

УДК 621.317.628

© С. В. Бирюков, 2025

ОДНОКОМПОНЕНТНЫЙ СФЕРИЧЕСКИЙ ДАТЧИК НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ С РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМОЙ ЭЛЕКТРОДОВ В ПОЛЕ ВБЛИЗИ ЗАЗЕМЛЕННОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Работа направлена на исследование взаимодействия однокомпонентного сферического датчика напряженности электрического поля с разомкнутой системой чувствительных электродов с электрическим полем вблизи проводящей заземленной плоскости. Роль чувствительных электродов выполняют пустотелые сферические сегменты с угловым размером θ_0 , диаметрально расположенные на виртуальной сфере радиуса R . Построена краткая теория взаимодействия датчика с полем вблизи проводящей плоскости. В основу теории легли основные уравнения, необходимые для построения математической модели датчика, позволяющие определять электрические заряды q_1 и q_2 на чувствительных электродах, напряжение холостого хода U_{xx} между чувствительными электродами и межэлектродную емкость C . Составлена математическая модель датчика и проведено математическое моделирование. В результате математического моделирования получены численные значения межэлектродной емкости C , дифференциального заряда $\Delta q = q_1 - q_2$ и напряжения холостого хода U_{xx} . Численные значения получены при изменении расстояния d от центра датчика до проводящей плоскости для различных угловых значений θ_0 сферических сегментов. Для удобства при расчетах использовалось не расстояние d , а относительный параметр $a = R/d$, характеризующий пространственный диапазон измерения. Пространственный диапазон измерения изменялся в пределах $0 < a \leq 1$ с шагом 0.1. Угловой размер сферических сегментов θ_0 изменялся от 30° до 90° с шагом в 15° . Исследования показали, что в качестве выходного сигнала датчика следует выбрать U_{xx} при угловых размерах сферических сегментов $\theta_0 \leq 45^\circ$. Такой выбор обеспечит датчику погрешность, вызванную влиянием проводящей плоскости, не превышающую $\delta \leq 4.77\%$ во всем пространственном диапазоне измерения $0 < a \leq 1$. При уменьшении пространственного диапазона до $a = 0.5$ погрешность датчика не превысит $\delta \leq 0.36\%$. Результаты исследования подтвердили возможность использования датчика вблизи проводящей заземленной плоскости.

Ключевые слова: напряженность электрического поля, датчик с разомкнутой системой электродов, поле проводящей плоскости, взаимодействие поля с датчиком

ВВЕДЕНИЕ

Работы, направленные на исследования, создание и проектирование датчиков и средств измерений напряженности низкочастотного электрического поля (ЭП), всегда актуальны. Такие средства измерений используются для измерения и контроля ЭП промышленной частоты 50 Гц. Измерения проводятся на рабочих местах и территориях с установленным сверхвысоковольтным оборудованием. Целью инструментального контроля является гигиеническая оценка условий труда обслуживающего персонала.

Используемые на сегодняшний день средства измерений напряженности ЭП, содержащие сферические датчики напряженности ЭП электроиндукционного типа с замкнутой системой чувствительных электродов (ЧЭ), хорошо представлены в работах [1–8]. Данная работа является следующей в цикле работ по исследованию нового типа

электроиндукционных сферических датчиков, имеющих разомкнутую систему ЧЭ, представляющих собой полые сферические сегменты. Предыдущая работа автора посвящена исследованию поведения датчиков с разомкнутой системой электродов в однородном поле [9]. В данной работе будет рассмотрено поведение датчика ЭП в условиях присутствия проводящей заземленной плоскости. Подобная задача решалась в работе [10] для ЧЭ в форме сплошных сферических сегментов. В этой работе рассмотрен частный случай для сферических сегментов, представляющих сплошные полусферы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Провести теоретические исследования поведения однокомпонентного сферического электроиндукционного датчика напряженности ЭП с ра-

замкнутой системой проводящих электродов в электрическом поле с заземленной проводящей плоскостью. Для этого необходимо:

1) построить краткую теорию взаимодействия датчика, находящегося в ЭП с заземленной проводящей плоскостью;

2) построить математическую модель взаимодействия датчика с ЭП с заземленной проводящей плоскостью;

3) провести математическое моделирование, по результатам которого установить влияние заземленной проводящей плоскости на электрические параметры датчика, такие как электрический заряд, индуцированный на электродах датчика, напряжение холостого хода и электрическая емкость между электродами датчика;

4) оценить погрешность датчика по межэлектродной емкости, электрическому заряду и напряжению холостого хода;

5) сделать заключение по полученным результатам.

ТЕОРИЯ

Решения поставленных задач будет связано с рассмотрением поведения электроиндукционного сферического датчика напряженности ЭП с разомкнутой системой электродов при работе в поле вблизи заземленной плоскости. Для этого решим следующую задачу. Разместим находящиеся над проводящей заземленной плоскостью две проводящие сферические оболочки в форме сфериче-

ских сегментов, лежащих на поверхности виртуальной сферы радиуса R . Сферические сегменты будут являться ЧЭ датчика. Обозначим поверхности первого и второго сферических сегментов через S_1 и S_2 , их размеры зададим углом θ_0 и текущее угловое значение углом θ . Примем расстояние от центра виртуальной сферы до плоскости равным d . Рассматриваемая в задаче ситуация представлена на рисунке.

Воспользуемся коллективными фундаментальными работами [11–14] и работами отдельных авторов [15–17] и выделим из них основные теоретические положения, необходимые для расчета датчиков с разомкнутой системой электродов, находящихся в поле заземленной плоскости. Обоснуем основные электрические параметры датчика, которые должны определять выделенные теоретические положения.

Для решения задачи зададим исходное положение сферического датчика в ЭП с проводящей плоскостью. Обозначим буквой d расстояние от центра датчика до проводящей плоскости, имеющей координату $z = 0$. При нахождении описанной системы ЧЭ в ЭП с заземленной плоскостью на их поверхностях S_1 и S_2 индуцируются противоположные по знаку электрические заряды $-q_1$ и $+q_2$. Под действием ЭП электроды датчика 1 и 2 приобретут электрические потенциалы φ_{01} и φ_{02} , связанные с электрическими зарядами через межэлектродную емкость C , являющуюся емкостью C_d датчика. Электрические заряды и потенциалы электродов датчика пропорциональны напряженности ЭП.

