

УДК 537.21,517.958

© А. С. Бердников, С. В. Масюкевич, К. В. Соловьев, Ю. И. Хасин, 2025

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РАДИОЧАСТОТНЫХ ТРАНСПОРТИРУЮЩИХ КАНАЛОВ

В статье рассматриваются аналитические выражения для потенциалов электрических полей, которые соответствуют цилиндрическим радиочастотным каналам. Электроды таких каналов представляют собой последовательность идентичных плоских диафрагм, в частном случае круговых диафрагм с апертурами постоянного радиуса. Полученные выражения позволяют оценивать возмущения транспортирующих электрических полей при приближении к краям электродов и могут быть полезны для быстрого качественного моделирования радиочастотных устройств, предназначенных для изоляции, транспортировки и фокусировки ионов.

Ключевые слова: аналитические решения уравнения Лапласа, высокочастотные электрические поля, электронно-оптические системы с периодическими электродами, ионопроводы

ВВЕДЕНИЕ

Устройства изоляции и транспортировки ионов, которые представляют собой последовательность плоских диафрагм той или иной формы с приложенными к ним радиочастотными электрическими напряжениями, достаточно широко распространены [1, 2]. В данной работе будет рассматриваться узкое (в смысле разнообразия конструкций), однако широко используемое подмножество подобных устройств — прямолинейные транспортирующие каналы цилиндрической формы, в большинстве случаев составленные из плоских круговых диафрагм. Более продвинутые аналитические модели электрических потенциалов для радиочастотных транспортирующих каналов сложной формы приводятся в [3–5].

При конструировании аналитических моделей радиочастотных электрических полей используется принцип квазистатичности. При выполнении условия квазистатичности (см. далее) высокочастотный электрический потенциал такого поля можно представить как произведение функции времени, задающей закон изменения напряжений на электродах, и потенциала электростатического поля, соответствующего постоянным напряжениям на электродах.

Предположение о квазистатичности высокочастотного электрического поля справедливо, когда время характерного изменения электрических напряжений на электродах существенно превышает время распространения электромагнитного возмущения в пределах устройства. Типичные размеры электродных конфигураций, используемых в конструкциях ионно-оптических систем, составляют не более нескольких десятков сантиметров (как

правило, значительно меньше). С учетом равенства скорости света и скорости распространения электромагнитного возмущения указанное предположение заведомо выполняется для частот электрических напряжений, обычно используемых в ионно-оптических устройствах (от сотен килогерц до нескольких мегагерц, редко — несколько гигагерц).

При таких условиях электромагнитное возмущение распространяется практически мгновенно, в силу чего высокочастотный электрический потенциал, изменяющийся во времени и пространстве, можно представить как произведение функции времени и электростатического потенциала, зависящего от пространственных координат. Зависящий от времени множитель описывает временное изменение электрических напряжений, а зависящий от координат потенциал соответствует постоянным напряжениям на электродах, которые изменяются во времени синхронно и пропорционально друг другу.

Иными словами, в рамках квазистатической модели предполагается, что создается такое электрическое поле, которое в каждой точке пространства синхронно и пропорционально изменяется в соответствии с законом изменения электрических напряжений на электродах. Хотя этот шаг представляет собой, по сути, пренебрежение электродинамическими эффектами, т.е. сопутствующей электромагнитной волной, возникающей в соответствии с уравнениями Максвелла при любом изменении электрических и магнитных полей во времени, но он вполне допустим, если частота напряжений, прикладываемых к электродам, не слишком велика (в указанном выше смысле).

РАДИОЧАСТОТНЫЕ КАНАЛЫ ТРАНСПОРТИРОВКИ С КРУГОВЫМИ ДИАФРАГМАМИ

Радиочастотные цилиндрические ловушки и транспортирующие цилиндрические каналы типа SRIG (англ., Stacked Ring Ion Guides) представляют собой последовательность диафрагм одинаковой формы и размера с приложенными к ним синусоидальными радиочастотными либо импульсными электрическими напряжениями [1, 2, 6–10]. Диафрагмы располагаются друг от друга на одинаковом расстоянии и формируют цилиндрический канал транспортировки с прямой осью. На рис. 1 показана типичная цилиндрическая радиочастотная ловушка типа SRIG с круговыми диафрагмами одинакового радиуса.

