

УДК 621.373.826

EDN: JPILQU

© А. С. Петровский, 2026

ПРОБЛЕМЫ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ

В представленной статье проведен теоретический анализ и дано системное методологическое обоснование подходов к повышению точности регистрации волновых пакетов фемтосекундных лазерных импульсов. Данная задача на сегодняшний день признается одной из наиболее приоритетных для качественного развития систем импульсной терагерцовой спектроскопии во временной области. Обусловлена актуальность проведенного исследования объективной необходимостью нивелирования искажений, вызванных эффектом алиасинга, которые неизбежно возникают при цифровой обработке широкополосных сигналов в условиях ограниченного быстродействия приемных трактов. Предметом авторского внимания выступает построение и верификация аналитической модели, описывающей процесс совместного применения аппаратной антиалиасной фильтрации на базе многослойных метаповерхностей и специализированных алгоритмов субдискретизации (undersampling). В ходе выполнения работы была существенно уточнена математическая модель процесса дискретизации, что позволило в явном виде определить граничные условия, необходимые для корректного восстановления формы импульса без потери фазовой информации. На основе анализа электродинамических характеристик квазиоптических интерференционных структур автором показано, что использование фильтров с крутизной спектрального спада более 30 дБ/октаву формирует надежный теоретический фундамент для увеличения временного шага выборки в 6.5 раз — со 125 до 820 фс. Особое внимание в работе уделено вторичной обработке массивов экспериментальных данных, в ходе которой было подтверждено, что расчетная погрешность восстановления ключевых спектральных параметров при реализации предложенного подхода не превышает 2.3 %. Сформулирован итоговый вывод о том, что предложенная в работе интеграция аппаратных и программных решений позволяет кратно снизить требования к частотным характеристикам электроники, обеспечивая при этом прецизионность измерений, достаточную для решения задач неразрушающего контроля и фундаментальной спектроскопии конденсированных сред.

Ключевые слова: фемтосекундные импульсы, волновой пакет, точность измерения, антиалиасная фильтрация, субдискретизация, терагерцовая спектроскопия

ВВЕДЕНИЕ

Бурное развитие лазерных технологий в последние десятилетия привело к созданию надежных источников сверхкоротких световых импульсов фемтосекундного диапазона. Это, в свою очередь, открыло принципиально новые горизонты в исследовании сверхбыстрых процессов в веществе, положив начало эре фемтосекундной спектроскопии и импульсной терагерцовой (ТГц) спектроскопии во временной области (THz-TDS) [1, 2]. Данные методы стали незаменимым инструментом в физике конденсированного состояния, химии быстротекущих процессов, молекулярной биологии и современном материаловедении. Возможность генерации и когерентного детектирования электромагнитного излучения в ТГц-диапазоне позволяет в реальном времени наблюдать за динамикой химических реакций, колебательно-вращательными переходами молекул, фононными

модами в кристаллах и движением носителей заряда в полупроводниковых наноструктурах [3–5].

Критически важным аспектом любой спектроскопической системы является точность измерения параметров регистрируемых волновых пакетов — их временной формы $E(t)$, длительности, фазы и спектрального состава. В системах импульсной ТГц-спектроскопии регистрация временного профиля электрического поля импульса осуществляется, как правило, методом электрооптического стробоскопического детектирования или с использованием фотопроводящих антенн. Полученный аналоговый сигнал несет в себе исчерпывающую информацию о свойствах исследуемого объекта, через который прошел импульс [6–9].

Однако на пути к достижению предельно высокой точности измерений и расширению динамического диапазона спектрометров возникает ряд фундаментальных и технических трудностей.

Одной из центральных проблем является процесс дискретизации аналогового сигнала, получаемого с детектора, и его последующая цифровая обработка. Спектр фемтосекундного импульса является чрезвычайно широким, простираясь от сотен гигагерц до десятков терагерц. Согласно фундаментальной теореме отсчетов Уитакера – Котельникова – Шеннона [10], для однозначного восстановления непрерывного сигнала его необходимо дискретизировать с частотой f_s , как минимум вдвое превышающей максимальную частоту $f_{\max}$ в его спектре ($f_s \geq 2f_{\max}$).

В современных системах THz-TDS, особенно использующих быстрые линии задержки или схемы асинхронного оптического сэмпирования (ASOPS), спектр регистрируемого сигнала может содержать высокочастотные шумы или полезные компоненты, выходящие за пределы частоты Найквиста используемого аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Нарушение условия теоремы отсчетов приводит к эффекту наложения спектров, или алиасингу (aliasing) — явлению, при котором высокочастотные компоненты сигнала ложным образом отображаются в низкочастотную область спектра. Это приводит к необратимым искажениям регистрируемой формы волнового пакета, появлению ложных спектральных линий и существенному снижению отношения сигнал/шум [11, 12].

Стандартные методы борьбы с алиасингом предполагают использование электронных фильтров низких частот перед АЦП. Однако в случае широкополосных импульсных сигналов реализация электронных фильтров с линейной фазовой характеристикой (необходимой для сохранения формы импульса) и крутым спадом частотной характеристики представляет собой сложную инженерную задачу. Любая дисперсия в фильтре приведет к расплыванию импульса во времени, что недопустимо для прецизионных измерений.

Альтернативным и более перспективным подходом является применение квазиоптических фильтров, устанавливаемых непосредственно в оптическом тракте спектрометра перед детектором [13–15]. Такие фильтры, выполненные на основе частотно-селективных поверхностей (метаповерхностей), способны эффективно отсекал паразитное высокочастотное излучение до момента детектирования, не внося существенных фазовых искажений в рабочем диапазоне частот. Кроме того, использование методов субдискретизации (undersampling) позволяет снизить требования к быстродействию электроники, сохраняя при этом информативность сигнала, если его спектр локализован в определенной полосе частот [16, 17].

РЕШАЕМАЯ ЗАДАЧА

Несмотря на наличие экспериментальных наработок в области ТГц-фильтрации [11, 16], до сих пор отсутствует единое аналитическое обоснование оптимального выбора параметров дискретизации при совместном использовании крутых фильтров и алгоритмов субдискретизации. Данная работа призвана восполнить этот пробел путем выработки расчетного алгоритма.

