиля больше примерно на 0.56, а для линейного концентрационного профиля — примерно на 0.74 в сравнении с постоянным кристаллом.

Импульсы, излучаемые многими лазерами, можно рассчитать, как было рассмотрено выше, при помощи гауссовой формы, однако часто возникает необходимость рассмотреть другие формы импульса. В качестве сравнительного к вышеописанному был использован импульс формы гиперболического секанса, который естественно возникает в связи с оптическими солитонами. Графики для этого случая даны на рис. 3.

Полученные рисунки демонстрируют, что форма импульса оказывает влияние на ширину сигнала на его полувысоте ($\text{FWHM}(z)$) для концентрационных профилей по Z , делая одни профили более эффективными по сравнению с другими.

Для оценки данной эффективности ниже представлены результаты дифракционного и дисперсионного расплываний импульсов для различных концентрационных профилей (рис. 4 и 5).

Для более детального анализа зависимости величины FWHM от формы входного импульса ниже приведены сравнительные графики. На этих графиках представлены результаты для каждого из рассматриваемых типов концентрационных профилей при различных формах входного импульса.

Данное наблюдение подтверждает, что выбор формы импульса является критическим параметром при проектировании градиентных кристаллов.

Представленные рисунки наглядно демонстрируют вывод, сформулированный выше: форма входного импульса оказывает существенное влияние на эволюцию FWHM . В частности, в случае, когда входной импульс имеет форму гиперболического секанса, значения FWHM изменяются в широких пределах в зависимости от типа концентрационного профиля.

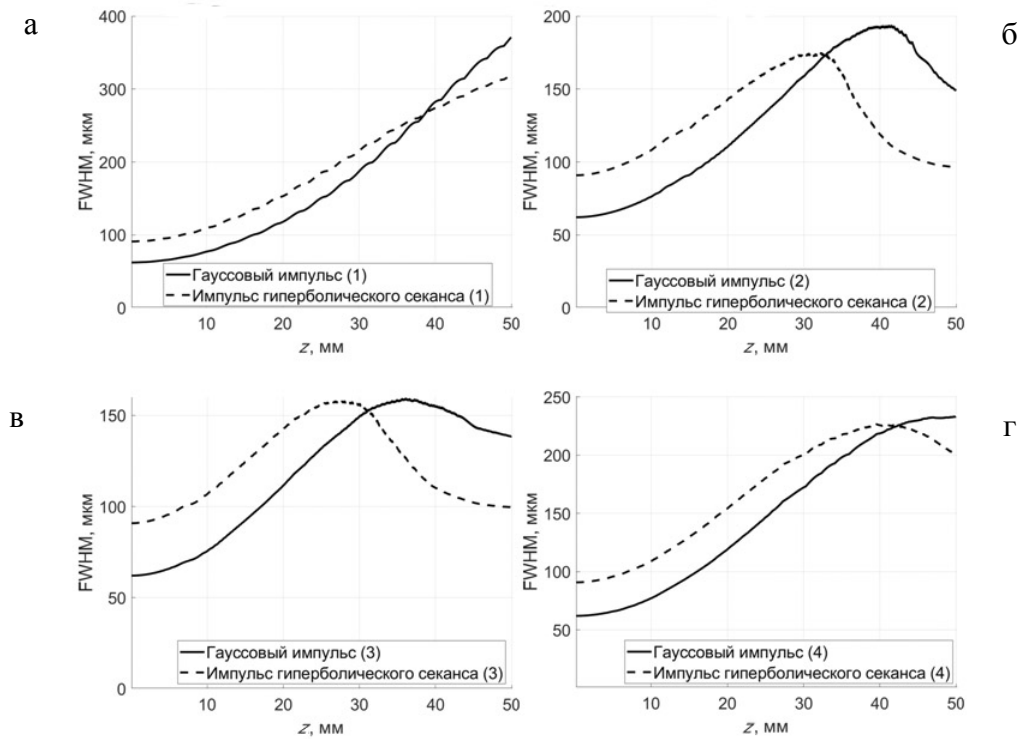


Рис. 4. Дифракционное расплывание импульса различной формы в кристалле с различными типами концентрационного профиля по Z: а — постоянный (1), б — линейный (2), в — параболически спадающий (3), г — параболически возрастающий (4)