В типичном случае приложенные синусоидальные радиочастотные напряжения характеризуются сдвигом фазы π между соседними диафрагмами. Это означает, что знаки и амплитуды синусоидальных напряжений, приложенных к отдельным диафрагмам, чередуются по правилу

$$+U_R, -U_R, +U_R, -U_R, +U_R, -U_R, \dots \quad (1)$$

Поэтому в любой момент времени напряжения на соседних диафрагмах имеют противоположные знаки, что должно максимизировать напряженность управляющего радиочастотного электрического поля.

В силу симметрии геометрической формы электродов и антисимметрии напряжений, приложенных к электродам, плоскость, вдоль которой электрический потенциал тождественно равен нулю, располагается посередине между соседними электродами. Это позволяет добавить фиктивные диафрагмы с нулевыми напряжениями без искажения электрического поля и тем самым ввести в рассмотрение периодические последовательности диафрагм и напряжений, которые организованы в соответствии с правилом:

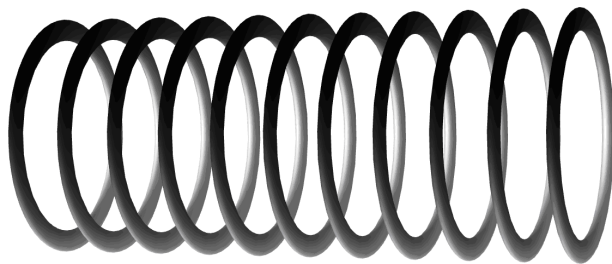


Рис. 1. Структура периодических кольцевых электродов цилиндрической радиочастотной ловушки типа SRIG.

$$+U_R, 0, -U_R, 0, +U_R, 0, -U_R, 0, +U_R, 0, -U_R, \dots \quad (2)$$

Если сдвинуть на один шаг вдоль цилиндрической оси электроды и приложенные к ним электрические напряжения, заданные в соответствии со схемой (2), то получим аналитическое решение для электрического поля, соответствующего напряжениям на диафрагмах, организованным по правилу:

$$0, +U_R, 0, -U_R, 0, +U_R, 0, -U_R, 0, +U_R, 0, \dots \quad (3)$$

Известно [2], что вдали от краев электродов, в окрестности оси транспортирующего канала, электростатический потенциал такой системы электродов с приложенными к ним периодически напряжениями, соответствующими последовательности напряжений (1), описывается с хорошей точностью выражением

$$U(z, r) = \frac{U_R}{I_0(\lambda R)} \cos(\lambda z + \beta) I_0(\lambda r), \quad (4)$$

где z, r — аксиальная и радиальная координаты ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$); U_R — статические потенциалы, приложенные к диафрагмам; I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [11–13]; R — радиус круговых диафрагм; β определяет сдвиг последовательности диафрагм относительно начала координат; λ — параметр геометрического масштаба. Для напряжений на диафрагмах по схеме (1) параметр λ равен π / L , где L — расстояние между соседними диафрагмами, для схем (2) и (3) параметр λ равен $\pi / (2L)$. Причина: для схемы (1) расстояние между соседними максимумами и минимумами осевого распределения потенциала, которые соответствуют размещению диафрагм вдоль оси, равно $\Delta(\lambda z + \beta) = \lambda \Delta z = \pi$, где $\Delta z = L$, тогда как для схем (2), (3) расстояние между соседними максимумами/минимумами и нулями осевого распределения равно $\Delta(\lambda z + \beta) = \lambda \Delta z = \pi / 2$.

Эквипотенциальные линии и трехмерный график электрического потенциала, заданного формулой (4), в нормированных координатах (z, r) показан на рис. 2. Строго говоря, для создания именно такого электрического поля во всем объеме транспортирующей ловушки необходимо, чтобы электроды, формирующие последовательность диафрагм, имели форму эквипотенциальных поверхностей, показанных на рис. 2. Однако на практике достаточно использовать плоские кольцевые диафрагмы с соответствующими электрическими потенциалами. Для таких электродов электрическое поле в середине канала вдали от краев электродов будет с хорошей точностью описываться аналитическим выражением (4) (см. [2]).