Целью настоящей работы является теоретический анализ и обоснование эффективности совместного применения антиалиасной фильтрации и техник субдискретизации для повышения точности измерения волнового пакета фемтосекундных импульсов.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Математическая модель эффекта алиасинга

Для корректного описания процесса искажения сигнала необходимо рассмотреть математическую модель дискретизации. Пусть исходный волновой пакет фемтосекундного импульса описывается непрерывной функцией времени $E(t)$. Его спектральная плотность $S(\omega)$ определяется преобразованием Фурье (1):

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

При цифровой регистрации сигнал $E(t)$ подвергается дискретизации с временным шагом $\Delta t = T_s$, что соответствует частоте дискретизации $f_s = 1 / T_s$. В результате получается последовательность отсчетов $E(nT_s)$. Согласно теории цифровой обработки сигналов, спектр дискретизированного сигнала $S_d(\omega)$ становится периодической функцией с периодом $2\pi 2f_s$ и представляет собой суперпозицию сдвинутых копий исходного спектра (2):

$$S_d(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k \cdot 2\pi f_s). \quad (2)$$

Из выражения (2) следует, что если спектр $S(\omega)$ имеет ненулевые значения на частотах, превышающих частоту Найквиста $f_N = f_s / 2$, то "хвосты" спектральных копий при $k \neq 0$ накладываются на основной спектр ($k = 0$). Это перекрытие и есть эффект алиасинга. В результате высокочастотные шумы и паразитные моды трансформируются в низкочастотный диапазон, искажая полезный сигнал. Для предотвращения этого необходимо, чтобы спектр входного сигнала был строго ограничен полосой частот $[-f_N, f_N]$. В данной работе это ограничение обеспечивается применением квазиоптического антиалиасного фильтра (ААФ).

Метод матриц переноса для расчета фильтров

Для подавления высокочастотных компонент в работе предложено использование квазиоптических фильтров на основе многослойных интерференционных структур и метаповерхностей. Для расчета спектральных характеристик таких слоев сред применялся метод матриц переноса (Transfer Matrix Method, TMM), который является эффективным инструментом для анализа распространения электромагнитных волн в стратифицированных средах.

Рассмотрим структуру, состоящую из N слоев. Каждый j -й слой характеризуется толщиной d_j и комплексным показателем преломления n_j . Связь между электрическим и магнитным полями на границах j -го слоя описывается характеристической матрицей $\mathbf{M}_j$ (3):

$$\mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} \cos(\delta_j) & -\frac{i}{p_j} \sin(\delta_j) \\ -ip_j \sin(\delta_j) & \cos(\delta_j) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\delta_j = (2\pi/\lambda)n_j d_j \cos(\theta_j)$ — набег фазы в слое, λ — длина волны излучения, θ_j — угол распространения волны в слое, а p_j — характеристическая проводимость (или сопротивление) слоя, зависящая от поляризации волны (ТЕ или ТМ).

Для метаповерхностей, представляющих собой бесконечно тонкие проводящие сетки на границе раздела сред, матрица переноса модифицируется с учетом поверхностного импеданса или адмиттанса сетки. Результирующая матрица $\mathbf{M}$ всей структуры получается путем перемножения матриц отдельных слоев в порядке их следования (4):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Коэффициент пропускания по амплитуде t и энергетический коэффициент пропускания T рассчитываются через элементы результирующей матрицы $\mathbf{M}$:

$$t = \frac{2p_0}{(m_{11} + m_{12}p_s)p_0 + (m_{21} + m_{22}p_s)}, \quad (5)$$

$$T = |t|^2 \frac{\operatorname{Re}(p_s)}{\operatorname{Re}(p_0)}, \quad (6)$$

где p_0 , p_s — параметры входной и выходной сред (обычно вакуум или воздух).

Принцип субдискретизации

Метод субдискретизации является мощным инструментом для обработки сигналов, спектр кото-

рых сосредоточен в узкой полосе частот, удаленной от нуля (полосовые сигналы). В фемтосекундной спектроскопии такие сигналы возникают, например, при исследовании узкополосных резонансов или при использовании спектральной фильтрации.

Суть метода заключается в том, что дискретизация сигнала производится с частотой f_s , которая может быть значительно меньше удвоенной верхней граничной частоты спектра ($2f_{\max}$), но должна удовлетворять определенным соотношениям по ширине полосы сигнала $B = f_{\max} - f_{\min}$.

Условие корректного восстановления сигнала без наложения спектров при субдискретизации определяется неравенством (7):

$$\frac{2f_{\max}}{m} \leq f_s \leq \frac{2f_{\min}}{m-1}, \quad (7)$$

где $f_{\min}$ и $f_{\max}$ — минимальная и максимальная частоты в спектре полезного сигнала соответственно, m — целое число ($m \geq 1$), определяющее номер зоны Найквиста, в которую попадает спектр сигнала.

Был проведен анализ зависимости номера зоны Найквиста m от параметров фильтрации. Установлено, что для типичных волновых пакетов фемтосекундных лазерных систем оптимальным является выбор m в диапазоне от 3 до 7, что обеспечивает при строгом соблюдении условий теоремы отсчетов для полосовых сигналов существенное снижение требований к быстродействию тракта регистрации без риска перекрытия соседних спектральных копий (реплик) и деградации отношения сигнал/шум.

При выполнении условия (7) спектральные копии сигнала плотно упаковываются на частотной оси, не перекрывая друг друга. Это позволяет однозначно восстановить исходный аналоговый сигнал. На основе данной модели далее анализируются оптимальные значения m и f_s , обеспечивающие минимальную ошибку восстановления огибающей импульса.

Для количественной оценки качества восстановления сигнала и верификации границ применимости метода субдискретизации был введен критерий нормализованной среднеквадратичной ошибки (NRMSE), рассчитываемый по формуле (8):

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_n |E_{\text{ref}}(n) - E_{\text{rec}}(n)|^2}{\sum_n |E_{\text{ref}}(n)|^2}} \cdot 100\%, \quad (8)$$

где $E_{\text{ref}}(n)$ — отсчеты эталонного сигнала, полученного с малым шагом дискретизации (режим передискретизации), а $E_{\text{rec}}(n)$ — отсчеты сигнала,

восстановленного алгоритмически после прохождения через тракты с различными коэффициентами субдискретизации m . Данный критерий позволяет оценить совокупное влияние шумов алиасинга и неидеальности фильтрации.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Источники данных

Для верификации представленной выше теоретической модели субдискретизации (формулы (1)–(7)) и оценки границ ее применимости был проведен детальный анализ экспериментальных данных, полученных в современных системах импульсной терагерцовой спектроскопии. В качестве референтных данных для проверки метода использовались результаты исследований характеристик квазиоптических фильтров и спектров материалов, опубликованные в работах [7, 8, 11, 16].

Анализ эффективности квазиоптической фильтрации

Ключевым элементом, обеспечивающим корректность измерений в рассматриваемом методе, является использование ААФ. Согласно данным, представленным в работе [11], оптимальными характеристиками обладают многослойные интерференционные структуры на основе емкостных метаповерхностей. Конструкция таких фильтров (см. рис. 1) представляет собой пакет из нескольких (обычно 4–6) идентичных сеток, разделенных полипропиленовыми спейсерами и соединенных методом горячего прессования. Такая топология позволяет минимизировать потери полезного сигнала за счет использования материалов с низким тангенсом угла диэлектрических потерь ($\tan \delta \approx 10^{-3}$).