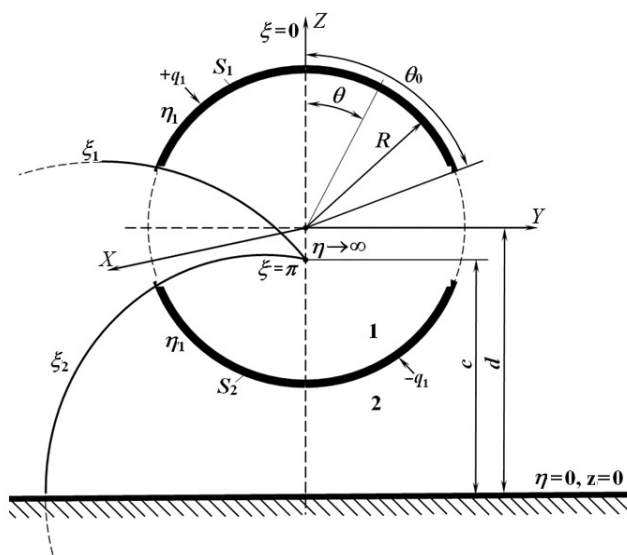


Рис. Система сферических электродов для исследования датчика в электрическом поле заземленной плоскости.

Основные характеристики: S_1, S_2 — ЧЭ датчика, R — радиус виртуальной сферы, d — расстояние от датчика до заземленной плоскости, θ_0 — угловой размер ЧЭ

Следовательно, основными электрическими параметрами датчика будут являться электрические заряды q , потенциалы φ и емкость C_d . На их определение будут нацелены разрабатываемые теоретические положения.

Решим в нашей ситуации (см. рис.) краевую задачу для уравнения Лапласа. Для этого зададим граничные условия в виде

$$\Delta\varphi = 0; \quad \varphi|_{S_1} = \varphi_{01}; \quad \varphi|_{S_2} = \varphi_{02}; \quad \varphi|_{z=0} = 0, \quad (1)$$

где S_1 и S_2 — поверхности электродов 1 и 2 соответственно; φ_{01} , φ_{02} — заданные граничные условия. Решение будем проводить методом парных интегральных уравнений [9].

Для удобства решения задачи введем бисферическую систему координат (ξ, η, θ) [18, гл. 2]–[20] (см. рис.). Из [1] — следующая связь бисферических координат с декартовыми координатами:

$$\begin{cases} x = \frac{c \cdot \sin \xi \cdot \cos \theta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ y = \frac{c \cdot \sin \xi \cdot \sin \theta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ z = \frac{c \cdot \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \end{cases} \quad (2)$$

где c — расстояние от плоскости до первого фокуса бисферической системы координат, второй фокус находится под плоскостью на таком же расстоянии; η — изменяется от ∞ до $-\infty$; ξ — в пределах $0 \leq \xi \leq \pi$; θ — изменяется в пределах $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (см. рис.); $\operatorname{ch} \eta$ и $\operatorname{sh} \eta$ — гиперболические косинус и синус.

Выполняя граничные условия (1) и воспользовавшись известным [12] выражением

$$q = \int_S \sigma(S) dS, \quad (3)$$

найдем электрические заряды на электродах 1 и 2. Для этого необходимо проинтегрировать поверхность

плотность зарядов $\sigma(S) = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1}$ по поверхностям S_1 и S_2 электродов 1 и 2. Тогда получим:

$$\begin{cases} q_1 = 8\pi\varepsilon d \int_0^{\xi_1} f_1(t) \frac{\cos \frac{t}{2} \operatorname{sh} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos t} dt, \\ q_2 = -8\pi\varepsilon d \int_{\xi_2}^{\pi} f_2(t) \frac{\sin \frac{t}{2} \operatorname{ch} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos t} dt, \end{cases} \quad (4)$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — функции [12], получаемые из решения системы парных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_1} f_1(\theta) \left[\frac{\cos \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta + \theta_0)} + \frac{\cos \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta - \theta_0)} \right] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_2}^{\pi} f_2(\theta) \left[\frac{1}{\sin \frac{\theta + \theta_0}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\theta - \theta_0}{2}} \right] d\theta - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{\xi_2}^{\pi} f_2(\theta) \times \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta + \theta_0)} - \frac{\sin \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta - \theta_0)} \right] d\theta = \frac{4}{\pi} \Phi_{01} \left[\frac{2 \operatorname{ch} \eta_1 - \cos \frac{3\theta_0}{2} - 3}{2a(\operatorname{ch} \eta_1 - \cos \theta_0)} \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f_2(\theta_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\xi_2}^{\pi} f_2(\theta) \left[\frac{\cos \frac{\theta - \theta_0}{2} \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta - \theta_0)} + \frac{\cos \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta + \theta_0)} \right] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\xi_1} f_1(\theta) \left[\frac{1}{\sin \frac{\theta + \theta_0}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\theta - \theta_0}{2}} \right] d\theta - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_1} f_1(\theta) \times \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(t + x)} - \frac{\sin \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(t - x)} \right] d\theta = \frac{4}{\pi} \Phi_{02} \left[\frac{2 \operatorname{ch} \eta_1 - \sin \frac{3\theta_0}{2} - 3}{2a(\operatorname{ch} \eta_1 - \cos \theta_0)} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $a = R / d$ — относительное расстояние от центра датчика до заземленной плоскости; R — радиус сферического электрода; d — расстояние от центра датчика до заземленной плоскости; Φ_{01} и Φ_{02} — потенциальные функции ЧЭ 1 и 2 датчика в поле заземленной плоскости, определяемые из системы парных интегральных уравнения (5), (6).

Потенциальные функции Φ_{01} и Φ_{02} соответственно равны

$$\begin{cases} \Phi_{01} = \Phi_{01}^0 \cdot \frac{\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos t} = E_0 R \frac{\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos t}, \\ \Phi_{02} = \Phi_{02}^0 \cdot \frac{\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos \theta_0} = E_0 R \frac{\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos \theta_0}, \end{cases} \quad (7)$$

где Φ_{01}^0 и Φ_{02}^0 — потенциальные функции ЧЭ 1 и 2 датчика в однородном ЭП, определяемые из системы парных интегральных уравнений, полученных для однородного поля. В обозначении потенциальных функций "0" означает потенциальные функции в однородном поле; $a = R / d$ — пространственный диапазон измерений; R — радиус датчика; d — расстояние до источника поля.

