

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 681.586.4+544.638.2+004.94

EDN: PYNUNZ

© Б. П. Шарфарец, В. Е. Курочкин, 2025

ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЖИДКОСТНОГО И ВОЗДУШНОГО ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ. СЛУЧАЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Настоящая работа продолжает серию модельных экспериментов на вычислительном пакете, позволяющих провести прогноз сравнительной эффективности электрокинетических звуковых излучателей в жидкой и воздушной средах. Ранее такой прогноз был осуществлен авторами для условия наличия в среде только вязких потерь. В настоящей работе осуществлена попытка получения сравнительной эффективности электрокинетических излучателей в жидкой и воздушной средах на вычислительном пакете COMSOL Multiphysics при наличии в них не только вязких, но и тепловых потерь. В результате проведенных численных экспериментов выявлено незначительное влияние учета тепловых потерь на точность вычислений. Этот факт может значительно ускорить проведение сложных модельных экспериментов на пакете COMSOL Multiphysics.

Ключевые слова: электрокинетические излучатели, вязкая жидкость, несжимаемая теплопроводная жидкость

ВВЕДЕНИЕ

Ранее в работе [1] рассматривалась модельная оценка сравнительной эффективности электрокинетического излучателя в воде и в воздухе при учете только вязких потерь в среде без учета тепловых потерь. В настоящей работе производится модельная оценка сравнительной эффективности электрокинетического излучателя в воде и воздухе при учете не только вязких, но и тепловых потерь в процессе электрокинетического преобразования. При этом, следуя [2, 3], применяется система уравнений гидродинамики для условий вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Ввиду сложности проведения натурных экспериментов описывается модельный эксперимент по определению сравнительной эффективности электроосмотического излучателя в воде и в воздухе в условиях учета вязких и тепловых потерь. Модельный эксперимент осуществляется на вычислительном пакете COMSOL Multiphysics. Для этого используется система уравнений Навье – Стокса для вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости. В качестве источника тепловой энергии рассматривается джоулев нагрев жидкости, вызванный протеканием электрического тока в капиллярной жидкости.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Рассматриваемая в работе тематика относится к компетенции достаточно молодой области физики — *электрогидродинамики* (ЭГД). Согласно [4, с. 653], в средах с очень малой электропроводностью и без приложенного извне большого магнитного поля при скоростях движения жидкости, много меньших скорости света, определяющим во взаимодействии электромагнитного поля со средой является не магнитное, а электрическое поле. Электрическое поле в ЭГД описывается законами электростатики, а его воздействие на среду — электрической частью силы Лоренца $\rho_e \mathbf{E}$, где ρ_e — плотность электрического заряда в среде, а $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля. Электрический ток определяется при этом не только самостоятельным движением зарядов, но и конвективным переносом заряда жидкостью $\rho_e \mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ — скорость течения жидкости) и током смещения. Уравнениям электрогидродинамики (ЭГД) посвящено достаточно много публикаций (отнюдь не полный их перечень приведен в работе [5]). Далее приведем систему уравнений ЭГД, выписанную в [5], с необходимыми комментариями, связанными с моделированием процессов на вычислительном пакете COMSOL.

Первыми рассмотрим гидродинамические уравнения: сохранения импульса (уравнение Навье – Стокса) и уравнение непрерывности. В общем

случае сжимаемой вязкой жидкости, согласно [2, с. 73], уравнение Навье – Стокса (сохранения импульса) и уравнение непрерывности [2, с. 18] имеют соответственно вид

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2)$$

При определенных условиях жидкость можно считать несжимаемой, что приводит к упрощению системы уравнений Навье – Стокса и уравнения непрерывности, которые в случае однородной жидкости сводятся соответственно к виду [2, с. 73] и [2, с. 37]:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (3)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

В (1)–(4) приняты обозначения: $\mathbf{v}$ — поле скоростей жидкости; p — поле давления в жидкости; $\eta = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ — сдвиговая и объемная вязкости жидкости соответственно (для упрощения расчетов принимается допущение о постоянстве этих величин); $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E}$ — объемная ponderomotive сила (сила Лоренца в данном случае для однородной среды), действующая на единицу объема жидкости и характерная для электроосмотических задач; $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ — напряженность электрического поля, приложенная к торцам расположенного вдоль вертикальной оси Oz наполненного жидкостью капилляра длиной l ; ρ_e — плотность электрического заряда в жидкости (электрический заряд единицы объема жидкости). Кроме того, в случае (1), (2) ρ — поле плотности среды, в общем случае $\rho \neq \text{const}$, а в случае (3)–(4) поле плотности среды постоянно $\rho = \text{const}$.

УРАВНЕНИЕ НАВЬЕ – СТОКСА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КАПИЛЛЯРА ДЛЯ ПОСТОЯННОЙ И ПЕРЕМЕННОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ СРЕДЫ

При моделировании электрокинетических процессов большое применение получила такая простая модель пористой среды, как одиночный тонкий цилиндрический капилляр, наполненный жидкостью. При большом электрокинетическом ра-

диусе капилляра $R = r_0 / \lambda_D$ (r_0 — радиус капилляра; λ_D — толщина двойного электрического слоя) в цилиндрическом капилляре электроосмотическое течение имеет практически поршневой характер. Так, согласно [6], [7, с. 162], уже при величине электрокинетического радиуса $R \geq 100$ электроосмотическое течение принимает практически поршневой (одномерный) характер, т.е. амплитуды скоростей и давлений сохраняют постоянное значение в поперечном сечении капилляра. Поэтому далее будем пользоваться одномерными уравнениями Навье – Стокса в более простой цилиндрической системе координат.

Кроме того, ниже будет показана возможность описания поведения жидкости в электрокинетических процессах гидродинамическими уравнениями для вязкой несжимаемой жидкости в достаточно широких частотных пределах.

Запишем уравнение Навье – Стокса (3) и (4) применительно к цилиндрическому капилляру, заполненному несжимаемой вязкой жидкостью, в случае одномерного течения. Для несжимаемой жидкости в случае электроосмотического течения вдоль цилиндрического капилляра с осью, ориентированной вдоль оси Oz , имеющего постоянную скорость $\mathbf{v}_0 = (0, 0, v_0)$ и переменную скорость $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$, а также поле переменного давления p , единственная отличная от нуля z -составляющая уравнения Навье – Стокса имеет вид (см. [2, с. 76], [8, с. 395] и др.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + (v_z + v_0) \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho_e E_z / \rho. \end{aligned} \quad (3a)$$

Кроме того, должно выполняться уравнение непрерывности, которое в данном случае имеет вид [2, с. 76]

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (4a)$$

В (3a) $E_z \neq 0$ — вертикальная составляющая напряженности электрического поля $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$.