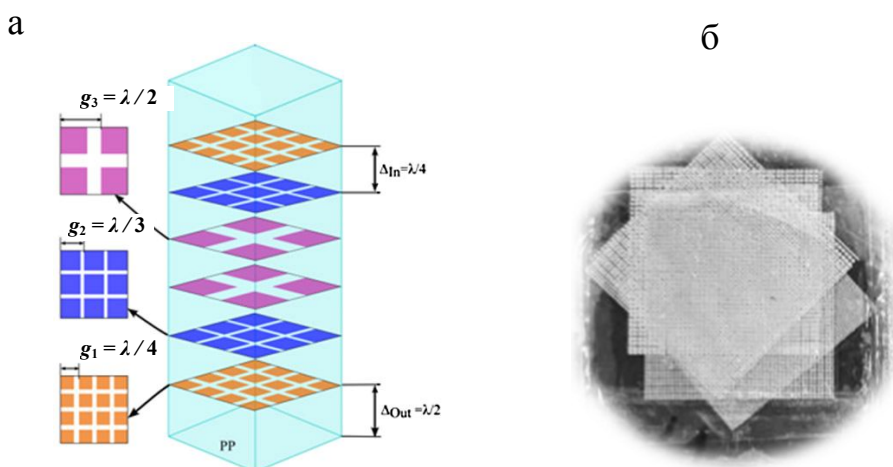


Рис. 1. Конструкция (а) и внешний вид (б) квазиоптического фильтра низких частот на основе емкостных сеток, используемого для подавления алиасинга (по данным [22])

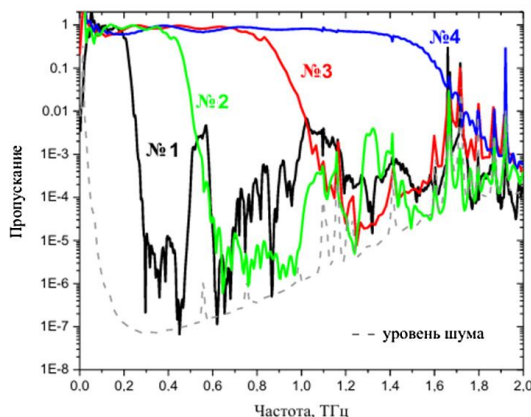


Рис. 2. Экспериментальные спектры пропускания 4 исследуемых квазиоптических фильтров низких частот, демонстрирующие эффективность подавления внеполосового излучения [11]

Анализ экспериментальных спектров пропускания (рис. 2) подтверждает, что применение каскада метаповерхностей обеспечивает формирование амплитудно-частотной характеристики с высокой крутизной ската (roll-off rate), превышающей 30 дБ/октаву. В полосе заграждения достигается уровень подавления нежелательных гармоник до $-40 \dots -50$ дБ. Это позволяет эффективно отсеять высокочастотные шумы и спектральные компоненты, лежащие выше частоты Найквиста f_N , которые, согласно уравнению (2), являются основным источником искажений (алиасинга) при цифровой обработке широкополосных сигналов.

Параметрический анализ условий субдискретизации

Для практической реализации метода субдискретизации необходимо не просто ограничение спектра сверху, но и выделение узкой спектральной полосы (bandpass filtering). В работе [16] предложена конструкция фильтра на основе эталона Фабри – Перо с сеточными рефлекторами. Численное моделирование электродинамических характеристик такой структуры (рис. 3) показывает возможность точного управления шириной полосы пропускания. Расчеты демонстрируют, что при оптимальном подборе геометрических параметров (периода решетки g и коэффициента заполнения a/g — отношения ширины металличе-

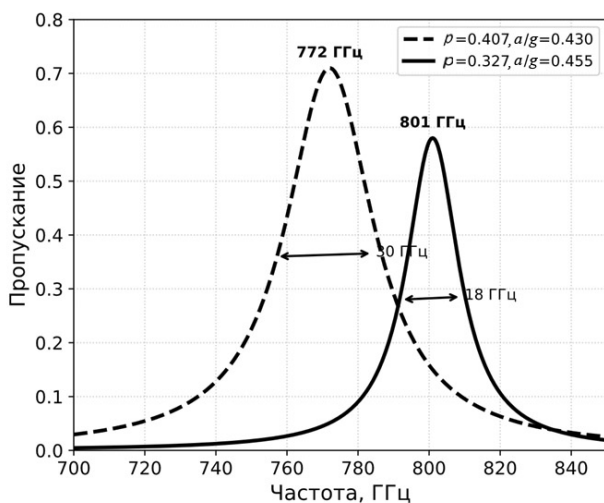


Рис. 3. Результаты численного моделирования пропускания узкополосного фильтра Фабри – Перо с параметрами, оптимизированными для реализации режима субдискретизации (адаптировано из [22]). g — период решетки, a/g — коэффициент заполнения решетки, p — масштабный коэффициент периода решетки ($g = p \cdot \lambda_0^{\max}$)

ской перемычки к периоду ячейки) удастся достичь полной ширины на полувысоте (FWHM) порядка 2–4%. Это условие является критическим для выполнения неравенства (7), т.к. позволяет "уложить" весь полезный спектр сигнала в одну зону Найквиста высокого порядка ($m > 1$) без перекрытия спектральных копий.

Сравнительный анализ восстановления сигнала

Валидация теоретического подхода была проведена путем сопоставления результатов измерения спектральных характеристик тестового образца (высокоомной кремниевой пластины). На рис. 4 приведены данные, полученные двумя различными методами:

1. Классический подход (маркеры ромбы): измерение с высокой частотой дискретизации (шаг $\Delta t = 125$ фс), соответствующей широкой полосе спектрометра.

2. Метод субдискретизации (сплошная линия): измерение с использованием разработанного узкополосного фильтра при сниженной частоте дискретизации (шаг увеличен до $\Delta t = 820$ фс).

Сравнительный анализ кривых на рис. 4 позволяет сделать следующие выводы:

- Применение фильтрации эффективно устраняет высокочастотные шумы, что подтверждается гладкостью полученных спектральных кривых в рабочей области.
- Спектр, восстановленный методом субдискретизации (сплошная кривая), с высокой точностью (погрешность менее 2.3%) совпадает

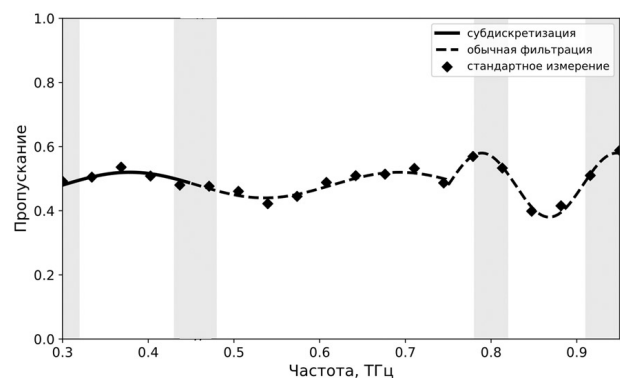


Рис. 4. Сравнение спектров пропускания кремниевой пластины, полученных различными методами.