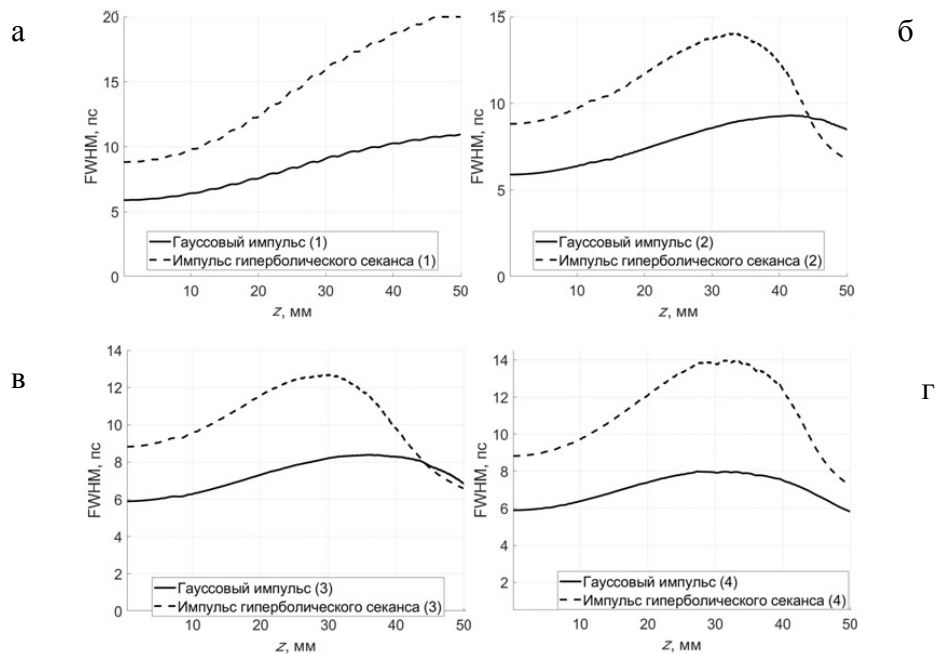


Рис. 5. Дисперсионное расплывание импульса различной формы в кристалле с различными типами концентрационного профиля по Z: а — постоянный (1), б — линейный (2), в — параболически спадающий (3), г — параболически возрастающий (4)

Рис. 6 иллюстрируют характер дисперсионного расплывания лазерного импульса для исследованных типов концентрационных профилей. Полученные результаты демонстрируют, что выбор оптимального профиля концентрации лития позволяет эффективно управлять дисперсионным уширением импульса в зависимости от начальной мощности излучения.

Установлено, что постоянный концентрационный профиль является наименее предпочтительным в диапазоне мощностей от 0.5 до 2 кВт, где наблюдается наиболее интенсивное дисперсионное расплывание. Однако при увеличении начальной мощности до 5 кВт данный профиль демонстрирует сопоставимые с другими профилями результаты, а в некоторых случаях оказывается даже более выгодным решением.

Гауссов импульс (рис. 6, а) демонстрирует плавные, в целом монотонные зависимости. Это связано с тем, что гауссов импульс имеет ограниченный спектр и хорошо описывается солитонными решениями. Для него наиболее стабильным во всем диапазоне мощностей оказывается параболически спадающий профиль, который обеспечивает минимальную ширину при 0.5–8 кВт. Постоянный профиль показывает наибольшее расплывание при малых мощностях, но после

10 кВт его ширина становится наименьшей — это признак перехода в нелинейный режим, где формируется фундаментальный солитон. Параболически возрастающий профиль продемонстрировал существование резонансных пиков на 10 кВт и 20 кВт, связанных с тем, что данный профиль создает дефокусирующую линзу.

Импульс гиперболического секанса (рис. 6, б) имеет более широкие спектральные хвосты. Поэтому при малых мощностях он сильнее подвержен дисперсионному расплыванию, что видно по более высоким значениям FWHM для всех профилей. Однако при увеличении мощности нелинейные эффекты возникают раньше, и уже при 2–5 кВт наблюдаются резонансные явления для постоянного профиля. Наиболее ярко это выражено для параболически возрастающего профиля, у которого возникают два резких пика: при 5 кВт и в диапазоне 50–70 кВт. Это объясняется тем, что возрастающий градиент создает дефокусирующую линзу, и при определенной мощности возникает параметрический резонанс между самофазовой модуляцией и градиентной расфокусировкой. Для гауссова импульса такие резонансы менее выражены, т.к. его спектр уже и нелинейность нарастает более плавно.