Далее рассмотрим пределы возможности использования модели несжимаемой вязкой жидкости для электроосмотических процессов. Согласно [2, с. 41], жидкость при стационарном ее течении можно считать несжимаемой при условии, что ва-

риации плотности среды малы: $\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$, что равносильно условию $|\mathbf{v}| \ll c$, где $|\mathbf{v}|$ — амплитуда вектора скорости жидкости; c — скорость звука в жидкости. Кроме того, в нестационарном режиме движения жидкости необходимо выполнение еще одного условия [2, с. 42]:

$$\tau \gg \frac{l}{c},$$

где τ и l — величины порядка промежутков времени и расстояний, на которых скорость жидкости и промежутки времени соответственно испытывают заметное изменение.

Согласно результатам работы [3], система уравнений гидродинамики для несжимаемой жидкости (3), (4) адекватно описывает гидродинамику процессов в электрокинетических преобразователях соответственно до частот $f \leq 100$ кГц в воде и $f \leq 20$ кГц в воздухе.

Далее рассмотрим уравнения теплопроводности также для обоих случаев: сжимаемой и несжимаемой жидкости.

В случае сжимаемой жидкости это уравнение имеет вид [2, с. 273]

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right] = \nabla (\kappa \nabla T) + \frac{\eta}{2} \times \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)^2 + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \quad (5)$$

Здесь T — поле температур в жидкости; s — энтропия единицы массы жидкости; κ — коэффициент теплопроводности.

В случае несжимаемой жидкости уравнение теплопроводности преобразуется к виду [2, с. 277]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \\ &= \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \times \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + w / \rho c_p, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\nu = \eta / \rho$ — кинематическая вязкость, а вместо коэффициента теплопроводности κ введена температуропроводность $\chi = \kappa / \rho c_p$; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

В уравнении (6), в отличие от [2, уравнение (50.2)], справа добавлена плотность теплового источника w — теплота, выделенная источником в единицу времени в единице объема жидкости (см. также [9, с. 25, 26]), $[w] = \text{Вт/м}^3$. Рассмотрим

случай, когда такой тепловой источник порождается процессом прохождения через электролит электрического тока. В данном случае воспользуемся законом Джоуля – Ленца о выделении тепла при прохождении тока. Мощность выделения тепла w (тепла, выделяемого в единице объема среды в единицу времени) при протекании электрического тока пропорциональна произведению плотности электрического тока $\mathbf{j}$ на величину напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ [10, с. 604, 605]. Математически это записывается так:

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (7)$$

Для того, чтобы в уравнениях движения неравномерно нагретой жидкости можно было считать плотность постоянной, необходимо, помимо малости отношения скорости жидкости к скорости звука $|\mathbf{v}| \ll c$, чтобы имеющиеся в жидкости разности температур были достаточно малы (речь идет именно об абсолютных значениях разности температур, а не о градиенте температуры). В этом случае жидкость можно считать несжимаемой. Считая разности температур малыми, можно пренебречь также и температурной зависимостью величин η , κ и c_p , т.е. уравнение теплопроводности может быть записано в виде (6) [2, с. 277].

Таким образом, при принятых выше допущениях гидродинамическая часть уравнений, описывающих исследуемый процесс, может быть записана в виде уравнений Навье – Стокса для несжимаемой жидкости (3), (4) либо (3а), (4а), а уравнение теплопроводности может быть записано в виде (6).

О ПЛОТНОСТИ ТОКА В ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ

В электроосмотическом процессе при вычислении плотности электрического тока $\mathbf{j}$ в заполненных жидкостью тонких капиллярах и диафрагмах необходимо учитывать некоторые особенности электропроводности в них, в отличие от электропроводности в свободной жидкости (см., например, [11, гл. 5]; [12, с. 211–214]). Это связано с повышением концентрации ионов около поверхностей раздела жидкость – твердое тело вследствие образования двойного электрического слоя (ДЭС). Вследствие адсорбции ионов суммарная концентрация их в подвижной части ДЭС превышает таковую в окружающем свободном растворе. Избыток противоионов в ДЭС превышает по абсолютной величине недостаток коионов. В этом случае возникает дополнительная электропроводность σ_s , обусловленная поверхностным избытком ионов и называемая поверхностной проводимостью.

Отметим [12, с. 211], что величина σ_s здесь отнюдь не является удельной проводимостью поверхностного слоя, а представляет собой избыток объемной проводимости жидкости σ в пористой среде, усредненный, как бы "размазанный" по всему объему капилляра. Таким образом, удельная электропроводность порового раствора σ является суммой объемной электропроводности σ_v и поверхностной электропроводности σ_s : $\sigma = \sigma_v + \sigma_s$.

В работе [11, с. 26] тем не менее отмечено, что при выполнении условия¹ (8)

$$\text{Rel} = \frac{\sigma_s}{\sigma_v} \ll 1 \quad (8)$$

поверхностная проводимость оказывает слабое влияние на электрокинетические явления. А для случая капилляров постоянного сечения поправкой (8) исчерпывается влияние поверхностной проводимости на электрокинетические явления и, в частности, на электроосмос.

Поскольку далее при проведении модельных экспериментов радиус капилляра, наполненного жидкостью, в котором осуществляется моделирование электроосмотического процесса, будет значительно больше толщины ДЭС (иными словами, принимается допущение о большой величине безразмерного электрокинетического радиуса капилляра $R = r_0 / \lambda_D$), то жидкость, текущая по капилляру, будет иметь удельную электропроводность σ , близкую к σ_v , и поверхностной проводимостью можно пренебречь.

О ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА w

Мощность w выделения тепла (7) в капилляре вычисляется так:

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}{\sigma_v} = \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_v} = \sigma_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \sigma_v |\mathbf{E}|^2. \quad (9)$$

На электроды мембраны электрокинетического излучателя обычно подается смесь $U_0 + u_1$ постоянного напряжения $U_0 = \text{const}$ и переменного синусоидального напряжения $u_1 = u_0 e^{i\omega t}$ (здесь $u_0 = \text{const}$ — амплитуда переменного напряжения u_1). В случае гармонического переменного напря-

жения в (9) нужно учитывать действующие значения электрического поля, в случае постоянного напряжения в (9) учитывается величина постоянного напряжения. Тогда (9) после осреднения по периоду колебаний переписывается так: $\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_1$, где $\bar{w}_0$ и $\bar{w}_1$ равны соответственно

$$\bar{w}_0 = \sigma_v |\mathbf{E}_0|^2 = \sigma_v (U_0 / l)^2$$

и

$$\bar{w}_1 = \sigma_v \overline{|\mathbf{E}_1|^2} = \sigma_v \overline{(u_1 / l)^2} = \sigma_v (u_0 / l)^2 / 2.$$

Здесь l — толщина мембраны (равная длине капилляра) электрокинетического излучателя. Окончательно для (9) имеем

$$\bar{w} = \frac{\sigma_v}{l^2} [U_0^2 + u_0^2 / 2]. \quad (10)$$

Тогда с учетом (10) уравнение (6) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \\ = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\sigma_v}{\rho c_p l^2} [U_0^2 + u_0^2 / 2]. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, выше показано, что система уравнений для описания гидродинамических процессов и процессов, связанных с теплопереносом в жидкости применительно к моделированию электрокинетического излучателя при подаче на него постоянного напряжения накачки U_0 и переменного напряжения амплитудой u_0 , может быть ограничена гидродинамической системой уравнений (3), (4) в общем случае или (3а), (4а) в случае цилиндрической системы координат с источником $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E}$ в (3) и уравнением сохранения энергии (11) с источником $\frac{\sigma_v}{\rho c_p l^2} [U_0^2 + u_0^2 / 2]$.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА

В качестве физической модели процесса предлагается однородный стеклянный цилиндрический капилляр длиной l с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом $r_0 + \Delta r$, где Δr — толщина стенки капилляра. Ось капилляра ориентирована вдоль оси Oz и имеет координаты по оси $z \in [0, l]$. Внутри капилляр заполнен одной из выбранных для экспериментов однородных сред (воздухом либо водой). Сам капилляр помещен в безгранич-

¹ В настоящее время безразмерный параметр Rel получил общепризнанное название "число Духина" Du в честь одного из соавторов работы [12], предложившего этот критерий подобия.

ную однородную среду, идентичную среде, заполняющей капилляр. К торцам капилляра приложено совокупное электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_{0z})$ — напряженность приложенного к торцам капилляра вертикально ориентированного постоянного электрического поля; $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ — напряженность приложенного к торцам капилляра вертикально ориентированного переменного электрического поля.

В качестве математической модели процессов в жидкости принимается система уравнений Навье – Стокса (3а), (4а) в цилиндрической системе координат, а также уравнение теплопроводности в жидкости (11).

Далее для получения замкнутого решения задач (3а), (4а) и (11) и стыковки краевых условий на внешней границе капилляра понадобится уравнение теплопроводности в стеклянной оболочке цилиндрического капилляра, а именно в области $r \in [r_0, r_0 + \Delta r]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, l]$. Это уравнение имеет вид [13, с. 55]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (12)$$

где $a = \lambda_g / (\rho_g c_g)$ — коэффициент температуропроводности стекла; λ_g — коэффициент теплопроводности стекла; c_g — теплоемкость стекла; ρ_g — плотность стекла.

Для решения системы уравнений (11), (12) необходимо поставить граничные условия на границах стеклянной оболочки с жидкостью, находящейся как внутри, так и снаружи капилляра. Здесь сошлемся на работы [13, с. 30], [14, с. 28]. Согласно, например, [14, с. 28], в рассматриваемом в настоящей работе случае имеет место граничное условие четвертого рода, справедливое либо при обтекании твердого тела жидкостью (в рассматриваемой задаче обтекание жидкостью внутренних стенок капилляра), либо при конвективном теплообмене тела с жидкостью (в рассматриваемой задаче — конвективный теплообмен на внешних границах капилляра с окружающей его извне жидкостью). Это граничное условие сводится к неразрывности температур и тепловых потоков на границах раздела.

Таким образом, на внутренней границе стеклянного капилляра $r = r_0$, $z \in [0, l]$ (обтекание жидкостью внутренней поверхности капилляра), а также на внешней боковой поверхности капилляра $r = r_0 + \Delta r$, $z \in [0, l]$ и на торцах кольцевого капилляра, также контактирующих с окружающей средой

$(r, z) \in [(r_0, r_0 + \Delta r), z = 0]$ и $(r, z) \in [(r_0, r_0 + \Delta r), z = l]$ (свободная конвекция), ставятся краевые условия четвертого рода, сводящиеся к одновременному заданию равенства температур

$$T_{\text{среды}}(t) = T_s(t) \quad (13)$$

и тепловых потоков

$$-\lambda_{\text{среды}} \left(\frac{\partial T_{\text{среды}}}{\partial n} \right) = -\lambda_g \left(\frac{\partial T_s}{\partial n} \right) \quad (14)$$

на всех границах между окружающей и внутренней жидкостью со стеклянными стенками капилляра (см. [13, с. 30], [14, с. 28]).

Здесь $T_{\text{среды}}$ — температура окружающей среды, T_s — температура жидкости внутри капилляра на границе со стеклом; $\lambda_{\text{среды}}$ и λ_g — соответственно коэффициенты теплопроводности среды и стекла; n — нормали к соответствующим поверхностям.

Замечание. Отметим, что уравнения гидродинамики для вязкой жидкости и уравнение теплопроводности учитывают различные потери. Так, уравнение Навье – Стокса учитывает вязкие потери, а именно диссипацию энергии, вызываемую вязким трением и превращающую в тепловую энергию.

Уравнение теплопроводности в рассматриваемой задаче учитывает прежде всего характерный для нее источник потерь — джоулев нагрев, который вызывается возникающим в электролите электрическим током (см. источник в правой части уравнения (11)). Кроме того, при решении уравнения теплопроводности учитываются потери энергии, связанные с конвекцией на границах с окружающей средой (отметим, что вопросы диссипативных потерь применительно к электроосмотическому процессу подробно рассмотрены, в частности, в работе [15]).

ОПИСАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

В экспериментах за основу была взята геометрия численного эксперимента работы [1]. А именно: стеклянный капилляр с открытыми концами, в котором осуществлялся процесс электроосмоса, имел следующие размеры: $l = 1 \cdot 10^{-3}$ м, радиус $r_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ м, концы оси капилляра имели координаты $(r, z)_{\text{lower}} = (0, 0)$ м и $(r, z)_{\text{upper}} = (0, 10^{-3})$ м. Толщина стенки капилляра в настоящей работе

принималась равной $\Delta r = 8 \cdot 10^{-5}$ м. Стенка капилляра была введена для учета теплопереноса.