Сплошная линия — восстановление методом субдискретизации (шаг 820 фс), пунктирная линия — обычная фильтрация (шаг 410 фс), маркеры ромбы — стандартное измерение (шаг 125 фс). Серые области соответствуют полосам пропускания используемого квазиоптического фильтра (адаптировано из [22])

с результатами, полученными классическим методом. Аналогичные результаты точности для подобных материалов приводятся также в работах [18, 19].

• Важно отметить, что использование рассматриваемого алгоритма позволило увеличить шаг дискретизации в 6.5 раз (с 125 до 820 фс) без потери информации о полезном сигнале. Это подтверждает, что условие (7) выполняется, и спектральные копии не перекрываются.

Опираясь на полученные данные и предложенную математическую модель, было проведено численное моделирование зависимости ошибки восстановления ε от порядка зоны Найквиста m .

Результаты расчета, представленные в табл., демонстрируют пределы применимости метода.

Данные таблицы показывают теоретический предел метода: при $m = 9$ (шаг > 1 пс) уровень шумов, попадающих в полосу пропускания из-за эффекта алиасинга, начинает превышать допустимый порог, вызывая резкий рост ошибки с 2.3% до 12.5%. Это подтверждает, что выбранный в эксперименте шаг 820 фс (соответствующий режиму $m \approx 6.5$) находится в допустимых пределах, не превышая теоретический порог 7-й зоны Найквиста (875 фс).

Таким образом, сопоставление теоретических расчетов с экспериментальными данными подтверждает, что предложенный комплексный подход (совместное применение антиалиасной фильтрации и субдискретизации) позволяет корректно восстанавливать амплитудно-фазовые параметры импульса при существенном снижении требований к быстродействию системы регистрации.

Табл. Расчетная зависимость погрешности восстановления при различных коэффициентах субдискретизации

Номер зоны Найквиста (m)	Эффективный шаг (Δt), фс	SNR, дБ	Расчетная погрешность (ε), %	Режим работы
1	125	60	0.8	Стандартный
3	375	58	1.1	Оптимальный
5	625	55	1.6	Допустимый
7	875	52	2.3	Предельный
9	1125	44	> 12.5	Срыв (алиасинг)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен теоретический анализ и обоснование методов повышения эффективности регистрации фемтосекундных импульсов.

1. Обосновано, что применение квазиоптических фильтров на основе многослойных метаповерхностей [14, 20, 21] является эффективным способом предотвращения эффекта наложения спектров (алиасинга), обеспечивая подавление паразитных мод на уровне 30–40 дБ.

2. На основе численного моделирования установлено, что пределом применимости метода является 7-я зона Найквиста ($m = 7$). Показано, что дальнейшее увеличение шага дискретизации приводит к падению отношения сигнал/шум ниже 50 дБ и росту погрешности восстановления выше допустимых 2.3%, несмотря на использование узкополосной фильтрации.

3. Анализом экспериментальных данных подтверждается: именно интеграция рассмотренных методов обеспечивает высокую точность измерений при возможности кратного сокращения как объема обрабатываемых данных, так и времени сканирования.

В основу разработки перспективных систем терагерцовой спектроскопии и средств неразрушающего контроля могут быть положены результаты проведенного исследования.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Mittleman D.M. Perspective: Terahertz science and technology // Journal of Applied Physics. 2017. Vol. 122, no. 23. Id. 230901. DOI: 10.1063/1.5007683
2. Huang S., Deng H., Wei X. et al. Progress in application of terahertz time-domain spectroscopy for pharmaceutical analyses // Frontiers in Bioengineering and Biotechnology. 2023. Vol. 11. Id. 1219042. DOI: 10.3389/fbioe.2023.1219042
3. Nikitkina A.I., Bikeev A.S., Gerasimov V.V. et al. Terahertz radiation and the skin: a review // Journal of Biomedical Optics. 2021. Vol. 26, no. 4. Id. 043005. DOI: 10.1117/1.JBO.26.4.043005
4. Nourinovin S., Navarro-Cía M., Rahman M.M. et al. Terahertz Metastructures for Noninvasive Biomedical Sensing and Characterization in Future Health Care // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2022. Vol. 64, no. 4. P. 19–31. DOI: 10.1109/MAP.2022.3145712
5. Стрюков Д.В., Мамрашев А.А., Анцыгин В.Д. и др. Структура, динамика решетки и диэлектрические характеристики в диапазоне 0.1–2.5 ТГц гетероэпитаксиальных пленок ниобата бария-стронция // Неорганические материалы. 2022. Т. 58, № 1. С. 61–68. DOI: 10.31857/S0002337X22010122
6. Gordon I.E., Rothman L.S., Hargreaves R.J. et al. The HITRAN2020 molecular spectroscopic database // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.