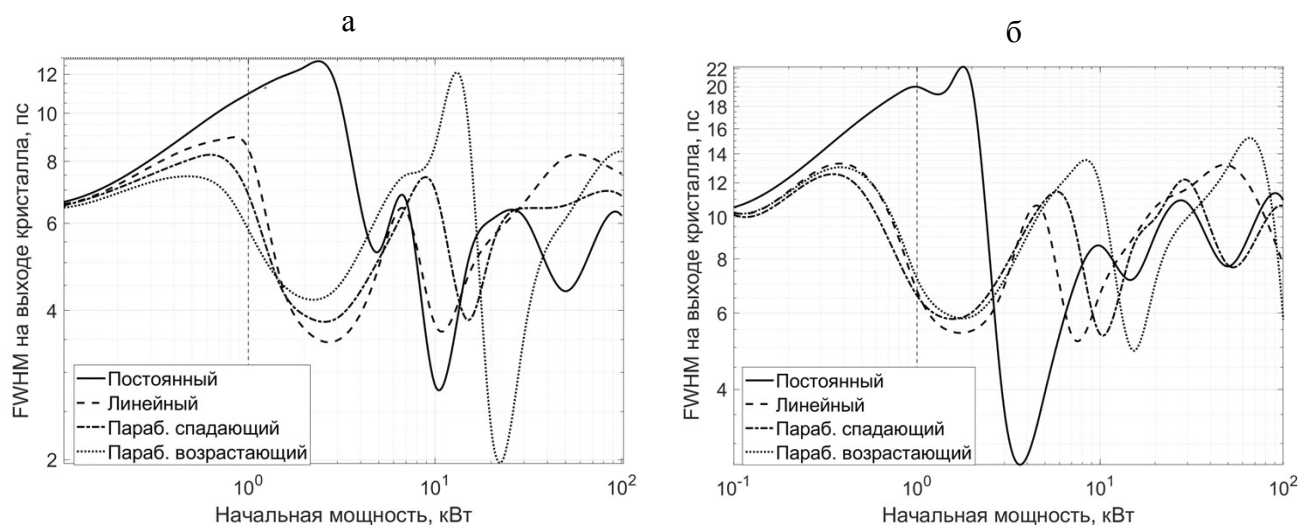


Рис. 6. Зависимость дисперсионного расплывания от начальной мощности:

а — для гауссовой формы импульса, б — для импульса формы гиперболического секанса

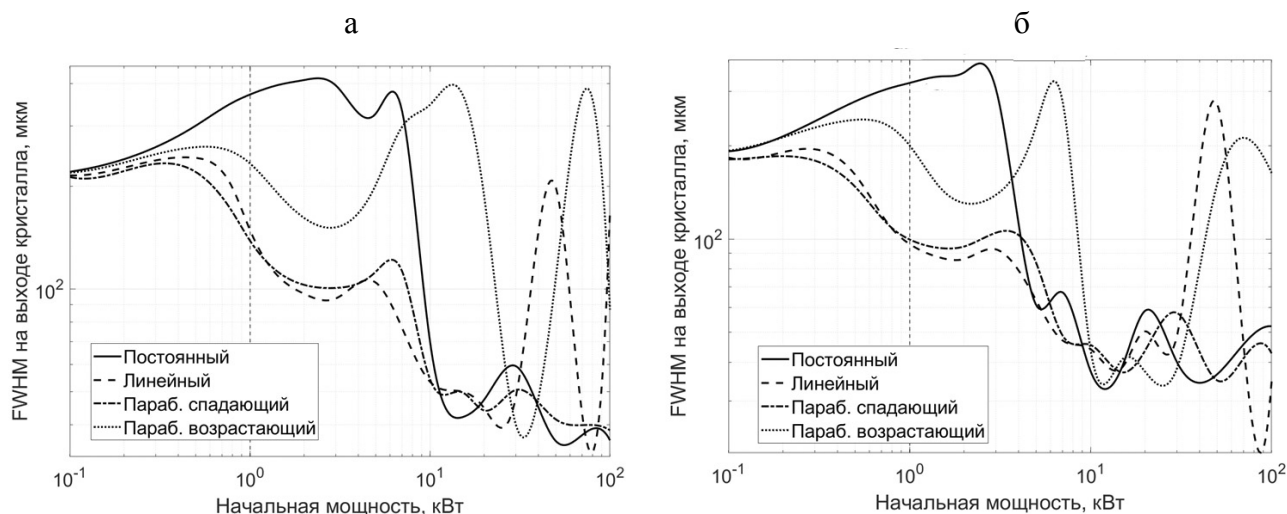


Рис. 7. Зависимость дифракционного расплывания от начальной мощности:
а — для гауссовой формы импульса, б — для импульса формы гиперболического секанса

Рис. 7 наглядно подтверждает сформулированный выше вывод о том, что форма входного импульса оказывает существенное влияние на эволюцию FWHM в зависимости от начальной мощности. Это позволяет, варьируя мощность входного излучения, достигать экстремальных значений FWHM для различных концентрационных профилей.

Гауссов импульс (рис. 7, а) демонстрирует классическое поведение: при малых мощностях (0.5–5 кВт) дифракционное расплывание минимально, т.к. пучок еще не успел расширяться. Затем для постоянного профиля наступает плато (5–20 кВт), где дифракция и слабая самофокусировка уравновешены. При мощностях выше 30 кВт самофокусировка начинает преобладать, и FWHM снижается. Для параболически спадающего профиля зависимость самая плавная: линза поджимает пучок, и добавление нелинейности лишь немного усиливает этот эффект. Линейный профиль показывает резкий пик при 50 кВт — это нелинейный резонанс, когда период биений между дифракцией и самофокусировкой становится кратным длине кристалла. Параболически возрастающий профиль дает два пика (10–20 кВт и 50–70 кВт) из-за резонансов между эффектом дефокусирующей линзы и самофокусировкой.