Капилляр помещался в безграничную однородную жидкость (воздух или воду), которая заполняла и внутренний объем капилляра. Таким образом, в отличие от работы [1], внутри капилляра рассматривалась мультифизическая задача гидродинамики и теплопроводности, а в оболочке капилляра и в окружающей жидкости рассматривалась задача теплопроводности.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Модельный эксперимент проводился на программном комплексе COMSOL Multiphysics. В качестве гидродинамической модели использовалась модель несжимаемой вязкой жидкости (3), (4). В качестве среды в экспериментах использовались вода и воздух (обобщенно жидкость). В безграничную жидкость помещался цилиндрический капилляр с открытыми концами, заполненный окружающей жидкостью. К торцам капилляра подавалось суммарное электрическое напряжение $U_0 + u_1$ постоянного напряжения $U_0 = \text{const}$ и переменного синусоидального напряжения $u_1 = u_0 e^{i\omega t}$ (здесь $u_0 = \text{const}$ — амплитуда переменного напряжения u_1). Амплитуда постоянного напряжения накачки была принята равной $U_0 = 2000$ В, амплитуда переменного напряжения была равна $u_0 = 600$ В. Частота колебаний принималась равной $f = 1000$ Гц. Величина $U_0 = 2000$ В была выбрана, исходя из результатов работы [1], т.к. именно при этой величине U_0 в [1] было получено наибольшее преимущество излучателя в воде по сравнению с воздухом.

Что касается краевых условий на стенках капилляра при электроосмотическом течении жидкости, то в пакете COMSOL Multiphysics при моделировании электроосмоса принимается "электроосмотическое" краевое условие, заключающееся в том, что на внутренней стенке капилляра для продольной скорости жидкости вместо условия прилипания жидкости принимается условие о том, что эта скорость жидкости на стенке равна электроосмотической скорости жидкости U_{eo} , где

$$U_{eo} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \zeta}{\eta} E \quad \text{— электроосмотическая скорость}$$

течения; ε и ε_0 — соответственно относительная диэлектрическая проницаемость и электрическая постоянная; E — проекция амплитуды напряженности электрического поля в направлении движения жидкости (см., например [7, с. 159], [11, с. 7]).

Были проведены следующие модельные эксперименты. Для указанных выше параметров были найдены величины давления и скоростей движения жидкости в воде и в воздухе для условий только вязких потерь и отдельно для совокупности вязких и тепловых потерь. В итоге были получены следующие результаты.

1. В условиях учета только вязких потерь отношение амплитуд переменного давления в воде и в воздухе составило $p_{0\text{water}} / p_{0\text{air}} = 4407$. При учете и вязких, и тепловых потерь это отношение составило величину $p_{0\text{water}} / p_{0\text{air}} = 4372$ (или уменьшение на 0.79%).

2. Произведено сравнение интенсивностей звука в капилляре. В качестве интенсивностей звука в капилляре в воде или воздухе бралась величина $I = p_0 v_0 / 2$ (p_0, v_0 — амплитуды давления и скорости соответственно), характерная для электроосмотического течения с присущим ему свойством постоянности этих величин в поперечных сечениях капилляра (см. [1]), а именно независимость этих величин от радиуса капилляра. Отношение интенсивностей при учете только вязких потерь составило $I_{\text{water}} / I_{0\text{air}} = 6243$. При учете и вязких, и тепловых потерь это отношение составило величину $I_{\text{water}} / I_{0\text{air}} = 6162$ (или уменьшение на 1.3%).

Таким образом, в условиях описанных экспериментов было показано, что неучет тепловых потерь при расчете акустических полей в капилляре приводит к ошибкам порядка 1%.

ВЫВОДЫ

В работе приведены все необходимые уравнения для проведения модельных экспериментов по учету тепловых и вязких потерь электроосмотического излучателя. В результате проведенных модельных экспериментов выявлено следующее. Дополнительный к учету вязких потерь учет тепловых потерь незначительно повышает точность расчетов. Так, отношение амплитуд давлений в воде и в воздухе меняется всего на 0.79%, а отношение интенсивностей излучаемого звука меняется на 1.3%. Сами амплитуды давлений и колебательной скорости без учета тепла и с учетом тепла менялись в пределах одного процента. Это позволяет использовать с указанной точностью модель вязкой несжимаемой жидкости без учета тепловых потерь при моделировании электрокинетического излучателя звука.

Финансирование

Работа выполнена в ИАП РАН в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ № 075-00444-25-00 (от 26.12.2024 г.).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е. Численная оценка эффективности жидкостного и воздушного электрокинетических излучателей // Журн. техн. физики. 2025. Т. 95, вып. 1. С. 142–149.
URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/59472>
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Шарфарец Б.П. Обоснование возможности использования гидродинамической модели вязкой несжимаемой жидкости при моделировании на программном пакете излученного поля электроосмотического электроакустического излучателя // Научн. приборостроение. 2023. Т. 33, № 3. С. 117–124.
URL: <http://iairas.ru/mag/2023/abst3.php#abst8>
4. Физическая энциклопедия. Т. 2 / Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Сов. Энциклопедия, 1990. 704 с.
5. Шарфарец Б.П. Система уравнений электрогидродинамики применительно к электроосмотическим процессам // Научн. приборостроение. 2019. Т. 29, № 1. С. 135–142.
URL: <http://iairas.ru/mag/2019/abst1.php#abst20>
6. Rice L.C., Whitehead R. Electrokinetic Flow in a Narrow Cylindrical Capillary // J. Phys. Chem. 1965. Vol. 69, no. 11. P. 4017–4024. DOI: 10.1021/j100895a062
7. Bruus H. Theoretical Microfluidics. Oxford University Press, 2008. 346 p.
8. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. Физматгиз, 1963. 728 с.
9. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
10. Физическая энциклопедия. Т. 1. М.: Сов. энциклопедия, 1988. 699 с.
11. Духин С.С., Дерягин Б.В. Электрофорез. М.: Наука, 1976. 332 с.
12. Фридрихсберг Д.А. Курс коллоидной химии. Л.: Химия, 1984. 368 с.
13. Юдаев Б.Н. Теплопередача. М.: Высшая школа, 1973. 360 с.
14. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.
15. Шарфарец Б.П. О диссипации энергии в электроосмотическом процессе // Научн. приборостроение. 2019. Т. 29, № 3. С. 30–40.
URL: <http://iairas.ru/mag/2019/abst3.php#abst3>

**Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург**

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 22.08.2025

NUMERICAL EVALUATION OF THE EFFECTIVENESS OF LIQUID AND AIR ELECTROKINETIC RADIATORS. VISCOUS HEAT TRANSFER FLUID CASE

B. P. Sharfarets, V. E. Kurochkin

Institute for Analytical Instrumentation, RAS, St. Petersburg, Russia

This work continues a series of model experiments using the computing package, allowing us to forecast the comparative efficiency of electrokinetic sound emitters in liquid and air environments. Previously, such a forecast was made by the authors for the condition of the presence of only viscous losses in the medium. In this work, an attempt was made to obtain the comparative efficiency of electrokinetic emitters in liquid and air environments using the computing package COMSOL Multiphysics in the presence of not only viscous but also thermal losses. As a result of the numerical experiments, an insignificant effect of taking into account thermal losses on the accuracy of calculations was revealed. This fact can significantly speed up the implementation of complex model experiments using the COMSOL Multiphysics package.

Keywords: electrokinetic emitters, viscous, incompressible heat-conducting liquid

REFERENCES

1. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E. [Numerical evaluation of the efficiency of liquid and air electrokinetic radiators]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2025, vol. 95, no. 1, pp. 142–149. (In Russ.). URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/59472>
2. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p. (In Russ.).
3. Sharfarets B.P. [Justification of the possibility of using the hydrodynamic model of a viscous incompressible fluid in software simulation of the radiated field of the electroosmotic electroacoustic radiator]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2023, vol. 33, no. 3, pp. 117–124. (In Russ.). URL: <http://iairas.ru/mag/2023/abst3.php#abst8>
4. Prokhorov A.M., editor. *Fizicheskaya ehntsiklopediya. T. 2* [Physical Encyclopedia. Vol. 2]. Moscow, Sovetskaya ehntsiklopediya Publ., 1990. 704 p. (In Russ.).
5. Sharfarets B.P. [System electrohydrodynamics equations applied to electroosmotic processes]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2019, vol. 29, no. 1, pp. 135–142. (In Russ.). DOI: 10.18358/np-29-1-i135142
6. Rice L.C., Whitehead R. Electrokinetic Flow in a Narrow Cylindrical Capillary. *J. Phys. Chem.*, 1965, vol. 69, no. 11, pp. 4017–4024. DOI: 10.1021/j100895a062
7. Bruus H. *Theoretical Microfluidics*. Oxford University Press, 2008. 346 p.
8. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika Ch. 2* [Theoretical hydromechanics. Pt 2]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 728 p. (In Russ.).
9. Koshlyakov N.S., Gliner Eh.B., Smirnov M.M. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1970. 712 p. (In Russ.).
10. Prokhorov A.M., editor. *Fizicheskaya ehntsiklopediya. T. 1* [Physical Encyclopedia. Vol. 1]. Moscow: Sovetskaya ehntsiklopediya Publ., 1988. 699 p. (In Russ.).
11. Dukhin S.S., Deryagin B.V. *Ehлектрофорез* [Electrophoresis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 332 p. (In Russ.).
12. Fridrikhsberg D.A. *Kurs kolloidnoi khimii* [Colloid Chemistry Course]. Leningrad, Khimiya Publ., 1984. 368 p. (In Russ.).
13. Yudaev B.N. *Teploperedacha* [Heat transfer]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1973. 360 p. (In Russ.).
14. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of thermal conductivity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 600 p. (In Russ.).
15. Sharfarets B.P. [About energy dissipation in the electroosmotic process]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2019, vol. 29, no. 3, pp. 30–40. DOI: 10.18358/np-29-3-i3040 (In Russ.).

Contacts: Sharfarets Boris Pinkusovich,
sharb@mail.ru

Article received by the editorial office on 22.08.2025

INTRODUCTION

Previously, in [1], a model assessment of the comparative efficiency of an electrokinetic emitter in water and air was considered, taking into account only viscous losses in the medium, without taking thermal losses. In the present work, a model assessment of the comparative efficiency of an electrokinetic emitter in water and air is made, taking into account not only viscous but also thermal losses in the process of electrokinetic conversion. In this case, following [2, 3], a system of hydrodynamic equations is used for the conditions of a viscous incompressible heat-conducting liquid.

STATEMENT OF THE PROBLEM

In view of the complexity of conducting full-scale experiments, we described a model experiment to determine the comparative efficiency of an electroosmotic emitter in water and air, taking into account viscous and thermal losses. The model experiment is carried out using the COMSOL Multiphysics computing package. For this purpose, the Navier–Stokes equation system for a viscous incompressible heat-conducting fluid is applied. The Joule heating of the fluid caused by the flow of electric current in the capillary fluid is considered as a source of thermal energy.

MAIN EQUATIONS FOR DESCRIBING ELECTROOSMOTIC PROCESS

The subject matter considered in the work falls within the competence of a fairly young field of physics — electrohydrodynamics (EHD). According to [4, p. 653], the determining factor in the interaction of the electromagnetic field with the medium is not the magnetic field, but the electric field in media with very low electrical conductivity and without a large externally applied magnetic field at fluid velocities much lower than the speed of light. The electric field in EHD is described by the laws of electrostatics, and its effect on the medium is described by the electric part of the Lorentz force $\rho_e \mathbf{E}$, where ρ_e is the electric charge density in the medium, $\mathbf{E}$ is the electric field strength vector. The electric current is determined not only by the independent motion of charges, but one should also take into account the convective current of charge transfer by the liquid $\rho_e \mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ is the liquid flow velocity) and the displacement current. Quite a few publications are devoted to the equations of EHD (a far from complete list is given in [5]). Below we present the system of EHD equations written out in [5] with the necessary comments related to the model-

ing of processes using the COMSOL computing package.