2022. Vol. 277. Id. 107949.
DOI: 10.1016/j.jqsrt.2021.107949
7. Rybak A., Antsygin V., Mamrashev A. et al. Terahertz Optical Properties of KTiOPO₄ Crystal in the Temperature Range of (–192)–150 °C // Crystals. 2021. Vol. 11, no. 2. Id. 125. DOI: 10.3390/cryst11020125
 8. Wang P., Zhao J., Zhang Y. et al. The fingerprints of nifedipine/isonicotinamide cocrystal polymorph studied by terahertz time-domain spectroscopy // International Journal of Pharmaceutics. 2022. Vol. 620. Id. 121759. DOI: 10.1016/j.ijpharm.2022.121759
 9. Cao Y., Li X., Bai J. et al. Study on Qualitative and Quantitative Detection of Pefloxacin and Fleroxacin Veterinary Drugs Based on THz-TDS Technology // Spectroscopy and Spectral Analysis. 2022. Vol. 42, no. 6. P. 1798–1803. URL: <https://www.researching.cn/articles/OJ9088063d077ee54c>
 10. Shannon C.E. Communication in the Presence of Noise // Proceedings of the IRE. 1949. Vol. 37, no. 1. P. 10–21. URL: https://fab.cba.mit.edu/classes/S62.12/docs/Shannon_noise.pdf
 11. Рыбак А.А., Николаев Н.А., Кузнецов С.А. и др. Применение емкостных микроструктур в качестве антиалиасных фильтров для задач широкополосной импульсной терагерцовой спектроскопии // Автометрия. 2020. Т. 56, № 1. С. 124–132. URL: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/e98/e98320d27bd2483b650d11bf9b6aff8.pdf>
 12. Mamrashev A., Minakov F., Nikolaev N. et al. Terahertz Time-Domain Polarimetry for Principal Optical Axes of Anisotropic Crystals // Photonics. 2021. Vol. 8, no. 6. Id. 213. DOI: 10.3390/photonics8060213
 13. Ulrich R. Effective low-pass filters for far infrared frequencies // Infrared Physics. 1967. Vol. 7, no. 2. P. 65–74. DOI: 10.1016/0020-0891(67)90008-5
 14. Althuwayb A.A., Rashid N., Elhamrawy O.I. et al. Design and performance evaluation of a novel metamaterial broadband THz filter for 6G applications // Frontiers in Materials. 2023. Vol. 10. Id. 1245685. DOI: 10.3389/fmats.2023.1245685
 15. Alibakhshikenari M., Ali E.M., Soruri M. et al. A comprehensive survey on antennas on-chip based on metamaterial, metasurface, and substrate integrated waveguide principles for millimeter-waves and terahertz integrated circuits and systems // IEEE Access. 2022. Vol. 10. P. 3668–3692. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3140156
 16. Рыбак А.А., Кузнецов С.А., Аржанников А.В. и др. Разработка узкополосного фильтра для реализации метода андерсемплинга в импульсных терагерцовых спектрометрах // Сибирский физический журнал. 2022. Т. 17, № 1. С. 78–92. DOI: 10.25205/2541-9447-2022-17-1-78-92
 17. O.K.K., Choi W., Zhu Y. et al. CMOS Platform for Everyday Applications Using Sub-Millimeter Electromagnetic Waves // IEEE Open Journal of the Solid-State Circuits Society. 2023. Vol. 3. P. 17–31. DOI: 10.1109/OJSSCS.2022.3222121
 18. Zhou S.-X., Ai L.-K., Qi M. et al. Characterization of low-resistance ohmic contacts to heavily carbon-doped n-type InGaAsBi films treated by rapid thermal annealing // Chinese Physics B. 2021. Vol. 30, no. 2. Id. 027304. DOI: 10.1088/1674-1056/abcf97
 19. Yan H., Fan W., Chen X. et al. Terahertz signatures and quantitative analysis of glucose anhydrate and monohydrate mixture // Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy. 2021. Vol. 258. Id. 119825. DOI: 10.1016/j.saa.2021.119825
 20. Cheng R., Xu L., Yu X. et al. High-sensitivity biosensor for identification of protein based on terahertz Fano resonance metasurfaces // Optics Communications. 2020. Vol. 473. Id. 125850. DOI: 10.1016/j.optcom.2020.125850
 21. Zhang Z., Zhang T., Fan F. et al. Terahertz polarization sensing of bovine serum albumin proteolysis on curved flexible metasurface // Sensors and Actuators A: Physical. 2022. Vol. 338. Id. 113499. DOI: 10.1016/j.sna.2022.113499
 22. Рыбак А.А. Развитие методов и техники фильтрации и субдискретизации в импульсной терагерцовой спектроскопии. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2023. 88 с. URL: https://www.iae.nsk.su/images/stories/4_Education/3_DisSovet/231130/Disser_final_%D0%A0%D0%AB%D0%91%D0%90%D0%9A.pdf

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург

Контакты: Петровский Александр Сергеевич,
aptrvsk@mail.ru

Материал поступил в редакцию 25.02.2026

ANALOG-TO-DIGITAL CONVERSION PROBLEMS IN MEASURING FEMTOSECOND PULSE WAVE PACKET

A. S. Petrovsky

St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, Russia

The article provides a theoretical analysis, a systematic methodological substantiation of approaches to improving the accuracy of recording wave packets of femtosecond laser pulses. This task is currently recognized as one of the highest priority for the qualitative development of pulsed terahertz spectroscopy systems in the time domain. The relevance of the study is due to the objective need to level the distortions caused by the aliasing effect, which inevitably occurs during digital processing of broadband signals in conditions of limited speed of receiving paths. The subject of the author's attention is the construction, verification of an analytical model describing the process of joint application of hardware antialias filtering based on multilayer metasurfaces and specialized undersampling algorithms. During the course of the work, the mathematical model of the sampling process was significantly refined, which made it possible to explicitly determine the boundary conditions necessary for the correct reconstruction of the pulse shape without loss of phase information. Based on the analysis of electrodynamic characteristics of quasi-optical interference structures, the author shows that the use of filters with a spectral roll-off slope of more than 30 dB/octave forms a reliable theoretical foundation for increasing the sampling time step by 6.5 times, from 125 to 820 fs. Particular attention is paid to the secondary processing of experimental data arrays, during which it is confirmed that the estimated error in the recovery of key spectral parameters in the implementation of the proposed approach does not exceed 2.3%; the final conclusion is formulated that the integration of hardware and software solutions proposed in the work makes it possible to significantly reduce the requirements for the frequency characteristics of electronics so that to provide measurement precision sufficient to solve the problems of non-destructive testing and fundamental spectroscopy of condensed matter.

Keywords: femtosecond pulses, wave packet, measurement accuracy, anti-aliasing filtration, sub-discretization, terahertz spectroscopy

REFERENCES

- Mittleman D.M. Perspective: Terahertz science and technology. *Journal of Applied Physics*, 2017, vol. 122, no. 23, Id. 230901. DOI: 10.1063/1.5007683
- Huang S., Deng H., Wei X. et al. Progress in application of terahertz time-domain spectroscopy for pharmaceutical analyses. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, 2023, vol. 11, Id. 1219042. DOI: 10.3389/fbioe.2023.1219042
- Nikitkina A.I., Bikeev A.S., Gerasimov V.V. et al. Terahertz radiation and the skin: a review. *Journal of Biomedical Optics*, 2021, vol. 26, no. 4, Id. 043005. DOI: 10.1117/1.JBO.26.4.043005
- Nourinov S., Navarro-Cía M., Rahman M.M. et al. Terahertz Metastructures for Noninvasive Biomedical Sensing and Characterization in Future Health Care. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2022, vol. 64, no. 4, pp. 19–31. DOI: 10.1109/MAP.2022.3145712
- Stryukov D.V., Mamrashev A.A., Antsygin V.D. et al. [Heteroepitaxial barium strontium niobate films: structure, lattice dynamics, and dielectric properties in the range 0.1–2.5 THz]. *Neorganicheskie materialy* [Inorganic Materials], 2022, vol. 58, no. 1, pp. 61–68. (In Russ.). DOI: 10.31857/S0002337X22010122
- Gordon I.E., Rothman L.S., Hargreaves R.J. et al. The HITRAN2020 molecular spectroscopic database. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2022, vol. 277, Id. 107949. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2021.107949
- Rybak A., Antsygin V., Mamrashev A. et al. Terahertz Optical Properties of KTiOPO4 Crystal in the Temperature Range of (–192)–150 °C. *Crystals*, 2021, vol. 11, no. 2, Id. 125. DOI: 10.3390/cryst11020125
- Wang P., Zhao J., Zhang Y. et al. The fingerprints of nifedipine/isonicotinamide cocrystal polymorph studied by terahertz time-domain spectroscopy. *International Journal of Pharmaceutics*, 2022, vol. 620, Id. 121759. DOI: 10.1016/j.ijpharm.2022.121759
- Cao Y.-y., Li X., Bai J.-p. et al. Study on Qualitative and Quantitative Detection of Pefloxacin and Fleroxacin Veterinary Drugs Based on THz-TDS Technology. *Spectroscopy and Spectral Analysis*, 2022, vol. 42, no. 6, pp. 1798–1803. URL: <https://www.researching.cn/articles/OJ9088063d077ee54c>
- Shannon C.E. Communication in the Presence of Noise. *Proceedings of the IRE*, 1949, vol. 37, no. 1, pp. 10–21. URL: https://fab.cba.mit.edu/classes/S62.12/docs/Shannon_noise.pdf
- Rybak A.A., Nikolaev N.A., Kuznetsov S.A., et al. [Application of capacitive microstructures as anti-aliasing fil-