Импульс гиперболического секанса (рис. 7, б) имеет более широкий спектр и более высокую пиковую интенсивность при той же мощности, поэтому нелинейные эффекты проявляются при меньших мощностях. Для него постоянный профиль уже при 2 кВт показывает резкое падение

FWHM за счет самофокусировки. Линейный профиль сохраняет пик при 50 кВт, но он становится более острым. Параболически возрастающий профиль дает два пика, причем первый пик сдвигается к 8 кВт, а второй становится более низким. Параболически спадающий профиль остается наиболее стабильным, однако при мощностях от 30 кВт до 60 кВт его преимущество перед постоянным профилем уменьшается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено численное исследование распространения лазерного излучения в градиентных кристаллах ниобата лития с различными концентрационными профилями PPLN-структуры (постоянным, линейным, параболически спадающим, параболически возрастающим) для двух форм входного импульса (гауссовой и гиперболического секанса). Установлено, что выбор концентрационного профиля существенно влияет на эффективность преобразования во вторую гармонику, а также на характер дисперсионного и дифракционного расплываний лазерного импульса. Наиболее заметные различия в эффективности преобразования наблюдаются между параболическими (как спадающим, так и возрастающим) и линейными концентрационными профилями, тогда как различия между двумя параболическими профилями выражены в меньшей степени. Показано, что форма входного импульса (гауссов или гиперболический секанс) также оказывает значительное влияние на эволюцию ширины импульса вдоль

кристалла. В статье также приведена основная математическая модель, которая использовалась при получении графиков.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Bazzan M., Sada C. Generalized Optical waveguides in lithium niobate: Recent developments and applications // *Appl. Phys. Rev.* 2015. Vol. 2. Id. 040603. DOI: 10.1063/1.4931601
2. Ivanenko M., Krasnaberski A., Mikhailov A., Mikhayev Y., Kolotushkin Y., Grimm V., Bagschik K., Lissotschenko V. Fast laser-beam deflector based on electro-optical arrays // *Laser Resonators and Beam Control XI: Proc. SPIE.* 2009. Vol. 7194. Id. 719406. DOI: 10.1117/12.808202
3. Shamray A.V., Kozlov A.S., Il'chev I.V. et al. A new method for controlling the shape of spectral characteristics of Bragg gratings in electro-optical materials // *Quantum Electronics.* 2005. Vol. 35, № 8. P. 734–740. DOI: 10.1070/QE2005v035n08ABEH009178
4. Zhao H., Sukhoy K., Lima et al. Generation of green second harmonic with 60% conversion efficiency from a Q-switched microchip laser in MgO:PPLN crystal // *Laser Phys. Lett.* 2012. Vol. 9, no. 5. Id. 355. DOI: 10.7452/lapl.201110129
5. Колкер Д., Дмитриев А.К., Горелик П. и др. Каскадный режим генерации частот в оптическом параметрическом генераторе // *Квантовая электроника.* 2009. Т. 39. С. 431–434. URL: <https://quantum-electronics.ru/wp-content/uploads/2009/5/13913.pdf>
6. Галуцкий В.В., Строганова Е.В., Шмаргилов С.А. и др. Особенности преобразования частоты в градиентных кристаллах PPLN // *Квантовая электроника.* 2014. Т. 44, № 1. С. 30–33. URL: <https://quantum-electronics.ru/wp-content/uploads/2014/1i/15289.pdf>
7. Schlarb U., Betzler K. Generalized Sellmeier equation for the refractive indices of lithium niobate // *Ferroelectrics.* 1994. Vol. 156. P. 99–104. DOI: 10.1080/00150199408215934
8. Белоусов А.А., Вольхин Ю.Н., Гамиловская А.В., Дубровская А.А., Тихонов Е.В. О применении методов и средств радиофотоники для обработки сигналов дециметрового, сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн // *Прикладная фотоника.* 2014. Т. 1, № 1. С. 65–86. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23650160>
9. Полянин А.Д., Кудряшов Н.А. Нелинейное уравнение Шредингера общего вида: многофункциональная модель, редукции и точные решения // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2025. Т. 14, № 1. С. 24–36. DOI: 10.26583/vestnik.2025.1.3
10. Yew A.C. Multipulses of Nonlinearly Coupled Schrödinger Equations // *Journal of Differential Equations.* 2001. Vol. 173, iss. 1. P. 92–137. DOI: 10.1006/jdeq.2000.3922
11. Agrawal G.P. Nonlinear fiber optics. San Diego: Acad. Press, 2004. 529 p.
12. Edwards G.J., Lawrence M.A. Temperature-dependent dispersion equation for congruently grown lithium niobate // *Opt. Quant. Electron.* 1984. Vol. 16, iss. 4. P. 373–375. DOI: 10.1007/BF00620081
13. Ibarra-Villalon H.E. et al. Numerical approaches for solving the nonlinear Schrödinger equation in the nonlinear fiber optics formalism // *Journal of Optics.* 2020. Vol. 22, iss. 4. Id. 043501. DOI: 10.1088/2040-8986/ab739e
14. Häger C., Pfister H.D. Deep Learning of the Nonlinear Schrödinger Equation in Fiber-Optic Communications // *IEEE International Symposium on Information Theory.* 2018. P. 1590–1594. DOI: 10.1109/ISIT.2018.8437734
15. Taha T.R., Ablowitz M.I. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation // *J. Comput. Phys.* 1984. Vol. 55, iss. 2. P. 203–230. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90003-2
16. Смирнов С.В. Схемы расщепления высокого порядка точности для интегрирования нелинейного уравнения Шредингера // *Журнал вычислительных технологий.* 2017. Т. 22, № 6. С. 89–97. URL: <http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1831>

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Контакты: Суханов Александр Евгеньевич,
sa.world1111@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 01.05.2026