Решение системы парных интегральных уравнений (5), (6) способствует нахождению функций $f_1(\theta_0)$ и $f_2(\theta_0)$, по которым определяются электрические заряды (4), индуцированные полем на поверхностях ЧЭ датчика, и электрическая емкость, создаваемая ЧЭ [11]

$$C = 4\pi\epsilon_1 R \left[1 - 2 \int_0^{\theta_{01}} f(\theta) \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right]. \quad (8)$$

Электрические потенциалы φ_{01}^H и φ_{02}^H (H в обозначении означает потенциал в неоднородном поле) ЧЭ 1 и 2 определяются через найденные по выражениям (4) электрические заряды q_1 и q_2 датчика и его емкость (8)

$$\varphi_{01}^H = \frac{q_1}{C} \quad \text{и} \quad \varphi_{02}^H = \frac{q_2}{C}. \quad (9)$$

Найденные выражения (4) для электрических зарядов, индуцированных на ЧЭ датчика, и их потенциалов (9) позволяют определить:

– дифференциальный электрический заряд

$$\Delta q = q_1 - q_2, \quad (10)$$

– разность потенциалов ЧЭ датчика, соответственно равную напряжению холостого хода

$$U_{xx} = \varphi_{01}^H - \varphi_{02}^H. \quad (11)$$

Целесообразность рассмотрения дифференциального электрического заряда, а не зарядов q_1 и q_2 в отдельности заключается в том, что в однородном поле $q_1 = |-q_2|$, а в неоднородном поле $q_1 \neq |-q_2|$, поэтому сложно оценить их измерения, вызванные неоднородностью поля.

Полученные автором выражения (3)–(11) при формировании краткой теории взаимодействия однокомпонентного сферического датчика напряженности ЭП, имеющего разомкнутую систему ЧЭ, с полем с проводящей плоскостью будут положены в основу математической модели датчика, используемой для дальнейших исследований.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЕГО РЕЗУЛЬТАТЫ

Для проведения математического моделирования построена математическая модель, объединяющая выражения (3)–(11). Математическая модель позволяет задавать конструктивный размер θ_0 ЧЭ датчика и пространственное расстояние d от центра датчика до заземленной плоскости. Пространственное расстояние задавалось через относительное расстояние (пространственный диапазон измерения) $a = R / d$.

Задавая различные значения угловых размеров ЧЭ θ_0 и относительного расстояния a , при математическом моделировании:

– определялись электрические параметры датчика, такие как межэлектродная емкость C , дифференциальный заряд ЧЭ Δq и напряжение холостого хода U_{xx} ;

– оценивались изменения указанных параметров, вызванные приближением датчика к заземленной плоскости.

Математическое моделирование проводилось для датчиков с ЧЭ в форме полых сферических сегментов с изменением их угловых размеров θ_0 от 30° до 90° с шагом в 15° и в пространственном диапазоне a , изменяющимся в интервале $0 < a \leq 1$ с шагом 0.1.

При моделировании были приняты следующие нормировки: $\Delta q^* = \Delta q / (\pi\epsilon_0 R^2 E_0)$ — для дифференциального заряда; $U_{xx}^* = U_{xx} / (R \cdot E_0)$ — для напряжений холостого хода; $C^* = C / (4\pi\epsilon_0 R)$ — для электрической емкости, где $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; E_0 — напряженность однородного ЭП при $a \rightarrow 0$.

Результаты математического моделирования в виде численных значений искомых параметров представлены в таблице.

Табл. Расчетные значения электрических характеристик датчика при его работе в поле с заземленной плоскостью в зависимости от его конструктивных параметров и высоты над плоскостью

Угол ЧЭ θ_0	Эл. характеристика	Высота над плоскостью $a = R/d$										
		~ 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
30°	C^*	0.1961	0.1963	0.1965	0.1973	0.1981	0.2001	0.2042	0.2123	0.2240	0.2471	0.2971
	$\mu(a), \%$	0	0.14	0.28	0.55	0.98	1.82	4.22	8.08	14.34	26.08	51.35
	Δq^*	1.433	1.435	1.438	1.442	1.449	1.461	1.497	1.555	1.649	1.828	2.222
	$\gamma(a), \%$	0	0.16	0.32	0.61	1.08	1.98	4.48	8.51	15.10	27.59	54.89
	U_{xx}^*	1.8238	1.8242	1.8245	1.8249	1.8260	1.8270	1.8280	1.8311	1.8360	1.8460	1.8665
	$\delta(a), \%$	0	0.02	0.04	0.06	0.1	0.157	0.25	0.4	0.67	1.2	2.34
45°	C^*	0.3201	0.3203	0.3210	0.3221	0.3242	0.3271	0.3333	0.3452	0.3613	0.3931	0.4353
	$\mu(a), \%$	0	0.08	0.29	0.62	1.16	2.14	4.04	7.93	12.86	22.21	41.53
	Δq^*	2.052	2.055	2.059	2.067	2.080	2.104	2.148	2.238	2.358	2.589	2.920
	$\gamma(a), \%$	0	0.12	0.35	0.73	1.36	2.52	4.69	9.08	14.90	26.17	48.28
	U_{xx}^*	1.6053	1.6059	1.6063	1.6072	1.6084	1.6112	1.615	1.6225	1.6341	1.6485	1.6769
	$\delta(a), \%$	0	0.04	0.06	0.11	0.2	0.36	0.63	1.07	1.81	3.24	4.77
60°	C^*	0.4851	0.4852	0.4860	0.4880	0.4901	0.4951	0.5021	0.5120	0.5323	0.5781	0.6452
	$\mu(a), \%$	0	0.044	0.208	0.624	1.068	1.973	3.461	5.538	9.767	19.378	33.06
	Δq^*	2.582	2.585	2.591	2.602	2.618	2.649	2.699	2.768	2.905	3.221	3.729
	$\gamma(a), \%$	0	0.1	0.32	0.78	1.37	2.58	4.51	7.21	12.54	24.8	44.41
	U_{xx}^*	1.3319	1.3322	1.3332	1.3340	1.3359	1.3396	1.3452	1.3533	1.3660	1.3920	1.4450
	$\delta(a), \%$	0	0.05	0.11	0.15	0.3	0.59	1.05	1.58	2.49	4.5	8.53
75°	C^*	0.7201	0.7201	0.7211	0.7230	0.7252	0.7301	0.7341	0.7392	0.7561	0.8050	0.9021
	$\mu(a), \%$	0	0	0.13	0.38	0.75	1.4	1.89	2.68	4.93	11.74	25.27
	Δq^*	2.894	2.897	2.906	2.917	2.937	2.969	3.004	3.066	3.209	3.545	4.118
	$\gamma(a), \%$	0	0.13	0.43	0.82	1.48	2.62	3.83	5.97	10.91	22.52	42.31
	U_{xx}^*	1.0052	1.0062	1.0080	1.0100	1.0131	1.0172	1.0239	1.0371	1.0622	1.1020	1.1423
	$\delta(a), \%$	0	0.12	0.3	0.43	0.73	1.2	1.9	3.2	5.7	9.65	13.6
90°	C^*	1.558	1.559	1.560	1.561	1.562	1.565	1.570	1.580	1.597	1.616	1.637
	$\mu(a), \%$	0	0.06	0.12	0.19	0.26	0.45	0.77	1.41	2.50	3.72	5.04
	Δq^*	3.003	3.012	3.02	3.034	3.053	3.086	3.148	3.295	3.564	4.348	6.477
	$\gamma(a), \%$	0	0.29	0.58	1.03	1.65	2.76	4.82	7.83	13.07	22.75	43.81
	U_{xx}^*	0.482	0.483	0.484	0.486	0.488	0.493	0.498	0.511	0.528	0.567	0.651
	$\delta(a), \%$	0	0.21	0.42	0.83	1.45	2.28	3.3	6.02	9.54	17.64	35.06

По численным значениям таблицы были рассчитаны изменения электрических характеристик C^* , Δq^* и U_{xx}^* , вызванные влиянием проводящей плоскости при приближении датчика к ее поверхности.