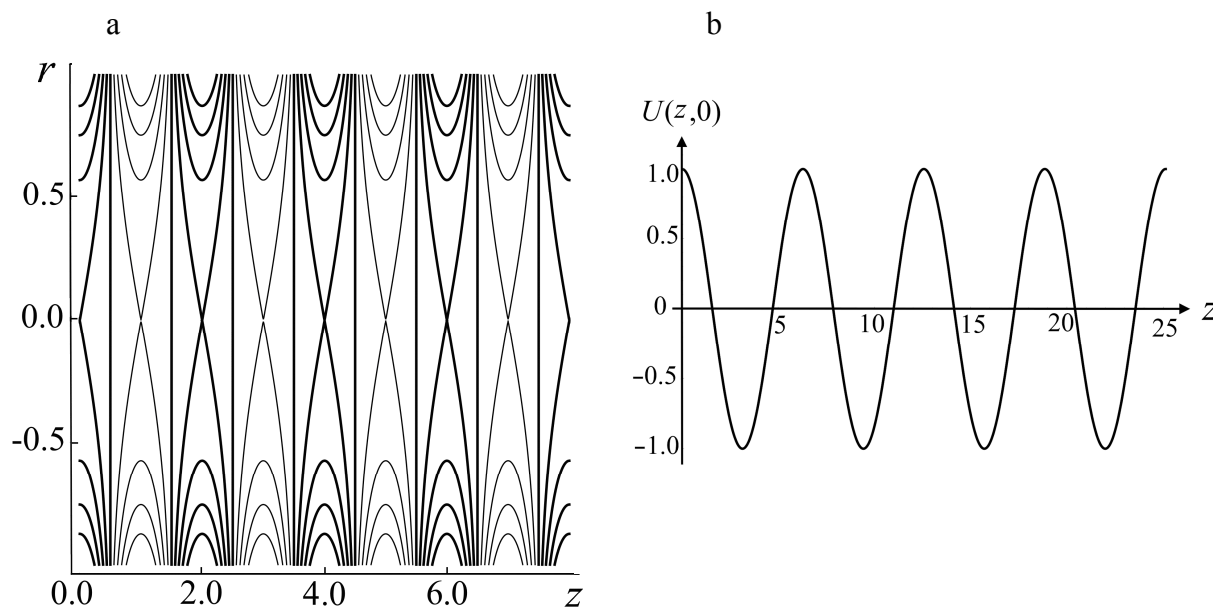


Рис. 2. Статический электрический потенциал (4) в нормированных координатах. а — эквипотенциальные линии на плоскости (z, r) , б — поведение потенциала на оси $r = 0$.

Потенциал (4) представляет собой взвешенную сумму с постоянными коэффициентами, составленную из двух линейно-независимых потенциалов, задаваемых формулами

$$U_c(z, r) = \frac{U_R}{I_0(\lambda R)} \cos(\lambda z) I_0(\lambda r), \quad (5)$$

$$U_s(z, r) = \frac{U_R}{I_0(\lambda R)} \sin(\lambda z) I_0(\lambda r). \quad (6)$$

На оси симметрии $r = 0$ потенциал (5) ведет себя как $U_0 \cos(\lambda z)$, а потенциал (6) — как $U_0 \sin(\lambda z)$, где $U_0 = U_R / I_0(\lambda R)$ — амплитуда пространственных колебаний электростатического потенциала на оси системы. Электростатические потенциалы (5), (6) оказываются полезными инструментами для конструирования аналитических моделей электрического поля при сложных конфигурациях радиочастотных напряжений на электродах, включая сюда импульсные напряжения и напряжения со сложным спектром.

Функции (5) могут использоваться для описания электростатического поля периодической последовательности кольцевых диафрагм с напряжениями, соответствующими периодической последовательности напряжений (2), а функции (6) — диафрагм с напряжениями, соответствующими периодической последовательности напряжений

(3). Для этого в формулах (5), (6) необходимо использовать геометрический масштаб $\lambda = \pi / (2L)$, где L — расстояние между соседними круговыми диафрагмами.