INFLUENCE OF LASER PULSE SHAPE ON THE RADIATION CHARACTERISTICS IN GRADIENT LITHIUM NIOBATE CRYSTALS

A. E. Sukhanov, V. V. Galutskiy, E. V. Stroganova, N. D. Dokuchaev

Kuban State University, Krasnodar, Russia

The article considers the possibility of studying the influence of internal processes in a gradient lithium niobate crystal based on numerical simulation of laser radiation propagation within its structure. The relevance of the work is due to the need to improve the efficiency of nonlinear optical converters for second harmonic generation. The study demonstrates that creating various concentration profiles along the crystal can significantly increase the second harmonic generation efficiency compared to constant-composition crystals. The influence of concentration gradient on the final second harmonic conversion efficiency is investigated in detail. Qualitative and quantitative differences in the second harmonic radiation characteristics for gradient lithium niobate compared to traditional homogeneous composition crystals are revealed. Particular attention is paid to comparing a Gaussian pulse and a hyperbolic secant pulse. It is established that the input pulse shape significantly affects the evolution of pulse width as a function of initial power. It is shown that varying the concentration profile and initial power makes it possible to effectively control the dispersion and diffraction broadening of the laser beam. The parabolically decreasing profile demonstrated the greatest stability over a wide power range, while the parabolically increasing profile showed unstable behavior under certain conditions. The results of the work can be applied in the design of laser systems with high second harmonic generation efficiency.

Keywords: second harmonic generation, gradient crystal, lithium niobate, numerical simulation

REFERENCES

1. Bazzan M., Sada C. Generalized Optical waveguides in lithium niobate: Recent developments and applications. *Appl. Phys. Rev.*, 2015, vol. 2, id. 040603. DOI: 10.1063/1.4931601
2. Ivanenko M., Krasnaberski A., Mikhailov A., Miklyaev Y., Kolotushkin Y., Grimm V., Bagschik K., Lissotschenko V. Fast laser-beam deflector based on electro-optical arrays. *Laser Resonators and Beam Control XI: Proc. SPIE*, 2009, vol. 7194, id. 719406. DOI: 10.1117/12.808202
3. Shamray A.V., Kozlov A.S., Il'chev I.V. et al. A new method for controlling the shape of spectral characteristics of Bragg gratings in electro-optical materials. *Quantum Electronics*, 2005, vol. 35, no. 8, pp. 734–740. DOI: 10.1070/QE2005v035n08ABEH009178
4. Zhao H., Sukhoy K., Lima et al. Generation of green second harmonic with 60% conversion efficiency from a Q-switched microchip laser in MgO:PPLN crystal. *Laser Phys. Lett.*, 2012, vol. 9, no. 5, id. 355. DOI: 10.7452/lapl.201110129
5. Kolker D., Dmitriev A.K., Gorelik P. et al. [Cascade frequency generation mode in an optical parametric oscillator]. *Kvantovaya elektronika* [Quantum electronics], 2009, vol. 39, pp. 431–434. (In Russ.). URL: <https://quantum-electronics.ru/wp-content/uploads/2009/5/13913.pdf>
6. Galutsky V.V., Stroganova E.V., Shmargilov S.A. et al. [Features of frequency conversion in PPLN gradient crystals]. *Kvantovaya elektronika* [Quantum electronics], 2014, vol. 44, no. 1, pp. 30–33. URL: <https://quantum-electronics.ru/wp-content/uploads/2014/1i/15289.pdf> (In Russ.).
7. Schlarb U., Betzler K. Generalized Sellmeier equation for the refractive indices of lithium niobate. *Ferroelectrics*, 1994, vol. 156, no. 1, pp. 99–104. DOI: 10.1080/00150199408215934
8. Belousov A.A., Volkhin Iu.N., Gamilovskaia A.V., Dubrovskaya A.A., Tikhonov E.V. [Radiophotonical methods and tools used for microwave analog and digital signal processing]. *Prikladnaya fotonika* [Applied Photonics], 2014, vol. 1, no. 1, pp. 65–86. (In Russ.). URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23650160>
9. Polyanin A.D., Kudryashov N.A. [Nonlinear Schrödinger equation of general form: multifunctional model, reductions and exact solutions]. *Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"* [MIPhI Bulletin], 2025, vol. 14, no. 1, pp. 24–36. (In Russ.). DOI: 10.26583/vestnik.2025.1.3
10. Yew A.C. Multipulses of Nonlinearly Coupled Schrödinger Equations. *Journal of Differential Equations*, 2001, vol. 173, no. 1, pp. 92–137. DOI: 10.1006/jdeq.2000.3922
11. Agrawal G.P. *Nonlinear fiber optics*. San Diego: Acad. Press, 2004. 529 p.
12. Edwards G.J., Lawrence M.A. Temperature-dependent dispersion equation for congruently grown lithium niobate. *Opt. Quant. Electron.*, 1984, vol. 16, no. 4, pp. 373–375. DOI: 10.1007/BF00620081
13. Ibarra-Villalon H.E. et al. Numerical approaches for solving the nonlinear Schrödinger equation in the nonlinear fiber optics formalism. *Journal of Optics*, 2020, vol. 22, no. 4, id. 043501. DOI: 10.1088/2040-8986/ab739e