Поскольку эти характеристики выступают здесь как результаты измерений поля, то уместно трактовать их изменения как погрешности измерений

$$\beta(a) = [x(a) - x(\sim 0)] / x(\sim 0) \times 100\%,$$

где $\beta(a)$ — погрешности электрических параметров $x()$: $C^*(a)$, $\Delta q^*(a)$ и $U_{xx}^*(a)$, соответственно обозначенные в таблице, как $\mu(a)$, $\gamma(a)$ и $\delta(a)$.

Результаты расчетов занесены в ту же таблицу. Из данных таблицы следует, что емкость C^* , дифференциальный электрический заряд Δq^* и напряжение холостого хода U_{xx}^* увеличиваются по мере приближения к заземленной плоскости. Наибольшее увеличение наблюдается для емкости C^* и дифференциального электрического заряда Δq^* , наименьшее — для напряжения холостого хода U_{xx}^* . Это подтверждают и рассчитанные значения погрешности этих параметров.

Значительное увеличение

— емкости C^* объясняется "открытостью" электродной системы датчика, на которую оказывают влияние проводящая заземленная плоскость и внешние тела;

— дифференциального электрического заряда Δq^* объясняется, тем, что его погрешность $\gamma(a)$ пропорциональна сумме погрешностей $\mu(a)$ межэлектродной емкости и $\delta(a)$ напряжения холостого хода, т.е. $\gamma(a) \approx [\delta(a) + \mu(a)]$.

Незначительное увеличение напряжения холостого хода U_{xx}^* объясняется, тем, что его погрешность $\delta(a)$ пропорциональна разности погрешностей $\gamma(a)$ дифференциального электрического заряда и межэлектродной емкости $\mu(a)$, т.е. $\delta(a) \approx [\gamma(a) - \mu(a)]$. Это еще раз подтверждает правильность выбора в ранней работе автора [9] в качестве выходного параметра напряжения холостого хода.

При выходном сигнале датчика в виде напряжения холостого хода и выборе углового размера ЧЭ датчика $\theta_0 \leq 45^\circ$ погрешность датчика, вызванная влиянием проводящей плоскости, не превысит $\delta(a) \leq 4.77\%$ в пространственном диапазоне $0 < a \leq 1$, а в допустимом пространственном диапазоне $0 < a \leq 0.5$ не превысит $\delta(a) \leq 0.36\%$.

Допустимый пространственный диапазон измерения исключает касание датчиком заземленных и токоведущих тел. В допустимом диапазоне $a = R/d \leq 0.5$, т.е. расстояние между центром датчика и внешними телами не должно быть меньше $d = 2R$, а просвет не должен быть меньше R .

Таким образом, результаты, полученные при математическом моделировании датчика с разомкнутой системой электродов, подтвердили возможность его использования вблизи заземленной плоскости.

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выводы по результатам исследований сводятся к следующему.

1) Построена краткая теория поведения однокомпонентного датчика напряженности ЭП с разомкнутой системой электродов в форме полых сферических сегментов вблизи проводящей заземленной плоскости.

2) Составлена математическая модель датчика, учитывающая конструктивные параметры ЧЭ датчика и параметры, задающие пространственное положение датчика относительно заземленной плоскости. В основу математической модели датчика легли основные уравнения краткой теории.

3) Проведено математическое моделирование датчика, позволившее получить численные значения межэлектродной емкости C^* , дифференциального электрического заряда Δq^* и напряжений холостого хода U_{xx}^* в зависимости от пространственного диапазона измерения датчика a и угловых размеров его ЧЭ θ_0 . При этом пространственный диапазон измерения изменялся в диапазоне $0 < a \leq 1$ с шагом 0,1, а угловой размер сферических сегментов θ_0 — от 30° до 90° с шагом в 15° .

4) Установлено, что при приближении к проводящей плоскости наиболее сильно изменяются такие параметры датчика, как межэлектродная емкость C^* и дифференциальный электрический заряд Δq^* , индуцированный на электродах датчика.

5) Установлено, что минимальную погрешность, вызванную приближением датчика к проводящей плоскости, обеспечивает напряжение холостого хода U_{xx}^* , принятое за выходной сигнал датчика.

6) Установлено, что напряжение холостого хода при угловом размера ЧЭ датчика $\theta_0 \leq 45^\circ$, обеспечивает датчику погрешность, вызванную влиянием проводящей плоскости, не превышающую $\delta(a) \leq 4.77\%$ во всем пространственном диапазоне измерения $0 < a \leq 1$.

7) Показано, что при тех же угловых размерах ЧЭ датчика, но в допустимом пространственном диапазоне $0 < a \leq 0.5$ погрешность датчика не превысит $\delta(a) \leq 0.36\%$.

8) Подтверждена возможность применения датчика вблизи проводящей заземленной плоскости.

Подытоживая результаты проведенных исследований, можно заключить, что получены новые сведения о поведении датчика напряженности ЭП с разомкнутой системой электродов, находящимся в однородном поле вблизи заземленной плоскости.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Бирюков С.В., Ложников В.Я. Цифровой измеритель напряженности электрического поля промышленной частоты // Приборы и техника эксперимента. 1981. № 1. С. 275. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=82928888>