На рис. 3, а, показаны эквипотенциальные поверхности, которые могут использоваться как электроды для создания электрического поля с электрическим потенциалом (5). На рис. 3, б, показаны эквипотенциальные поверхности, которые могут использоваться как электроды для создания электрического поля с электрическим потенциалом (6). Жирными линиями показаны эквипотенциалы $U(z, r) = +U_R$, тонкими линиями показаны эквипотенциалы $U(z, r) = -U_R$, пунктирными линиями показаны эквипотенциалы $U(z, r) = 0$.

Электрическое поле устройства может быть суммой электрических полей с потенциалами (5), (6), причем весовые коэффициенты суммы должны контролироваться напряжениями на электродах. Объединить электроды на рис. 3, а, и рис. 3, б, в единую систему невозможно из-за их наложения друг на друга (рис. 3, с). Однако при замене точных диафрагм криволинейной формы на плоские круговые диафрагмы (рис. 3, д) получаем систему электродов, для которой в центральной части транспортирующего канала вдали от краев диафрагм можно с высокой точностью создавать как электрическое поле (5), так и электрическое поле (6), в зависимости от электрических напряжений, прикладываемых к электродам.

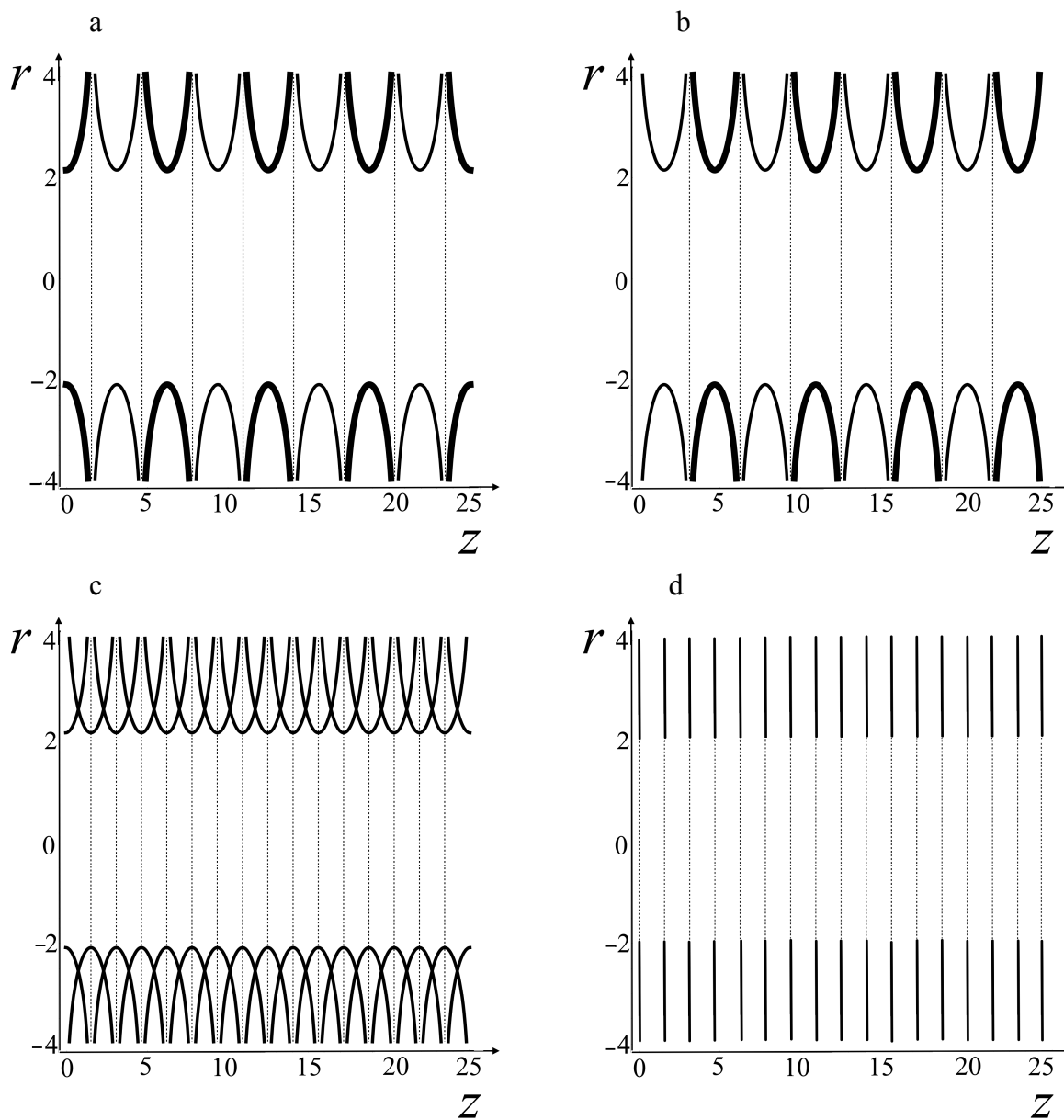


Рис. 3. Осесимметричные эквипотенциальные поверхности, которые могут использоваться в качестве электродов.

а — для электрического потенциала (5), b — для электрического потенциала (6), c — наложение систем электродов "а" и "b" друг на друга, d — огрубленная система электродов "с" в виде плоских круговых диафрагм

Возмущения электрических полей, которые вызываются такой заменой идеальных электродов, рассматриваются далее.

КРАЕВЫЕ ПОЛЯ И ВОЗМУЩЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ИСКАЖЕНИЕМ ФОРМЫ ЭЛЕКТРОДОВ

На рис. 3 показан процесс замены идеальных криволинейных электродов на конструктивно бо-

лее удобные плоские диафрагмы. Очевидно, при этом происходит искажение точного электрического поля, но из общих соображений можно ожидать, что такие искажения быстро затухают при удалении от краев плоских диафрагм. В данном разделе рассматриваются оценки скорости затухания и определяются критические геометрические параметры плоских диафрагм, при которых искажения электрического поля в центральной части

канала транспортировки можно считать незначительными.