14. Häger C., Pfister H.D. Deep Learning of the Nonlinear Schrödinger Equation in Fiber-Optic Communications. *IEEE International Symposium on Information Theory*, 2018, pp. 1590–1594. DOI: 10.1109/ISIT.2018.8437734
15. Taha T.R., Ablowitz M.I. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation. *J. Comput. Phys.*, 1984, vol. 55, no. 2, pp. 203–230. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90003-2
16. Smirnov S.V. [High-order accuracy splitting schemes for the integration of the nonlinear Schrödinger equation]. *Zhurnal vychislitel'nyh tekhnologij* [Journal of Computing Technologies], 2017, vol. 22, no. 6, pp. 89–97. (In Russ.). URL: <http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1831>

Contacts: *Sukhanov Alexander Evgenievich*,
sa.world1111@yandex.ru

The article was received by the editorial office on 01.05.2026

INTRODUCTION

Currently, lithium niobate is a key material in photonics, which allows its industrial use due to its commercial availability and physical properties [1–3]. Periodically polarized lithium niobate (PPLN) is successfully used to generate the second harmonic of laser radiation, which is a good analog of bulk nonlinear optical converters made of lithium niobate [4]. The use of the PPLN structure is an effective solution for converting radiation from continuous-wave semiconductor and fiber lasers, as well as for creating parametric light generators [5].

To improve more highly efficient gradient PPLN converters, studies of the domain wall growth rates in gradient lithium niobate samples were conducted [6]. However, these studies were conducted only for constant congruent or stoichiometric compositions. The presence of an impurity gradient, for example, in the form of a change in the amount of lithium in the structure, can lead to a change in the local growth rate of domain walls, which in turn affects the efficiency of the converter [7], as the crystal matrix will absorb, resulting in a change in the internal temperature field. The need to improve energy efficiency is applicable to various areas related to signal processing and transmission, including radio communications, optical systems, acoustic applications, etc. [8].

To analyze the effect of the composition gradient along the PPLN axis on the efficiency of converting pump radiation at 1064 nm into the second harmonic of the radiation (SHG), the circuit shown in Fig. 1. was used.

MATHEMATICAL MODEL

According to the fundamental classification [9], the classical nonlinear Schrödinger equation (NSE) is usually defined as an equation of the form

$$iu_x + au_{xx} + f(|u|)u = 0. \quad (1)$$

Fig. 1. Schematic diagram of the PPLN converter

To study the influence of the gradient composition of the lithium niobate crystal, we introduce expressions for finding the local values of the wave amplitude in the modulator. Taking into account the Gaussian beam, the classical NSE system is related to the Fourier method of splitting by physical factors [10]:

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial A_1}{\partial z} &= \frac{1}{2k_1} \Delta^2 A_1 - \frac{1}{2} \beta_2^{(1)} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{2\pi i \omega_1^2}{k_1 c^2} \chi^{(2)} A_2 A_1^* e^{-i\Delta k z}, \\ -i \frac{\partial A_2}{\partial z} &= \frac{1}{2k_2} \Delta^2 A_2 - \frac{1}{2} \beta_2^{(2)} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{4\pi i \omega_2^2}{k_2 c^2} \chi^{(2)} A_2^2 e^{-i\Delta k z}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $A_{1,2}$ are the radiation amplitudes (1st and 2nd harmonics); z is the coordinate along which the evolution will take place; $k_{1,2}$ are the wavenumbers; β_2 is the group velocity dispersion (GVD); Δk is the wave detuning, $\chi^{(2)} = 2 \times d_{\text{eff}}$.

An important special case of equation (1) at $f(|u|) = k|u|^2$ is cubic nonlinearity. In a coupled system, for each wave, this nonlinearity underlies the SHG processes, which, in turn, demonstrate that energy is exchanged between the amplitudes (2). Accordingly, the other terms in expression (1) are direct analogs to expressions (2):

$$iu_x = -i \frac{\partial A_1}{\partial z}, \quad au_{xx} = \frac{1}{2k_1} \Delta^2 A_1 - \frac{1}{2} \beta_2^{(1)} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}.$$

It is worth noting that the second term contains both spatial and time second-order derivatives.

In theoretical physics, particularly in nonlinear optics, a common technique is to use a coordinate system moving with the group velocity of the pulse $T = t - z / v_g$, $Z = z$ [11]. This replacement eliminates "drift" effects and reduces the equation to a dimensionless form convenient for analyzing soliton solutions. However, the scientific novelty lies in the study of the influence of the gradient composition, which, in turn, affects the refractive index from the longitudinal coordinate z . The introduction of this replacement would be unjustified due to the complication of computer calculations, since the group velocity becomes a function of the coordinate $v_g(z)$ due to the above-described dependence of the concentration profile.

In this study, simulations were performed for a pump wavelength of $\lambda = 1064$ nm (near-infrared), which corresponds to typical parameters of Nd:YAG lasers. This wavelength was chosen due to both the widespread use of such lasers in experimental practice and the availability of reliable spectral data for lithium niobate crystals, particularly for calculating the refractive index using the Sellmeier formula [12].