2. Сукманов В.И., Сафонов В.И., Ильин А.Н., Масленников М.Ю. Прибор для измерения напряженности электрического поля // Электрические станции. 1987. № 6. С. 69–71.
3. Прибор для измерения электрического поля 50 Гц "ИНЭП-50". Руководство по эксплуатации. URL: http://www.tecnoshans2006.ru/Documents/ACS/pass_IN_AP.DOC
4. Измеритель напряженности ЭП промышленной частоты "ГРАДАН" от компании "Электроэнергетика". URL: https://www.korabel.ru/news/comments/izmeritel_napryazhennosti_elektricheskogo_polya_promishlennoy_chastoti_gradan_ot_kompanii_elektroenergetika.html
5. Измеритель электромагнитных полей ПЗ-60. URL: <https://ciklon-pribor.ru/pdf/p3-60%20pasp.pdf>
6. Тюкин А.В., Бирюков С.В. Сдвоенный электроиндукционный датчик // Приборы и методы измерений, контроля качества и диагностики в промышленности и на транспорте: Материалы VI всероссийской научно-технической конференции с международным участием, 11 апреля 2025. Омск, 2025. С. 72–77.
7. Chunguang S. et al. Research on the Three-Dimensional Power Frequency Electric Field Measurement System // Journal of Sensors. 2022. Vol. 2021. Id. 8859022. DOI: 10.1155/2021/8859022
8. Xiao D. et al. A Power-Frequency Electric Field Sensor for Portable Measurement // Sensors. 2018. Vol. 18, no. 4. Id. 1053. DOI: 10.3390/s18041053
9. Бирюков С.В. Основы взаимодействия однокомпонентного сферического датчика напряженности электрического поля, имеющего разомкнутую систему электродов, с однородным полем // Научное приборостроение. 2025. Т. 35, № 3. С. 45–55. URL: <http://iairas.ru/mag/2025/abst3.php#abst4>
10. Подосенов С.А., Сачков В.И., Соколов А.А. Измерение напряженности электрического поля измерительным преобразователем вблизи проводящей плоскости // Измерительная техника. 1988. № 2. С. 45–46.
11. Мирюлюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 415 с.
12. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 217 с.
13. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электро-технике. М.: Энергия, 1975. 296 с.
14. Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 288 с.
15. Виноградова Е.М., Егоров Н.В., Кримская К.А. Расчет электростатического поля системы сферических сегментов // Журнал технической физики. 2008. Т. 78, вып 8. С. 128–131. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/9490>
16. Разуненко В.А. Потенциал сферического сегмента внутри сферического слоя с круглым отверстием // Вестник ХНУ: Радиофизика и Электроника. 2008. – № 834. С. 120–126.
17. Исаев Ю.Н. Метод расчета распределения зарядов сплошных пластин и пластин с отверстием в форме круга и форме сферических сегментов при наличии внешнего электростатического поля // Известия Томского политехнического университета. 2008. Т. 312, № 4. С. 70–75. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=11481557>
18. Арфкен Г. Математические методы в физике / Пер. с англ. В.В. Чепкунова. М.: Атомиздат, 1970. 705 с. URL: https://vk.com/wall-49014451_7914
19. Moon P., Spenser D.E. Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions, 2 ed. Springer-Verlag, 1988. 244 p.
20. Морзе П.М., Фешбах Х. Методы теоретической физики, т. 1. Пер. с англ., М., 1958. 923 с. URL: <https://obuchalka.org/20191230117099/metodi-teoreticheskoi-fiziki-tom-1-mors-f-m-feshbah-g-1958.html>

**Омский государственный технический университет,
г. Омск, Россия**

Контакты: Бирюков Сергей Владимирович,
sbiryukov154@mail.ru

Материал поступил в редакцию 28.09.2025

SINGLE-COMPONENT SPHERICAL ELECTRIC FIELD STRENGTH SENSOR WITH AN OPEN SYSTEM OF ELECTRODES IN THE FIELD OF A CONDUCTING PLANE

S. V. Biryukov

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

This work aims to study the interaction of a single-component spherical electric field strength sensor with an open system of sensing electrodes and an electric field near a conductive grounded plane. The sensing electrodes are hollow spherical segments with an angular size of θ_0 , diametrically located on a virtual sphere of radius R . A brief theory of the sensor's interaction with the field near the conducting plane is developed. The theory is based on the fundamental equations necessary for constructing a mathematical model of the sensor, allowing one to determine the electric charges q_1 and q_2 on the sensing electrodes, the open-circuit voltage U_{xx} between the sensing electrodes, and the interelectrode capacitance C . A mathematical model of the sensor was developed, and mathematical modeling was performed. As a result of mathematical modeling, numerical values of the interelectrode capacitance C , differential charge $\Delta q = q_1 - q_2$ and open-circuit voltage U_{xx} were obtained. The numerical values were obtained by varying the distance d from the sensor center to the conducting plane for different angular values θ_0 of the spherical segments. For convenience, the relative parameter $a = R/d$ characterizing the spatial measurement range was used in the calculations instead of the distance d . The spatial measurement range varied within the limits $0 < a \leq 1$ with a step of 0.1. The angular size of the spherical segments θ_0 varied from 30° to 90° with a step of 15° . Research has shown that U_{xx} should be selected as the sensor output signal, with the angular sizes of the spherical segments $\theta_0 \leq 45^\circ$. This choice will provide the sensor with an error caused by the influence of the conductive plane that does not exceed $\delta(a) \leq 4.77\%$ over the entire spatial measurement range of $0 < a \leq 1$. When the spatial range is reduced to $a = 0.5$, the sensor error will not exceed $\delta(a) \leq 0.36\%$. The results of the study confirmed the possibility of using the sensor near a conductive grounded plane.

Keywords: field strength, sensor with an open electrode system, field of the conductive plane, interaction of the field with the sensor

REFERENCES

1. Biryukov S.V., Lozhnikov V.Ya. [Digital meter of electric field strength of industrial frequency]. *Pribory i tekhnika eksperimenta* [Instruments and Experimental Techniques], 1981, no. 1, pp. 275. (In Russ.). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=82928888>
2. Sukmanov V.I., Safonov V.I., Ilyin A.N., Maslennikov M.Yu. [Device for measuring electric field strength]. *Ehlektricheskie stantsii* [Electric stations], 1987, no. 6, pp. 69–71. (In Russ.).
3. *Tecnoshans2006. Pribor dlya izmereniya ehlektricheskogo polya 50 Gts "INEHP-50". Rukovodstvo po ehkspluatatsii* [INEP-50 50 Hz Electric Field Measuring Device. Operating Manual]. URL: http://www.tecnoshans2006.ru/Documents/ACS/pass_IN AP.DOC (In Russ.).
4. Korabel. *Izmeritel' napryazhennosti EHP promyshlennoi chastoty "GRADAN" ot kompanii "Ehlektoenergetika"* [The GRADAN industrial frequency voltage meter from Elektroenergetika]. (In Russ.). URL: https://www.korabel.ru/news/comments/izmeritel_napryazhennosti_elektricheskogo_polya_promishlennoy_chastoty_gradan_ot_kompanii_elektoenergetika.html
5. *Izmeritel' ehlektromagnitnykh polei P3-60* [Electromagnetic field meter P3-60]. 57 p. (In Russ.). URL: <https://ciklon-pribor.ru/pdf/p3-60%20pasp.pdf>
6. Tyukin A.V., Biryukov S.V. [Dual electroinductive sensor]. *Pribory i metody izmerenii, kontrolya kachestva i diagnostiki v promyshlennosti i na transporte: Materialy VI vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Proc. VI All-Russ. with Int. Part. Sci. Tech. conf. "Instruments and methods for measurements, quality control and diagnostics in industry and transport". Omsk, 11 Apr 2025], Omsk, 2025, pp. 72–77. (In Russ.).
7. Chunguang S. et al. Research on the Three-Dimensional Power Frequency Electric Field Measurement System. *Journal of Sensors*, 2022, vol. 2021, id. 8859022. DOI: 10.1155/2021/8859022
8. Xiao D. et al. A Power-Frequency Electric Field Sensor for Portable Measurement. *Sensors*, 2018, vol. 18, no. 4, id. 1053. DOI: 10.3390/s18041053
9. Biryukov S.V. [Fundamentals of interaction between a uniform field and a single-component spherical electric field strength sensor with an open system of electrodes]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2025, vol. 35, no. 3, pp. 45–55. (In Russ.). URL: <http://aiaras.ru/mag/2025/abst3.php#abst4>