First, we will consider the hydrodynamic equations: conservation of momentum (Navier–Stokes equation) and the continuity equation. In the general case of a compressible viscous fluid, according to [2, p. 73], the Navier–Stokes equation (conservation of momentum) and the continuity equation [2, p. 18] have the form

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot) \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2)$$

Under certain conditions, the fluid can be considered incompressible, which leads to a simplification of the system of Navier–Stokes equations and the continuity equation, which in the case of a homogeneous fluid are reduced to the form [2, p. 73] and [2, p. 37], respectively

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

In (1)–(4), the following notations are used: $\mathbf{v}$ is the fluid velocity field; p is the pressure field in the fluid; $\eta = \text{const}$ and $\zeta = \text{const}$ are the shear and volume viscosities of the fluid, respectively (the assumption of the constancy of these quantities is made to simplify the calculations); $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E}$ is the volume ponderomotive force (Lorentz force in this case for a homogeneous medium), acting on a unit volume of liquid and characteristic of electroosmotic problems; $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ is the electric field strength applied to the ends of a capillary of length l , filled with liquid and located along the vertical axis Oz ; ρ_e is the electric charge density in liquid (electric charge of a unit volume of liquid). In addition, in case (1), (2) ρ is the density field of the medium in the general case is $\rho \neq \text{const}$, and in case (3)–(4) the density field of the medium is constant $\rho = \text{const}$.

NAVIER–STOKES EQUATION FOR A CYLINDRICAL CAPILLARY FOR CONSTANT AND VARIABLE VELOCITY AND PRESSURE COMPONENTS OF THE MEDIUM

In modeling electrokinetic processes, such a simple model of a porous medium as a single thin cylindrical

capillary filled with liquid has found wide application. With a large electrokinetic radius of the capillary $R = r_0 / \lambda_D$ (r_0 is the capillary radius; λ_D is the thickness of the double electric layer) in a cylindrical capillary, the electroosmotic flow has a virtually piston-like character. According to [6], [7, p. 162], even with the value of the electrokinetic radius $R \geq 100$, the electroosmotic flow takes on a virtually piston-like (one-dimensional) character, i.e., the amplitudes of the velocity and pressure remain constant in the cross section of the capillary. Therefore, we will further use the one-dimensional Navier–Stokes equations in a simpler cylindrical coordinate system.

In addition, the possibility of describing the behavior of a fluid in electrokinetic processes by hydrodynamic equations for a viscous incompressible fluid in fairly wide frequency ranges will be shown below.

Let us write the Navier–Stokes equation (3) and (4) as applied to a cylindrical capillary filled with an incompressible viscous fluid in the case of one-dimensional flow. For an incompressible fluid in the case of electroosmotic flow along a cylindrical capillary with an axis oriented along the Oz axis and having a constant velocity $\mathbf{v}_0 = (0, 0, v_0)$ and a variable velocity $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$, as well as a variable pressure field p , the only nonzero z -component of the Navier–Stokes equation has the form [2, p. 76], [8, p. 395], etc.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + (v_z + v_0) \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho_e E_z / \rho. \end{aligned} \quad (3a)$$

In addition, the continuity equation must be satisfied, which in this case has the form [2, p. 76]

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (4a)$$

In (3a) $E_z \neq 0$ is the vertical component of the electric field strength $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$.

Next, we will consider the limits of the possibility of using the model of an incompressible viscous fluid for electroosmotic processes. According to [2, p. 41], a fluid in its steady-state flow can be considered incompressible provided that the variations in the density of the medium are small: $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$, which is equivalent to the condition $|\mathbf{v}| \ll c$, where $|\mathbf{v}|$ is the amplitude of the fluid velocity vector; c is the speed of

sound in the fluid. In addition, in the non-stationary mode of fluid motion, one more condition must be satisfied [2, p. 42]:

$$\tau \gg \frac{l}{c},$$

where τ and l are the quantities of the order of time intervals and distances at which the fluid velocity and time intervals, respectively, experience a noticeable change.

According to the results of work [3], the system of hydrodynamic equations for an incompressible fluid (3), (4) adequately describes the hydrodynamics of processes in electrokinetic converters, respectively, up to frequencies of $f \leq 100$ kHz in water and $f \leq 20$ kHz in air.

Next, we will consider the heat conductivity equations for both cases: compressible and incompressible fluid.

In the case of a compressible fluid, this equation has the form [2, p. 273]

$$\begin{aligned} \rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right] = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \\ + \frac{\eta}{2} \times \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \text{div} \mathbf{v} \right)^2 + \zeta (\text{div} \mathbf{v})^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Here T is the temperature field in the fluid; s is the entropy of a unit mass of the fluid; κ is the thermal conductivity coefficient.

In the case of an incompressible fluid, the heat conductivity equation is transformed to the form [2, p. 277]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \\ = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \times \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + w / \rho c_p, \end{aligned} \quad (6)$$

where $\nu = \eta / \rho$ is the kinematic viscosity, and thermal diffusivity $\chi = \kappa / \rho c_p$ is introduced instead of the thermal conductivity coefficient κ ; c_p is the specific heat capacity at constant pressure.

In equation (6), unlike [2, equation (50.2)], the density of the heat source w is added to the right side (the heat released by the source per unit time in a unit volume of liquid, see also [9, pp. 25, 26], $[w] = \text{W/m}^3$).

Let us consider the case when such a heat source is generated by the process of passing an electric current through an electrolyte. In this case, we will use the Joule–Lenz law on the release of heat when current passes. The power of heat release w (heat released in a unit volume of the medium per unit time) when an

electric current flows is proportional to the product of the density of the electric current $\mathbf{j}$ and the magnitude of the electric field strength $\mathbf{E}$ [10, pp. 604–605]. Mathematically, this is written as follows

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (7)$$

In order for the density to be considered constant in the equations of motion of a non-uniformly heated liquid, it is necessary, in addition to the smallness of the ratio of the velocity of the liquid to the speed of sound $|\mathbf{v}| \ll c$, that the temperature differences in the liquid are small enough (we are talking specifically about the absolute values of the temperature difference, and not about the temperature gradient). In this case, the liquid can be considered incompressible. Considering the temperature differences to be small, we can also neglect the temperature dependence of the quantities η , κ , and c_p , i.e., the heat conduction equation can be written in the form (6) [2, p. 277].

Thus, under the assumptions made above, the hydrodynamic part of the equations describing the process under study can be written in the form of the Navier–Stokes equations for an incompressible liquid (3), (4), or (3a), (4a), and the heat conduction equation can be written in the form (6).