- ters for broadband pulsed terahertz spectroscopy tasks]. *Avtometriya* [Autometry]. 2020, vol. 56, no. 1, pp. 124–132. (In Russ.). URL: <https://www.sibran.ru/upload/iblock/e98/e98320d27bd2483b650d11bf9b6aff8.pdf>
12. Mamrashev A., Minakov F., Nikolaev N. et al. Terahertz Time-Domain Polarimetry for Principal Optical Axes of Anisotropic Crystals. *Photonics*, 2021, vol. 8, no. 6, Id. 213. DOI: 10.3390/photonics8060213
 13. Ulrich R. Effective low-pass filters for far infrared frequencies. *Infrared Physics*, 1967, vol. 7, no. 2, pp. 65–74. DOI: 10.1016/0020-0891(67)90008-5
 14. Althuwayb A.A., Rashid N., Elhamrawy O.I. et al. Design and performance evaluation of a novel metamaterial broadband THz filter for 6G applications. *Frontiers in Materials*, 2023, vol. 10, Id. 1245685. DOI: 10.3389/fmats.2023.1245685
 15. Alibakhshikenari M., Ali E.M., Soruri M. et al. A comprehensive survey on antennas on-chip based on metamaterial, metasurface, and substrate integrated waveguide principles for millimeter-waves and terahertz integrated circuits and systems. *IEEE Access*, 2022, vol. 10, pp. 3668–3692. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3140156
 16. Rybak A.A., Kuznetsov S.A., Arzhannikov A.V., et al. [Design of a Narrowband Filter for Implementing the Undersampling Method in Terahertz Time-Domain Spectrometers]. *Sibirskii fizicheskii zhurnal* [Siberian journal of physics], 2022, vol. 17, no. 1, pp. 78–92. (In Russ.). DOI: 10.25205/2541-9447-2022-17-1-78-92
 17. O K.K., Choi W., Zhu Y. et al. CMOS Platform for Everyday Applications Using Sub-Millimeter Electromagnetic Waves. *IEEE Open Journal of the Solid-State Circuits So-*
 - ciety*, 2023, vol. 3, pp. 17–31. DOI: 10.1109/OJSSCS.2022.3222121
 18. Zhou S.-X., Ai L.-K., Qi M. et al. Characterization of low-resistance ohmic contacts to heavily carbon-doped n-type InGaAsBi films treated by rapid thermal annealing. *Chinese Physics B*, 2021, vol. 30, no. 2, Id. 027304. DOI: 10.1088/1674-1056/abcf97
 19. Yan H., Fan W., Chen X. et al. Terahertz signatures and quantitative analysis of glucose anhydrate and monohydrate mixture. *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy*, 2021, vol. 258, Id. 119825. DOI: 10.1016/j.saa.2021.119825
 20. Cheng R., Xu L., Yu X. et al. High-sensitivity biosensor for identification of protein based on terahertz Fano resonance metasurfaces. *Optics Communications*, 2020, vol. 473, Id. 125850. DOI: 10.1016/j.optcom.2020.125850
 21. Zhang Z., Zhang T., Fan F. et al. Terahertz polarization sensing of bovine serum albumin proteolysis on curved flexible metasurface. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2022, vol. 338, Id. 113499. DOI: 10.1016/j.sna.2022.113499
 22. Rybak A.A. *Razvitie metodov i tekhniki fil'trazii i subdiskretizatsii v impul'snoy teragerzovoy spektroskopii* [Development of filtration methods and techniques and subsampling in pulse terahertz spectroscopy]. Dis.... cand. phys.-mat. sciences. Novosibirsk, 2023. 88 p. URL: https://www.iae.nsk.su/images/stories/4_Education/3_DisSov et/231130/Disser_final_%D0%A0%D0%AB%D0%91%D0%90%D0%9A.pdf

Contacts: *Petrovsky AlexanderSergeevich*,
aptrvsk@mail.ru

Article received by the editorial office on 25.02.2026

INTRODUCTION

The rapid development of laser technologies in recent decades has led to the creation of reliable sources of ultrashort femtosecond light pulses. This, in turn, has opened fundamentally new horizons in the study of ultrafast processes in matter, ushering in the era of femtosecond spectroscopy and pulsed terahertz (THz) time-domain spectroscopy (THz-TDS) [1, 2]. These methods have become indispensable tools in condensed matter physics, the chemistry of fast processes, molecular biology, and modern materials science. The ability to generate and coherently detect electromagnetic radiation in the THz range enables real-time observation of the dynamics of chemical reactions, vibrational-rotational transitions of molecules, phonon modes in crystals, and the motion of charge carriers in semiconductor nanostructures [3–5].

A critical aspect of any spectroscopic system is the accuracy of measurement of the parameters of the recorded wave packets — their time shape $E(t)$, duration, phase, and spectral composition. In pulsed THz spectroscopy systems, the time profile of the pulse's electric field is typically recorded using electro-optical stroboscopic detection or photoconductive antennas. The resulting analog signal carries comprehensive information about the properties of the object being studied through which the pulse passed [6–9].

However, achieving extremely high measurement accuracy and expanding the dynamic range of spectrometers faces a number of fundamental and technical challenges. One of the central issues is the process of sampling the analog signal received from the detector and its subsequent digital processing. The spectrum of a femtosecond pulse is extremely broad, extending from hundreds of gigahertz to tens of terahertz. According to the fundamental Whittaker – Kotelnikov – Shannon sampling theorem [10], to uniquely reconstruct a continuous signal, it must be sampled at a frequency f_s , that is at least twice the maximum frequency $f_{\max}$ in its spectrum ($f_s \geq 2f_{\max}$).