10. Podosenov S.A., Sachkov V.I., Sokolov A.A. [Measuring the electric field strength with a measuring transducer near a conducting plane]. *Izmeritel'naya tekhnika* [Measurement Techniques], 1988, no. 2, pp. 45–46. (In Russ.).
11. Mirolubov N.N., Kostenko M.V., Levinshtein M.L., Tikhodeev N.N. *Metody rascheta ehlektrostaticheskikh polei* [Methods for calculating electrostatic fields]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1963. 415 p. (In Russ.).
12. Uflyand Ya.S. *Metod parnykh uravnenii v zadachakh matematicheskoi fiziki* [The method of paired equations in problems of mathematical physics]. Leningrad: Nauka Publ., 1977. 217 p. (In Russ.).
13. Tozoni O.V. *Metod vtorichnykh istochnikov v ehlektrotekhnike* [Secondary sources method in electrical engineering]. Moscow: Ehnergiya Publ., 1975. 296 p. (In Russ.).
14. Iossel' Yu.Ya., Kochanov Eh.S., Strunskii M.G. *Raschet ehlektricheskoi emkosti* [Calculation of electrical capacitance]. Leningrad: Ehnergoizdat Publ., 1981. 288 p. (In Russ.).
15. Vinogradova E.M., Egorov N.V., Krimskaya K.A. [Calculation of the electrostatic field of a system of spherical segments]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2008, vol. 78, no. 8, pp. 128–131. (In Russ.). URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/9490>
16. Razunenkov V.A. [Potential of a spherical segment inside a spherical layer with a round hole]. *Vestnik KHNU: Radiofizika i Ehlektronika* [KhNU Bulletin: Radiophysics and Electronics], 2008, no. 834, pp. 120–126. (In Russ.).
17. Isaev Yu.N. [The calculation method of distribution of charges of continuous plates and plates with an aperture in the form of a circle and the form of spherical segments at presence of the external electrostatic field]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University], 2008, vol. 312, no. 4, pp. 70–75. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=11481557> (In Russ.).
18. Arfken G. *Mathematical methods for physicist*. 1966. (Russ. ed.: Arfken G. *Matematicheskie metody v fizike*. Translate V.V. Chepkunov. Moscow: Atomizdat Publ., 750 p.). URL: https://vk.com/wall-49014451_7914
19. Moon P., Spenser D.E. *Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions*, 2 ed. Springer-Verlag, 1988. 244 p. DOI: 10.1007/978-3-642-83243-7
20. Morse P.M., Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics. Vol. 1*. McGraw-Hill Book Company, 1953 (Russ. ed.: Morze P.M., Feshbakh KH. *Metody teoreticheskoi fiziki, t. 1*. Moscow, 1958. 923 p.). URL: <https://obuchalka.org/20191230117099/metodi-teoreticheskoi-fiziki-tom-1-mors-f-m-feshbah-g-1958.html>

Contacts: *Biryukov Sergey Vladimirovich*,
sbiryukov154@mail.ru

Article received by the editorial office on 28.09.2025

INTRODUCTION

Research, development, and design of sensors and measuring instruments for low-frequency electric field (EF) strength are always relevant. Such instruments are used to measure and monitor EFs with an industrial frequency of 50 Hz. Measurements are conducted at workplaces and areas where ultra-high-voltage equipment is installed. The purpose of instrumental monitoring is to hygienically assess the working conditions of maintenance personnel.

Currently used EF strength measuring instruments, which contain spherical inductive EF sensors with a closed system of sensing electrodes (SE), are well described in [1–8]. This work is the next in a series of studies investigating a new type of spherical inductive sensors with an open SE system, consisting of hollow spherical segments. The author's previous work was devoted to investigating the behavior of sensors with an open system of electrodes in a uniform field [9]. In this paper, we will consider the behavior of an EF sensor in the presence of a grounded conductive plane. A similar problem was solved in [10] for SEs in the form of solid spherical segments. In this paper, we consider a special case for spherical segments representing solid hemispheres.

PROBLEM STATEMENT

To conduct a theoretical study of the behavior of a single-component spherical electroinductive field strength sensor with an open system of conductive electrodes in an electric field with a grounded conductive plane. This requires:

- 1) developing a brief theory of the interaction of a sensor located in an EF with a grounded conductive plane;
- 2) constructing a mathematical model of the interaction of a sensor and an EF with a grounded conductive plane;
- 3) conducting mathematical modeling, based on the results, to determine the effect of a grounded conductive plane on the sensor's electrical parameters, such as the electric charge induced on the sensor's electrodes, open-circuit voltage, and the capacitance between the sensor's electrodes;
- 4) estimating the sensor's error in terms of interelectrode capacitance, electric charge, and open-circuit voltage;
- 5) drawing a conclusion based on the obtained results.

THEORY

The solution to the stated problems will involve examining the behavior of an electroinductive spheri-

cal field strength sensor with an open electrode system when operating in a field near a grounded plane. To do this, we will solve the following problem. We will place two conductive spherical shells in the form of spherical segments lying on the surface of a virtual sphere of radius R above a conductive grounded plane. The spherical segments will serve as the sensor's sensing elements. We will designate the surfaces of the first and second spherical segments as S_1 and S_2 , define their dimensions by an angle θ_0 , and the current angular value by an angle θ . We will assume the distance from the center of the virtual sphere to the plane to be equal to d . The situation considered in the problem is shown in the figure.

Fig. System of spherical electrodes for studying a sensor in the electric field of a grounded plane. Key parameters: S_1, S_2 — sensor SE, R — radius of the virtual sphere, d — distance from the sensor to the grounded plane, θ_0 — angular size of the SE

We will use collective fundamental works [11–14] and the works of individual authors [15–17] and extract from them the main theoretical principles necessary for calculating sensors with an open circuit system of electrodes located in the field of a grounded plane. We will substantiate the main electrical parameters of the sensor, which should determine the identified theoretical principles.