One approach within spectral methods that is actively used for integrating the nonlinear Schrödinger equation is the splitting method based on physical processes [13–14]. This scheme does not require sta-

bility conditions, is easily implemented in code, and is superior in computational speed to many finite-difference methods [15]. To solve equations (2), the symmetric Fourier method of splitting into physical factors was used [16]:

$$A_{1,2}(x, z, t) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}_{1,2}\right)\exp(h\hat{N}_{1,2})\exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}_{1,2}\right)A_{01,02}(x, t), \quad (3)$$

where A_{01} is the initial radiation amplitude for the pump wave, taking into account the Gaussian beam; $A_{02} = 0$ is the initial radiation amplitude of the second harmonic; $\hat{L}, \hat{N}$ are the dispersion and nonlinear operators, respectively. In the trivial case, the operators have the form:

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 A_1 &= \frac{1}{2k_1}\Delta^2 A_1 - \frac{1}{2}\beta_2^{(1)}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}, \\ \hat{N}_1 A_1 &= -\frac{2\pi i\omega_1^2}{k_1 c^2}\chi^{(2)}A_2 A_1^* e^{-i\Delta k z}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_2 A_2 &= \frac{1}{2k_2}\Delta^2 A_2 - \frac{1}{2}\beta_2^{(2)}\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2}, \\ \hat{N}_2 A_2 &= \frac{4\pi i\omega_2^2}{k_2 c^2}\chi^{(2)}A_2^2 e^{-i\Delta k z}. \end{aligned} \quad (5)$$

In general, the initial radiation amplitude with a Gaussian beam has the following form:

$$A_{01}(x, t) = \sqrt{I_0} \exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2}{\omega_1^2}\right] \exp\left[\left(\frac{\tau}{2T}\right)^2\right]. \quad (6)$$

Since the laser pulse duration $\tau < 10^{-12}$ s, losses due to Bouguer–Lambert–Beer absorption and two-photon absorption [11] were taken into account:

$$A_{\text{abs1,2}} = \exp\left(-\frac{a_{1,2}}{2}dz\right)A_{1,2}\exp\left(-\frac{\beta}{2}|A|^2 dz\right)\exp\left(-\frac{a_{1,2}}{2}dz\right),$$

where $a_{1,2}$ is the absorption coefficient for the pump and second harmonic waves, respectively, and β is the two-photon absorption coefficient.

This sequence was chosen in connection with the previously used method of splitting according to physical processes.

To obtain distribution graphs within the crystal, it is necessary to find the local wave intensities, which were defined on a $128 \times 1024 \times 64$ grid by the following expression (7):

$$I_{\text{local}}(x, z, t) = \frac{c\varepsilon_0 n}{2}|A(x, z, t)|^2. \quad (7)$$

RESULTS AND DISCUSSION

In this section, we analyze the propagation of laser radiation in a nonlinear medium of a lithium niobate crystal, taking into account two factors: the Gaussian profile of the transverse beam intensity distribution (in the XY plane, Fig. 1) and the nonuniform nature of the lithium concentration profile along the Z direction of propagation.

A graphical representation of the evolution of the Gaussian beam is shown in Fig. 2.

Fig. 2. Gaussian beam intensity dependences at the converter output for concentration profiles along Z: a) in the XY plane versus x ; б) on the Z axis versus time t

Note. The graphs in Figs. 2 and 3, showing the dependences of the output radiation intensity in the direction transverse to the Z, are presented in coordinates along the X axis, shifted symmetrically to the peaks, as in Fig. 2, a.

The positive effect demonstrated in Fig. 2 is that both linear and parabolic concentration profiles allow focusing the laser beam into a narrower beam, and therefore, this can be used to improve the conversion of radiation to the second harmonic. It is also worth noting that the intensity value for a parabolically decreasing concentration profile along the transducer's length at the pulse center is significantly higher compared to a constant composition, for which the intensity is distributed due to beam broadening. In turn, the value for a parabolically increasing profile is approximately 0.56 times higher, and for a linear concentration profile, approximately 0.74 times higher compared to a constant crystal.

The pulses emitted by many lasers can be calculated, as discussed above, using a Gaussian pulse shape; however, it is often necessary to consider other pulse shapes. As a reference, a hyperbolic secant pulse, which naturally arises in connection with optical solitons, was used. The graphs for this case are shown in Fig. 3.

Fig. 3. Radiation intensity dependences on the hyperbolic secant pulse at the converter output for concentration profiles along Z: a) in the XY plane versus x ; б) on the Z axis versus time t

The obtained figures demonstrate that the pulse shape influences the signal width at half-maximum (FWHM(z)) for concentration profiles along the Z axis, making some profiles more effective than others.

To evaluate this effectiveness, the results of diffraction and dispersion pulse spreading for various

concentration profiles are presented below (Figs. 4 and 5).