Рассмотрим вариант, когда знаки и амплитуды высокочастотных напряжений, приложенных к диафрагмам, чередуются в соответствии с правилом (1). В силу периодичности как геометрии электродов, так и прикладываемых к ним электрических напряжений распределение электрического потенциала вдоль горизонтальной линии $r = R$ представляет собой периодическую функцию и в силу этого может быть разложено в ряд Фурье:

$$U(z, R) = U_R \sum_{k=1, \infty} u_k \sin\left(\frac{k\pi z}{L}\right). \quad (7)$$

Здесь точка $z = -L/2$ соответствует диафрагме с напряжением $-U_R$, точка $z = +L/2$ соответствует диафрагме с напряжением $+U_R$, точка $z = 0$ соответствует середине между соседними диафрагмами, L — расстояние между соседними диафрагмами, u_k — нормированные безразмерные амплитуды синусоидальных гармоник ряда Фурье. Как будет показано далее, косинусоидальные гармоники и четные синусоидальные гармоники равны нулю в силу симметрии электродов и электрических напряжений.

Точное решение задачи Дирихле для осесимметричного уравнения Лапласа с краевым условием (7) имеет вид:

$$U(z, r) = U_R \sum_{k=1, \infty} u_{2k-1} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi z}{L}\right) \frac{I_0((2k-1)\pi r/L)}{I_0((2k-1)\pi R/L)}, \quad (8)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Поскольку функция $I_0(\xi)$ экспоненциально быстро растет с увеличением аргумента ξ , так что справедлива оценка $I_0(\xi) \approx e^\xi / \sqrt{2\pi\xi}$ при $\xi \geq 0.27$, то старшие гармоники быстро затухают при смещении по радиусу от границы $r = R$ в сторону оси $r = 0$. Оценка вклада третьей и пятой гармоник по отношению к первой гармонике при отступе на шаг Δr от края круговых диафрагм имеет вид

$$\begin{aligned} \left| \frac{U_3(z, r)}{U_1(z, r)} \right| &\approx \\ &\approx \frac{u_3}{u_1} \frac{I_0(3\pi(R - \Delta r)/L)}{I_0(3\pi R/L)} \frac{I_0(\pi R/L)}{I_0(\pi(R - \Delta r)/L)} \approx \\ &\approx \exp(-3\pi\Delta r/L), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{U_5(z, r)}{U_1(z, r)} \right| &\approx \\ &\approx \frac{u_5}{u_1} \frac{I_0(5\pi(R - \Delta r)/L)}{I_0(5\pi R/L)} \frac{I_0(\pi R/L)}{I_0(\pi(R - \Delta r)/L)} \approx \\ &\approx \exp(-5\pi\Delta r/L). \end{aligned}$$

В частности, уже при $R/L \geq 2$ вклад старших гармоник в приосевой области $0 \leq r \leq R/4$ пренебрежимо мал.