To solve the problem, we will specify the initial position of the spherical sensor in the EP with a conducting plane. We will denote the distance from the sensor center to the conducting plane with coordinate $z = 0$ by the letter d . When the described system of SEs is located in the EP with a grounded plane, opposite electric charges of $-q_1$ and $+q_2$ are induced on their surfaces S_1 and S_2 . Under the influence of an EF, sensor electrodes 1 and 2 acquire electrical potentials φ_{01} and φ_{02} , related to the electric charges through the interelectrode capacitance C , which is the sensor's capacitance $C_{\text{д}}$. The electric charges and potentials of the sensor electrodes are proportional to the EF strength.

Therefore, the main electrical parameters of the sensor will be the electric charges q , potentials φ , and capacitance $C_{\text{д}}$. The theoretical principles being developed will be aimed at determining these.

In our situation (see figure), we will solve a boundary value problem for the Laplace equation. To do this, we set the boundary conditions in the form

$$\Delta\varphi = 0; \quad \varphi|_{S_1} = \varphi_{01}; \quad \varphi|_{S_2} = \varphi_{02}; \quad \varphi|_{z=0} = 0, \quad (1)$$

where S_1 and S_2 are the surfaces of electrodes 1 and 2, respectively; φ_{01} , φ_{02} are the specified boundary con-

ditions. The solution will be carried out using the method of paired integral equations [9].

For convenience of solving the problem, we introduce a bispherical coordinate system (ξ, η, θ) [18, Ch. 2]–[20] (see Fig.). From [1], the following relationship between bispherical coordinates and Cartesian coordinates follows:

$$\begin{cases} x = \frac{c \cdot \sin \xi \cdot \cos \theta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ y = \frac{c \cdot \sin \xi \cdot \sin \theta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ z = \frac{c \cdot \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \end{cases} \quad (2)$$

where c is the distance from the plane to the first focus of the bispherical coordinate system, the second focus is located below the plane at the same distance; η varies from ∞ to $-\infty$; ξ varies within the range $0 \leq \xi \leq \pi$; θ varies within the range $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (see Fig.); $\operatorname{ch} \eta$ and $\operatorname{sh} \eta$ are the hyperbolic cosine and sine.

Satisfying boundary conditions (1) and using the well-known [12] expression

$$q = \int_S \sigma(S) dS, \quad (3)$$

we find the electric charges on electrodes 1 and 2. To do this, it is necessary to integrate the surface charge

density $\sigma(S) = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_i}$ over the surfaces S_1 and S_2 of electrodes 1 and 2. We then obtain:

$$\begin{cases} q_1 = 8\pi\varepsilon d \int_0^{\xi_1} f_1(t) \frac{\cos \frac{t}{2} \operatorname{sh} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos t} dt, \\ q_2 = -8\pi\varepsilon d \int_{\xi_2}^{\pi} f_2(t) \frac{\sin \frac{t}{2} \operatorname{ch} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos t} dt, \end{cases} \quad (4)$$

where $f_1(t)$ and $f_2(t)$ are functions [12] obtained by solving a system of paired integral equations:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_1} f_1(\theta) \left[\frac{\cos \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta + \theta_0)} + \frac{\cos \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta - \theta_0)} \right] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_2}^{\pi} f_2(\theta) \left[\frac{1}{\sin \frac{\theta + \theta_0}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\theta - \theta_0}{2}} \right] d\theta - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{\xi_2}^{\pi} f_2(\theta) \times \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta + \theta_0)} - \frac{\sin \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta - \theta_0)} \right] d\theta = \frac{4}{\pi} \Phi_{01} \left[\frac{2 \operatorname{ch} \eta_1 - \cos \frac{3\theta_0}{2} - 3}{2a(\operatorname{ch} \eta_1 - \cos \theta_0)} \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f_2(\theta_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\xi_2}^{\pi} f_2(\theta) \left[\frac{\cos \frac{\theta - \theta_0}{2} \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta - \theta_0)} + \frac{\cos \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(\theta + \theta_0)} \right] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\xi_1} f_1(\theta) \left[\frac{1}{\sin \frac{\theta + \theta_0}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\theta - \theta_0}{2}} \right] d\theta - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_1} f_1(\theta) \times \left[\frac{\sin \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(t + x)} - \frac{\sin \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \operatorname{sh} \eta_1}{\operatorname{ch} 2\eta_1 - \cos(t - x)} \right] d\theta = \frac{4}{\pi} \Phi_{02} \left[\frac{2 \operatorname{ch} \eta_1 - \sin \frac{3\theta_0}{2} - 3}{2a(\operatorname{ch} \eta_1 - \cos \theta_0)} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

where $a = R / d$ is the relative distance from the sensor center to the grounded plane; R is the radius of the spherical electrode; d is the distance from the sensor center to the grounded plane; Φ_{01} and Φ_{02} are the po-

tential functions of SE 1 and 2 of the sensor in the field of the grounded plane, determined from the system of paired integral equations (5), (6).

Potential functions Φ_{01} and Φ_{02} are respectively

equal to (7)

$$\begin{cases} \Phi_{01} = \Phi_{01}^O \cdot \frac{\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos t} = E_0 R \frac{\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos t}, \\ \Phi_{02} = \Phi_{02}^O \cdot \frac{\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos \theta_0} = E_0 R \frac{\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\eta_1}{2}}{\operatorname{ch} \eta_1 - \cos \theta_0}, \end{cases} \quad (7)$$

where Φ_{01}^O and Φ_{02}^O are the potential functions of SE 1 and 2 of the sensor in a uniform EF, both are determined from a system of paired integral equations obtained for a uniform field. In the notation for potential functions, "O" denotes potential functions in a uniform field; $a = R / d$ is the spatial measurement range; R is the sensor radius; d is the distance to the field source.

The solution of the system of paired integral equations (5), (6) helps to find the functions $f_1(\theta_0)$ and $f_2(\theta_0)$, which are used to determine the electric charges (4) induced by the field on the surfaces of the SE of the gauge, and the electric capacitance created by the SE [11]

$$C = 4\pi\epsilon_1 R \left[1 - 2 \int_0^{\theta_{01}} f(\theta) \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right]. \quad (8)$$

The electric potentials φ_{01}^H and φ_{02}^H (H in the notation means the potential in a non-uniform field) of SE 1 and 2 are determined through the electric charges q_1 and q_2 of the sensor found from expressions (4) and its capacitance (8)

$$\varphi_{01}^H = \frac{q_1}{C} \quad \text{и} \quad \varphi_{02}^H = \frac{q_2}{C}. \quad (9)$$

The expressions (4) found for the electric charges induced on the sensor's SE and their potentials (9) allow us to determine:

– differential electric charge

$$\Delta q = q_1 - q_2, \quad (10)$$

– potential difference of the gauge's SE, respectively equal to the open-circuit voltage

$$U_{xx} = \varphi_{01}^H - \varphi_{02}^H. \quad (11)$$

The rationale for considering the differential electric charge, rather than the charges q_1 and q_2 separately, is that in a uniform field $q_1 = |-q_2|$, while in a non-uniform field $q_1 \neq |-q_2|$, therefore, it is difficult to estimate their measurements due to the field's non-uniformity.