ABOUT CURRENT DENSITY IN AN ELECTROOSMOTIC PROCESS

In an electroosmotic process, when calculating the density of the electric current $\mathbf{j}$ in thin capillaries and diaphragms filled with liquid, it is necessary to take into account certain features of the electrical conductivity in them, in contrast to the electrical conductivity in a free liquid (see, for example, [11, Chapter 5]; [12, pp. 211–214]). This is due to an increase in the concentration of ions near the liquid–solid interfaces due to the formation of a double electric layer (DEL). Due to the adsorption of ions, their total concentration in the moving part of the DEL exceeds that in the surrounding free solution. The excess of counterions in the DEL exceeds the deficiency of co-ions by absolute value. In this case, additional electrical conductivity arises, caused by the surface excess of ions and called surface conductivity. Note [12, p. 211] that the value σ_s here is by no means the specific conductivity of the surface layer but represents the excess of the volume conductivity of the liquid σ in the porous medium, averaged, as if "smeared" over the entire volume of the capillary. Thus, the specific electrical conductivity of the pore solution σ is the sum of the volume conductivity σ_v and the surface conductivity σ_s : $\sigma = \sigma_v + \sigma_s$.

In the work [11, p. 26] it is nevertheless noted that when the condition $^1(8)$ is met,

$$\text{Rel} = \frac{\sigma_s}{\sigma_v} \ll 1 \quad (8)$$

the surface conductivity has a weak effect on electrokinetic phenomena. And for the case of capillaries of constant cross-section, correction (8) exhausts the effect of surface conductivity on electrokinetic phenomena and, in particular, on electroosmosis.

Further, when conducting model experiments, the radius of the capillary filled with liquid, in which the electroosmotic process is modeled, will be significantly greater than the thickness of the DEL (in other words, an assumption is made about a large value of the dimensionless electrokinetic radius of the capillary $R = r_0 / \lambda_D$), the liquid flowing through the capillary will have a specific electrical conductivity σ , close to σ_v , and the surface conductivity can be neglected.

ABOUT THE DENSITY OF THE HEAT SOURCE

The power of heat release (7) in the capillary is calculated as follows:

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}{\sigma_v} = \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_v} = \sigma_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \sigma_v |\mathbf{E}|^2. \quad (9)$$

A mixture $U_0 + u_1$ of constant voltage $U_0 = \text{const}$ and alternating sinusoidal voltage $u_1 = u_0 e^{i\omega t}$ is usually supplied to the electrodes of the membrane of the electrokinetic emitter, respectively (here $u_0 = \text{const}$ is the amplitude of the alternating voltage u_1). In the case of harmonic alternating voltage in (9), it is necessary to take into account the effective values of the electric field; in the case of constant voltage in (9), the value of the constant voltage is taken into account. Then (9) after averaging over the oscillation period is rewritten as follows: $\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_1$, where $\bar{w}_0$ and $\bar{w}_1$ are equal, respectively, to

$$\bar{w}_0 = \sigma_v |\mathbf{E}_0|^2 = \sigma_v (U_0 / l)^2$$

and

$$\bar{w}_1 = \sigma_v |\overline{\mathbf{E}_1}|^2 = \sigma_v |\overline{(u_1 / l)}|^2 = \sigma_v (u_0 / l)^2 / 2.$$

¹ At present, the dimensionless parameter Rel has received the generally accepted name "Dukhin's number" Du in honor of one of the co-authors of the work [12], who proposed this similarity criterion.

Here l is the membrane thickness (equal to the capillary length) of the electrokinetic emitter. Finally, for (9) we have

$$\bar{w} = \frac{\sigma_v}{l^2} [U_0^2 + u_0^2 / 2]. \quad (10)$$

Then, taking into account (10), equation (6) can be written as follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \\ = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\sigma_v}{\rho c_p l^2} [U_0^2 + u_0^2 / 2]. \end{aligned} \quad (11)$$

It was shown above that the system of equations for describing hydrodynamic processes and processes associated with heat transfer in a liquid as applied to modeling an electrokinetic emitter when a constant pump voltage U_0 and an alternating voltage with amplitude u_0 are applied to it can be limited by the hydrodynamic system of equations (3), (4) in the general case or (3a), (4a) in the case of a cylindrical coordinate system with a source $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E}$ in (3) and the energy conservation equation (11) with a source

$$\frac{\sigma_v}{\rho c_p l^2} [U_0^2 + u_0^2 / 2].$$

NUMERICAL MODELING. MATHEMATICAL AND PHYSICAL MODELS OF THE PROCESS

As a physical model of the process, a homogeneous glass cylindrical capillary of length l , with an internal radius r_0 and an external radius $r_0 + \Delta r$, is proposed, where Δr is the thickness of the capillary wall. The axis of the capillary is oriented along the axis Oz and has coordinates along the axis $z \in [0, l]$. Inside, the capillary is filled with one of the homogeneous media selected for the experiments (air or water). The capillary itself is placed in an infinite homogeneous medium identical to the medium filling the capillary. A combined electric field with an intensity of $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}$ is applied to the ends of the capillary, where $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_{0z})$ is the intensity of the vertically oriented constant electric field applied to the ends of the capillary; $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ is the intensity of the vertically oriented alternating electric field applied to the ends of the capillary.

The system of Navier–Stokes equations (3a), (4a) in a cylindrical coordinate system, as well as the heat conductivity equation in a liquid (11), are adopted as a mathematical model of processes in a liquid.

Further, to obtain a closed solution to tasks (3a), (4a) and (11) and to connect the boundary conditions on the outer boundary of the capillary, we will need the heat conductivity equation in the glass shell of a cylindrical capillary, namely in the region $r \in [r_0, r_0 + \Delta r]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, l]$. This equation has the form [13, p. 55]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (12)$$

where $a = \lambda_g / (\rho_g c_g)$ is the coefficient of thermal diffusivity of glass; λ_g is the coefficient of thermal conductivity of glass; c_g is the heat capacity of glass; ρ_g is the density of glass.

To solve the system of equations (11), (12), it is necessary to set boundary conditions at the boundaries of the glass shell with the liquid located both inside and outside the capillary. Here we refer to the works [13, p. 30, 14, p. 28]. According to, for example, [14, p. 28], in the case considered in this paper, a boundary condition of the fourth kind takes place, valid either for liquid flow around a solid body (in the problem under consideration, liquid flow around the inner walls of the capillary) or for convective heat exchange of the body with the liquid (in the problem under consideration, convective heat exchange with the liquid surrounding it from the outside at the outer boundaries of the capillary). This boundary condition is reduced to the continuity of temperatures and heat flows at the interfaces.