Fig. 4. Diffraction spreading of a pulse of different shapes in a crystal with different types of concentration profile along Z: a — constant (1), δ — linear (2), ν — parabolically decreasing (3), τ — parabolically increasing (4)

Fig. 5. Dispersive spreading of a pulse of different shapes in a crystal with different types of concentration profile along Z: a — constant (1), δ — linear (2), ν — parabolically decreasing (3), τ — parabolically increasing (4)

For a more detailed analysis of the dependence of the FWHM on the input pulse shape, comparative graphs are provided below. These graphs present the results for each of the considered concentration profile types with different input pulse shapes.

This observation confirms that the choice of pulse shape is a critical parameter in the design of gradient crystals.

The presented figures clearly demonstrate the conclusion formulated above: the input pulse shape has a significant impact on the evolution of the FWHM. In particular, in the case where the input pulse has the shape of a hyperbolic secant, the FWHM values vary widely depending on the type of concentration profile.

Figure 6 illustrates the nature of laser pulse dispersion broadening for the studied concentration profiles. The results demonstrate that selecting the optimal lithium concentration profile allows for effective control of pulse dispersion broadening, depending on the initial radiation power.

Fig. 6. Dispersion spreading as a function of initial power: a — for a Gaussian pulse, δ — for a hyperbolic secant pulse

It was found that a constant concentration profile is the least favorable in the power range from 0.5 to 2 kW, where the most intense dispersion broadening is observed. However, with an increase in the initial power to 5 kW, this profile demonstrates results comparable to other profiles and, in some cases, even proves to be a more favorable solution.

The Gaussian pulse (Fig. 6, a) exhibits smooth, generally monotonic dependences. This is due to the fact that the Gaussian pulse has a limited spectrum and is well described by soliton solutions. For it, the most stable profile over the entire power range is the

parabolically descending profile, which provides the minimum width at 0.5–8 kW. The constant profile shows the greatest spreading at low powers, but at powers above 10 kW its width becomes smallest—this is a sign of a transition to a nonlinear regime, where a fundamental soliton is formed. The parabolically rising profile demonstrated the existence of resonant peaks at 10 kW and 20 kW, associated with the fact that this profile creates a defocusing lens.

The hyperbolic secant pulse (Fig. 6, b) has broader spectral tails. Therefore, at low powers, it is more susceptible to dispersive spreading, as evidenced by the higher FWHM values for all profiles. However, as the power increases, nonlinear effects appear earlier, and resonant phenomena are already observed for the constant profile at 2–5 kW. This is the most pronounced for the parabolically increasing profile, which exhibits two sharp peaks: at 5 kW and in the 50–70 kW range. It is explained by the fact that the increasing gradient creates a defocusing lens, and at a certain power, a parametric resonance occurs between the self-phase modulation and the gradient defocusing. For a Gaussian pulse, such resonances are less pronounced since its spectrum is narrower and the nonlinearity increases more smoothly.

Figure 7 clearly confirms the above conclusion that the input pulse shape has a significant impact on the evolution of the FWHM as a function of the initial power. This allows, by varying the input power, achieving extreme FWHM values for various concentration profiles.

Fig. 7. Diffraction spreading as a function of initial power: a — for a Gaussian pulse, δ — for a hyperbolic secant pulse

The Gaussian pulse (Fig. 7, a) exhibits classical behavior: at low powers (0.5–5 kW), diffraction spreading is minimal, since the beam has not yet had time to broaden. Then, for a constant profile, a plateau occurs (5–20 kW), where diffraction and weak self-focusing are balanced. At powers above 30 kW, self-focusing begins to predominate, and the FWHM decreases. For a parabolically falling profile, the dependence is smoothest: the lens compresses the beam, and the addition of nonlinearity only slightly enhances this effect. The linear profile shows a sharp peak at 50 kW—this is a nonlinear resonance, where the beat period between diffraction and self-focusing becomes a multiple of the crystal length. The parabolically increasing profile produces two peaks (10–20 kW and 50–70 kW) due to resonances between the defocusing lens effect and self-focusing.

The hyperbolic secant pulse (Fig. 7, b) has a broader spectrum and higher peak intensity at the

same power, so nonlinear effects appear at lower powers. For this pulse, a constant profile already at 2 kW shows a sharp drop in FWHM due to self-focusing. The linear profile retains a peak at 50 kW, but it becomes sharper. The parabolically increasing profile produces two peaks, with the first peak shifting to 8 kW and the second becoming lower. The parabolic falling profile remains the most stable but at powers from 30 kW to 60 kW its advantage over the constant profile decreases.

CONCLUSION

In this paper, we numerically studied the propagation of laser radiation in graded lithium niobate crystals with various concentration profiles of the PPLN structure (constant, linear, parabolically decreasing,

and parabolically increasing) for two input pulse shapes (Gaussian and hyperbolic secant). It was found that the choice of concentration profile significantly affects the efficiency of conversion to the second harmonic, as well as the nature of the dispersion and diffraction spreading of the laser pulse. The most noticeable differences in conversion efficiency are observed between parabolic (both decreasing and increasing) and linear concentration profiles, while the differences between the two parabolic profiles are less pronounced. It is shown that the shape of the input pulse (Gaussian or hyperbolic secant) also has a significant impact on the evolution of the pulse width along the crystal. The article also presents the basic mathematical model used to obtain the graphs.