The expressions (3)–(11) obtained by the author in

formulating a brief theory of the interaction between a single-component spherical field strength sensor with an open SE system and a field with a conducting plane will form the basis of a mathematical model of the sensor used for further research.

MATHEMATICAL MODELING AND ITS RESULTS

To conduct the mathematical modeling, a mathematical model was constructed combining expressions (3)–(11). The mathematical model allows one to specify the structural dimension θ_0 of the gauge's SE and the spatial distance d from the sensor's center to the grounded plane. The spatial distance was specified using the relative distance (spatial measurement range) $a = R / d$.

By specifying different values for the SE's angular dimensions θ_0 and the relative distance a , the mathematical modeling:

- determined the sensor's electrical parameters, such as the interelectrode capacitance C , the SE's differential charge Δq , and the open-circuit voltage U_{xx} ;
- assessed changes in these parameters caused by the sensor's approach to the grounded plane.

Mathematical modeling was performed for gauges with SEs in the form of hollow spherical segments with angular dimensions θ_0 varying from 30° to 90° in 15° increments and in a spatial range a varying in the interval $0 < a \leq 1$ in 0.1 increments.

The following normalizations were adopted for the modeling: $\Delta q^* = \Delta q / (\pi\epsilon_0 R^2 E_0)$ — for differential charge; $U_{xx}^* = U_{xx} / R \cdot E_0$ — for open-circuit voltages; $C^* = C / (4\pi\epsilon_0 R)$ — for electrical capacitance, where $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m is the electrical constant; E_0 is the uniform field strength at $a \rightarrow 0$.

The results of the mathematical modeling as numerical values of the sought parameters are presented in the table.

Tab. Calculated values of the electrical characteristics of the sensor when it operates in a field with a grounded plane depending on its design parameters and height above the plane

Based on the numerical values in the table, changes in the electrical characteristics C^* , Δq^* и U_{xx}^* , caused by the influence of the conducting plane as the sensor approaches its surface, were calculated. Since these characteristics act here as results of field measurements, it is appropriate to interpret their changes as measurement errors

$$\beta(a) = [x(a) - x(\sim 0)] / x(\sim 0) \times 100\%,$$

where $\beta(a)$ is the error in the electrical parameters $x()$: $C^*(a)$, $\Delta q^*(a)$, and $U_{xx}^*(a)$, respectively designated in the table as $\mu(a)$, $\gamma(a)$, and $\delta(a)$.

The calculation results are included in the same table. It follows from the data in the table that the capacitance C^* , the differential electric charge Δq^* , and the open-circuit voltage U_{xx}^* increase as they approach the grounded plane. The greatest increase is observed for the capacitance C^* and the differential electric charge Δq^* , and the smallest for the open-circuit voltage U_{xx}^* . This is confirmed by the calculated error values of these parameters.

The significant increase in

–capacitance C^* is explained by the "openness" of the sensor's electrode system, which is influenced by the conductive grounded plane and external bodies;

– differential electric charge Δq^* is explained by the fact that its error $\gamma(a)$ is proportional to the sum of the errors $\mu(a)$ of the interelectrode capacitance and of the open-circuit voltage $\delta(a)$, i.e., $\gamma(a) \approx [\delta(a) + \mu(a)]$.

The slight increase in the open-circuit voltage U_{xx}^* is explained by the fact that its error $\delta(a)$ is proportional to the difference between the errors $\gamma(a)$ of the differential electric charge and the interelectrode capacitance $\mu(a)$, i.e., $\delta(a) \approx [\gamma(a) - \mu(a)]$. This once again confirms the correctness of the choice in the author's early work [9] as the output parameter of the open-circuit voltage.

With the sensor output signal in the form of an open-circuit voltage and the angular dimension of the sensor SE selected as $\theta_0 \leq 45^\circ$, the sensor error caused by the influence of the conductive plane will not exceed $\delta(a) \leq 4.77\%$ in the spatial range $0 < a \leq 1$, and in the permissible spatial range $0 < a \leq 0.5$, it will not exceed $\delta(a) \leq 0.36\%$.

The permissible spatial measurement range prevents the sensor from touching grounded and current-conductive objects. In the permissible range $a = R/d \leq 0.5$, i.e., the distance between the sensor's center and external objects should not be less than $d = 2R$, and the clearance should not be less than R .

Thus, the results obtained from mathematical modeling of a sensor with an open-loop electrode system confirmed the possibility of its use near a grounded plane.

CONCLUSIONS

The findings of the study are as follows.

1) A brief theory of the behavior of a single-component field strength sensor with an open-loop system of electrodes in the form of hollow spherical segments near a conductive grounded plane has been developed.

2) A mathematical model of the sensor has been developed, taking into account the design parameters of the sensor's SE and the parameters defining the sensor's spatial position relative to the grounded plane. The mathematical model of the sensor is based on the fundamental equations of the brief theory.

3) Mathematical modeling of the sensor has been performed, yielding numerical values for the interelectrode capacitance C^* , differential electric charge Δq^* , and open-circuit voltage U_{xx}^* , depending on the sensor's spatial measurement range a and the angular dimensions of its SE θ_0 . The spatial measurement range was varied in the range $0 < a \leq 1$ in 0.1 increments, and the angular size of the spherical segments θ_0 was varied from 30° to 90° in 15° increments.

4) It was found that when approaching a conductive plane, the sensor parameters that change most significantly are the interelectrode capacitance C^* and the differential electric charge Δq^* induced on the sensor electrodes.

5) It was found that the minimum error caused by approaching the conductive plane is provided by the open-circuit voltage U_{xx}^* , taken as the sensor output signal.

6) It was established that the open-circuit voltage at an angular size of the sensor SE of $\theta_0 \leq 45^\circ$ will provide the sensor with an error caused by the influence of the conductive plane, not exceeding $\delta(a) \leq 4.77\%$ over the entire spatial measurement range of $0 < a \leq 1$.

7) It was shown that, with the same angular dimensions of the sensor SE but in the permissible spatial range of $0 < a \leq 0.5$, the sensor error will not exceed $\delta(a) \leq 0.36\%$.

8) The possibility of using the sensor near a conductive grounded plane was confirmed.

Summarizing the results of the conducted studies, it can be concluded that new information has been obtained on the behavior of an EF voltage sensor with an open electrode system, located in a uniform field near a grounded plane.