Thus, on the inner boundary of the glass capillary $r = r_0$, $z \in [0, l]$ (liquid flow around the inner surface of the capillary), as well as on the outer lateral surface of the capillary $r = r_0 + \Delta r$, $z \in [0, l]$ and on the ends of the annular capillary, which are in contact with the environment

$$(r, z) \in [(r_0, r_0 + \Delta r), z = 0] \text{ and}$$

$(r, z) \in [(r_0, r_0 + \Delta r), z = l]$ (free convection), boundary conditions of the fourth kind are set, they can be reduced to the simultaneous specification of the equality of temperatures

$$T_{\text{среды}}(t) = T_s(t) \quad (13)$$

and heat fluxes

$$-\lambda_{\text{среды}} \left(\frac{\partial T_{\text{среды}}}{\partial n} \right) = -\lambda_g \left(\frac{\partial T_s}{\partial n} \right) \quad (14)$$

at all boundaries between the surrounding and internal liquid with the glass walls of the capillary (see [13, p. 30], [14, p. 28]).

Here $T_{\text{среды}}$ is the ambient temperature, T_s is the temperature of the liquid inside the capillary at the boundary with the glass; $\lambda_{\text{среды}}$ and λ_g are, respectively, the thermal conductivity coefficients of the medium and glass; n are the normals to the corresponding surfaces.

Remark. Note that the hydrodynamic equations for a viscous liquid and the heat conductivity equation take into account various losses. The Navier–Stokes equation takes into account viscous losses, namely, the dissipation of energy caused by viscous friction and converted into thermal energy.

The heat conduction equation in the task under consideration takes into account, first of all, the characteristic source of losses — Joule heating, which is caused by the electric current arising in the electrolyte (see the source on the right side of equation (11)). In addition, when solving the heat conduction equation, energy losses associated with convection at the boundaries with the environment are taken into account (note that the issues of dissipative losses as applied to the electroosmotic process are considered in detail, in particular, in [15]).

DESCRIPTION OF THE GEOMETRY OF THE EXPERIMENT

The experiments were based on the geometry of the numerical experiment of [1]. Namely, the glass capillary with open ends, in which the electroosmosis process was carried out, had the following dimensions: $l = 1 \cdot 10^{-3}$ m, radius $r_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ m, the ends of the capillary axis had coordinates $(r, z)_{\text{lower}} = (0, 0)$ m and $(r, z)_{\text{upper}} = (0, 10^{-3})$ m. The thickness of the capillary wall in this work was taken to be equal to $\Delta r = 8 \cdot 10^{-5}$ m. The capillary wall was introduced to take into account heat transfer.

The capillary was placed in an infinite homogeneous liquid (air or water), which also filled the internal volume of the capillary. In contrast to work [1], a multiphysical problem of hydrodynamics and heat conductivity was considered inside the capillary, and a problem of heat conductivity was considered in the capillary shell and in the surrounding liquid.

DESCRIPTION OF THE EXPERIMENT

The model experiment was conducted using the COMSOL Multiphysics software package. The incompressible viscous fluid model (3), (4) was used as the hydrodynamic model. Water and air (generally liquid) were used as the medium in the experiments. A cylindrical capillary filled with the surrounding liquid

and with open ends was placed in an infinite liquid. The total electric voltage $U_0 + u_1$ of constant voltage $U_0 = \text{const}$ and alternating sinusoidal voltage $u_1 = u_0 e^{i\omega t}$, respectively, was applied to the ends of the capillary (here, $u_0 = \text{const}$ is the amplitude of the alternating voltage). The amplitude of the direct pump voltage was taken to be equal to $U_0 = 2000$ V, the amplitude of the alternating voltage was equal to $u_0 = 600$ V. The oscillation frequency was taken to be equal to $f = 1000$ Hz. The value of $U_0 = 2000$ V was chosen based on the results of work [1], since this value of U_0 in [1] secured the greatest advantage of the emitter in water compared to air.

As for the boundary conditions on the capillary walls during electroosmotic flow of liquid, the COMSOL Multiphysics package, when modeling electroosmosis, adopts an "electroosmotic" boundary condition, which consists in the fact that on the inner wall of the capillary for the longitudinal velocity of liquid, instead of the liquid adhesion condition, the condition of equality of this liquid velocity on the wall to the electroosmotic velocity of the liquid U_{eo} , where

$$U_{\text{eo}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \zeta}{\eta} E$$

is the electroosmotic flow velocity;

ε and ε_0 are the relative permittivity and electric constant; E is the projection of the amplitude of the electric field strength in the direction of liquid motion (see, for example, [7, p. 159], [11, p. 7]).

The following model experiments were carried out. For the above parameters, the values of pressure and velocities of liquid motion in water and in air were found for conditions of only viscous losses and separately for a combination of viscous and heat losses. As a result, the following results were obtained.

1. When only viscous losses were taken into account, the ratio of the amplitudes of the variable pressure in water and air was $p_{0\text{water}} / p_{0\text{air}} = 4407$. When both viscous and thermal losses were taken into account, this ratio was $p_{0\text{water}} / p_{0\text{air}} = 4372$ (or a decrease of 0.79%).

2. A comparison of the sound intensities in a capillary was made. The value $I = p_0 v_0 / 2$ was taken as the sound intensities in a capillary in water or air (p_0, v_0 are the amplitudes of pressure and velocity, respectively). This value is characteristic of electroosmotic flow with its inherent property of constancy of these values in the cross-sections of the capillary (see [1]), namely, the independence of these values from the radius of the capillary. The ratio of intensities when only viscous losses were taken into account was $I_{\text{water}} / I_{0\text{air}} = 6243$. When taking into account

both viscous and thermal losses, this ratio amounted to $I_{\text{water}} / I_{\text{air}} = 6162$ (or a decrease of 1.3%).

Thus, under the conditions of the described experiments, it was shown that failure to take into account thermal losses when calculating acoustic fields in a capillary leads to errors of the order of 1%.

CONCLUSIONS

The paper presents all the equations necessary for conducting model experiments of accounting for thermal and viscous losses of an electroosmotic emit-

ter. As a result of the model experiments, the following was revealed. Taking into account thermal losses in addition to viscous losses slightly increases the accuracy of calculations. The ratio of the pressure amplitudes in water and air changes by only 0.79%, and the ratio of the intensities of emitted sound changes by 1.3%. The pressure amplitudes and oscillatory velocity themselves, with and without taking into account heat, changed within one percent. This allows using the model of a viscous incompressible fluid with the specified accuracy without taking into account heat losses when modeling an electrokinetic sound emitter.