In modern THz-TDS systems, particularly those using fast delay lines or asynchronous optical sampling (ASOPS) circuits, the spectrum of the recorded signal may contain high-frequency noise or useful components extending beyond the Nyquist frequency of the analog-to-digital converter (ADC). Violation of the sampling theorem condition leads to aliasing — a phenomenon in which high-frequency signal components are falsely mapped to the low-frequency region of the spectrum. This leads to irreversible distortions of the recorded waveform, the appearance of false spectral lines, and a significant reduction in the signal-to-noise ratio [11, 12].

Standard methods for combating aliasing involve the use of electronic low-pass filters in front of the ADC. However, for broadband pulsed signals, imple-

menting electronic filters with a linear phase response (necessary to preserve the pulse shape) and a steep frequency rolloff is a complex engineering challenge. Any dispersion in the filter will lead to pulse spreading over time, which is unacceptable for precision measurements.

An alternative and more promising approach is the use of quasi-optical filters installed directly in the spectrometer's optical path in front of the detector [13–15]. Such filters, based on frequency-selective surfaces (metasurfaces), can effectively reject parasitic high-frequency radiation before detection, without introducing significant phase distortions in the operating frequency range. Furthermore, the use of under-sampling methods reduces the performance requirements of electronics while maintaining the information content of the signal if its spectrum is localized within a specific frequency band [16, 17].

PROBLEM TO BE SOLVED

Despite the existence of experimental developments in the field of THz filtering [11, 16], a unified analytical justification for the optimal choice of sampling parameters when using steep filters and under-sampling algorithms in combination remains lacking. This work aims to fill this gap by developing a calculation algorithm.

The goal of this work is to theoretically analyze and justify the effectiveness of the combined use of antialias filtering and undersampling techniques to improve the measurement accuracy of femtosecond pulse wave packets.

MATERIALS AND METHODS USED

Mathematical model of the aliasing effect

To correctly describe the signal distortion process, it is necessary to consider a mathematical model of sampling. Let the original wave packet of a femtosecond pulse be described by a continuous function of time $E(t)$. Its spectral density $S(\omega)$ is determined by the Fourier transform (1):

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

During digital recording, the signal $E(t)$ is sampled with a time step of $\Delta t = T_s$, which corresponds to a sampling frequency of $f_s = 1 / T_s$. The resulting sample sequence is $E(nT_s)$. According to digital signal processing theory, the spectrum of the sampled signal $S_d(\omega)$ becomes a periodic function with a period of $2\pi 2\pi f$ and represents a superposition of shifted copies of the original spectrum (2):

$$S_d(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k \cdot 2\pi f_s). \quad (2)$$

From expression (2), it follows that if the spectrum $S(\omega)$ has nonzero values at frequencies exceeding the Nyquist frequency $f_N = f_s / 2$, then the "tails" of the spectral copies at $k \neq 0$ overlap with the main spectrum ($k = 0$). This overlap is the aliasing effect. As a result, high-frequency noise and spurious modes are transformed into the low-frequency range, distorting the useful signal. To prevent this, the input signal spectrum must be strictly limited to the frequency band $[-f_N, f_N]$. In this work, this limitation is achieved by using a quasi-optical anti-alias filter (AAF).

Transfer matrix method for filter calculation

To suppress high-frequency components, this paper proposes the use of quasi-optical filters based on multilayer interference structures and metasurfaces. To calculate the spectral characteristics of such layered media, we used the Transfer Matrix Method (TMM), which is an effective tool for analyzing electromagnetic wave propagation in stratified media.

Let's consider a structure consisting of N layers. Each j -th layer is characterized by a thickness d_j and a complex refractive index n_j . The relationship between the electric and magnetic fields at the boundaries of the j -th layer is described by the characteristic matrix $\mathbf{M}_j$ (3):

$$\mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} \cos(\delta_j) & -\frac{i}{p_j} \sin(\delta_j) \\ -ip_j \sin(\delta_j) & \cos(\delta_j) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

where $\delta_j = (2\pi/\lambda)n_j d_j \cos(\theta_j)$ is the phase incursion in the layer, λ is the radiation wavelength, θ_j is the wave propagation angle in the layer, and p_j is the characteristic conductivity (or resistance) of the layer, depending on the wave polarization (TE or TM).

For metasurfaces, which are infinitely thin conductive networks at the interface between media, the transfer matrix is modified to account for the surface impedance or admittance of the network. The resulting matrix $\mathbf{M}$ of the entire structure is obtained by multiplying the matrices of the individual layers in their order (4):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

The amplitude transmittance t and the energy transmittance T are calculated using the elements of the resulting matrix $\mathbf{M}$:

$$t = \frac{2p_0}{(m_{11} + m_{12}p_s)p_0 + (m_{21} + m_{22}p_s)}, \quad (5)$$

$$T = |t|^2 \frac{\text{Re}(p_s)}{\text{Re}(p_0)}, \quad (6)$$

where p_0, p_s are the parameters of the input and output media (usually vacuum or air).

Undersampling principle

The undersampling method is a powerful tool for processing signals whose spectrum is concentrated in a narrow frequency band far from zero (bandpass signals). In femtosecond spectroscopy, such signals arise, for example, when studying narrow-band resonances or when using spectral filtering.

The essence of the method is that signal sampling is performed at a frequency f_s , which can be significantly less than twice the upper limit frequency of the spectrum ($2f_{\max}$), but must satisfy certain ratios for the signal bandwidth $B = f_{\max} - f_{\min}$.

The condition for correct signal reconstruction without spectral aliasing during undersampling is determined by inequality (7):

$$\frac{2f_{\max}}{m} \leq f_s \leq \frac{2f_{\min}}{m-1}, \quad (7)$$

where $f_{\min}$ and $f_{\max}$ are the minimum and maximum frequencies in the spectrum of the useful signal, respectively, and m is an integer ($m \geq 1$) determining the number of the Nyquist zone into which the signal spectrum falls.

An analysis was conducted of the dependence of the Nyquist zone number m on the filtering parameters. It has been established that the optimal choice of m for typical wave packets of femtosecond laser systems is in the range from 3 to 7. This, while strictly observing the conditions of the sampling theorem for bandpass signals, significantly reduces the requirements for the recording path speed without the risk of overlapping adjacent spectral copies (replicas) and degradation of the signal-to-noise ratio.

When condition (7) is satisfied, the spectral copies of the signal are densely packed along the frequency axis, without overlapping. This allows for the unambiguous reconstruction of the original analog signal. Based on this model, the optimal values of m and f_s are further analyzed, ensuring minimal error in pulse envelope reconstruction.

To quantitatively assess the quality of signal recovery and verify the applicability limits of the undersampling method, a normalized root-mean-square error (NRMSE) criterion was entered and calculated using formula (8):

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_n |E_{\text{ref}}(n) - E_{\text{rec}}(n)|^2}{\sum_n |E_{\text{ref}}(n)|^2}} \cdot 100\%, \quad (8)$$

where $E_{\text{ref}}(n)$ is the reference signal sample obtained with a small sampling step (resampling mode), and $E_{\text{rec}}(n)$ is the signal sample reconstructed algorithmically after passing through paths with various undersampling factors m . This criterion allows one to assess the combined impact of aliasing noise and filtering imperfections.

RESULTS AND DISCUSSION

Data sources

To verify the above-presented theoretical undersampling model (formulas (1)–(7)) and assess the applicability limits, a detailed analysis of experimental data obtained in modern pulsed terahertz spectroscopy systems was conducted. The results of studies on the characteristics of quasi-optical filters and material spectra published in [7, 8, 11, 16] were used as reference data for verifying the method.

Analysis of the efficiency of quasi-optical filtering

The key element ensuring the accuracy of measurements in the method under consideration is the use of AAF. According to the data presented in [11], multilayer interference structures based on capacitive metasurfaces exhibit optimal characteristics. The design of such filters (see Fig. 1) is a stack of several (usually 4–6) identical grids separated by polypropylene spacers and joined by hot pressing. This topology minimizes signal loss by using materials with a low dielectric loss tangent ($\tan \delta \approx 10^{-3}$).

Fig. 1. Design (a) and appearance (б) of a quasi-optical low-pass filter based on capacitive grids used to suppress aliasing (according to [22])

An analysis of the experimental transmission spectra (Fig. 2) confirms that the use of a cascade of metasurfaces produces a frequency response with a high roll-off rate exceeding 30 dB/octave. In the stopband, a level of unwanted harmonic suppression of up to –40...–50 dB is achieved. This effectively rejects high-frequency noise and spectral components above the Nyquist frequency f_N , which, according to equation (2), are the main source of distortion (aliasing) in the digital processing of wideband signals.

Fig. 2. Experimental transmission spectra of 4 studied quasi-optical low-pass filters demonstrating the efficiency of out-of-band radiation suppression [11]

Parametric analysis of undersampling conditions

For the practical implementation of the undersampling method, it is necessary not only to limit the spectrum from above but also to select a narrow spectral band (bandpass filtering). In [16], a filter design based on a Fabry – Perot etalon with grid reflectors is proposed. Numerical modeling of the electrodynamic characteristics of such a structure (Fig. 3) demonstrates the possibility of precise bandwidth control. Calculations demonstrate that it is possible to achieve a full width at half maximum (FWHM) of about 2–4% due to optimal selection of geometric parameters (grating period g and fill factor a/g — the ratio of the width of the metal bridge to the cell period). This condition is critical for satisfying inequality (7), since it allows the entire useful signal spectrum to be "fitted" into a single high-order Nyquist zone ($m > 1$) without overlapping spectral copies.

Fig. 3. Results of numerical simulation of the transmission of a narrow-band Fabry – Perot filter with parameters optimized for the implementation of the subsampling mode (adapted from [22]). g is the grating period, a/g is the grating fill factor, p is the grating period scale factor ($g = p \cdot \lambda_0^{\text{max}}$)

Comparative analysis of signal reconstruction

Validation of the theoretical approach was carried out by comparing the results of measuring the spectral characteristics of a test sample (a high-resistance silicon wafer). Figure 4 shows data obtained by two different methods:

1. The classical approach (diamond markers): measurement at a high sampling rate (step $\Delta t = 125$ fs), corresponding to the wide bandwidth of the spectrometer.
2. The undersampling method (solid line): measurement using the developed narrow-band filter at a reduced sampling rate (step increased to $\Delta t = 820$ fs).

Fig. 4. Comparison of silicon wafer transmission spectra obtained by different methods. The solid line represents reconstruction by undersampling (820 fs step), the dashed line represents conventional filtering (410 fs step), and the diamond markers represent standard measurement (125 fs step). The gray areas correspond to the passbands of the quasi-optical filter used (adapted from [22])

A comparative analysis of the curves in Fig. 4 allows us to draw the following conclusions:

- The use of filtering effectively eliminates high-frequency noise, which is confirmed by the smoothness of the obtained spectral curves in the working region.

- The spectrum reconstructed by the undersampling method (blue curve) coincides with the results obtained by the classical method with high accuracy (error less than 2.3%). Similar accuracy results for similar materials are also given in [18, 19].

- It is important to note that the use of the algorithm under consideration allowed us to increase the sampling step by 6.5 times (from 125 to 820 fs) without losing information about the useful signal. This confirms that condition (7) is satisfied, and the spectral copies do not overlap.

Based on the obtained data and the proposed mathematical model, we numerically simulated the dependence of the reconstruction error ε on the Nyquist zone order m .

The calculation results presented in the Tab. demonstrate the limits of applicability of the method.

Tab. Calculated dependence of the reconstruction error for different subsampling coefficients

The data in the table show the theoretical limit of the method: at $m = 9$ (step > 1 ps), the noise level falling within the passband due to aliasing begins to exceed the permissible threshold, causing a sharp increase in the error from 2.3% to 12.5%. This confirms that the 820 fs step chosen in the experiment (corresponding to the $m \approx 6.5$ mode) is within acceptable

limits, not exceeding the theoretical threshold of the 7th Nyquist zone (875 fs).

Thus, a comparison of theoretical calculations with experimental data confirms that the proposed integrated approach (the combined use of antialias filtering and undersampling) allows for the correct reconstruction of the pulse amplitude-phase parameters while significantly reducing the requirements for the recording system performance.

CONCLUSION

This paper presents a theoretical analysis and justification of methods for increasing the efficiency of femtosecond pulse recording.

1. It is demonstrated that the use of quasi-optical filters based on multilayer metasurfaces [14, 20, 21] is an effective way to prevent spectral aliasing, providing suppression of parasitic modes at a level of 30–40 dB.

2. Based on numerical simulations, it was established that the method's applicability limit is the 7th Nyquist zone ($m = 7$). It was shown that further increasing the sampling step leads to a drop in the signal-to-noise ratio below 50 dB and an increase in the reconstruction error above the permissible 2.3%, despite the use of narrowband filtering.

3. Analysis of experimental data confirms that the integration of the considered methods ensures high measurement accuracy while significantly reducing both the volume of processed data and scanning time.

The results of this study can form the basis for the development of promising terahertz spectroscopy systems and non-destructive testing tools.