Экспоненциальный рост электрических потенциалов (4) при удалении от оси $r = 0$ в сторону границы $r = R$ имеет и другой побочный эффект. А именно, электрическое напряжение U_R , прикладываемое к диафрагмам, экспоненциально затухает по мере приближения к оси $r = 0$:

$$U_0 = \frac{U_R}{I_0(\pi R/L)} \approx U_R \exp(-\pi R/L), \quad (10)$$

где U_0 — амплитуда пространственных колебаний электрического потенциала на оси системы.

В силу формулы (10) при достаточно больших значениях безразмерного параметра R/L управляющее воздействие со стороны высокочастотного электрического поля на ионы, находящиеся вблизи оси, практически отсутствует. В частности, при $R \geq 4L$ высокочастотное электрическое поле на оси системы пренебрежимо мало при любых разумных амплитудах синусоидальных напряжений, прикладываемых к электродам транспортирующего канала.

Данный эффект надо учитывать, если требуется управлять движением ионов в приосевой области транспортирующего канала с помощью высокочастотного электрического поля транспортирующего канала. В частности, в случае транспортировки ионов при помощи эффекта А-волны [14–17] безразмерный параметр R/L должен быть, с одной стороны, достаточно велик, чтобы эффект от воздействия старших пространственных гармоник высокочастотного электрического поля на оси системы был небольшим. С другой стороны, безразмерный параметр R/L должен быть достаточно мал, чтобы на оси присутствовало заметное высокочастотное электрическое поле и чтобы высота псевдопотенциальных барьеров вокруг локальных ловушек А-волны на оси системы обеспечивала захват и принудительную транспортировку ионов.

Для более точной оценки вклада старших пространственных гармоник рассматриваемого электрического поля используем грубую модель для распределения электрического потенциала вдоль горизонтальной линии $r = R$, при которой в про-

межутке между соседними диафрагмами электрический потенциал аппроксимируют прямой линией (рис. 4, а). В силу симметрий краевого условия амплитуды косинусоидальных гармоник и амплитуды четных синусоидальных гармоник обращаются в ноль. Для рассматриваемого краевого условия амплитуды синусоидальных гармоник $\sin(k\pi z / L)$ равны

$$u_k = \frac{L}{L-H} \frac{8}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{k\pi H}{2L}\right), \quad (11)$$

где L — расстояние между соседними диафрагмами, H — толщина диафрагмы ($0 \leq H \leq L$), $k = 1, 2, 3, \dots$ — номер гармоники. В частности, из формулы (11) следует, что все четные синусоидальные гармоники равны нулю, как это и должно быть из-за симметрии формы периодического краевого условия. При $H/L = 1/3$ третья синусоидальная гармоника обращается в ноль, что, по-видимому, является оптимальным выбором для цилиндрических транспортирующих каналов типа SRIG с круговыми диафрагмами или выбором,

достаточно близким к оптимальному. Кроме того, амплитуда первой гармоники показывает, какая часть приложенных электрических напряжений используется для полезной компоненты радиочастотного электрического поля на оси цилиндрического канала.

Точно также для схемы напряжений (2) и нормированного кусочно-линейного краевого условия на границе $r = R$, показанного на рис. 4, б, амплитуды синусоидальных гармоник $\sin(k\pi z / 2L)$ равны

$$u_k = \frac{L}{L-H} \frac{16}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{k\pi(L-H)}{4L}\right). \quad (12)$$

Стоит обратить внимание, что период краевых условий составляет в этом случае величину $4L$, а не $2L$, что соответствующим образом сказывается как на частотах пространственных гармоник высокочастотного электрического поля, так и на затухании этих гармоник при удалении от края диафрагм.

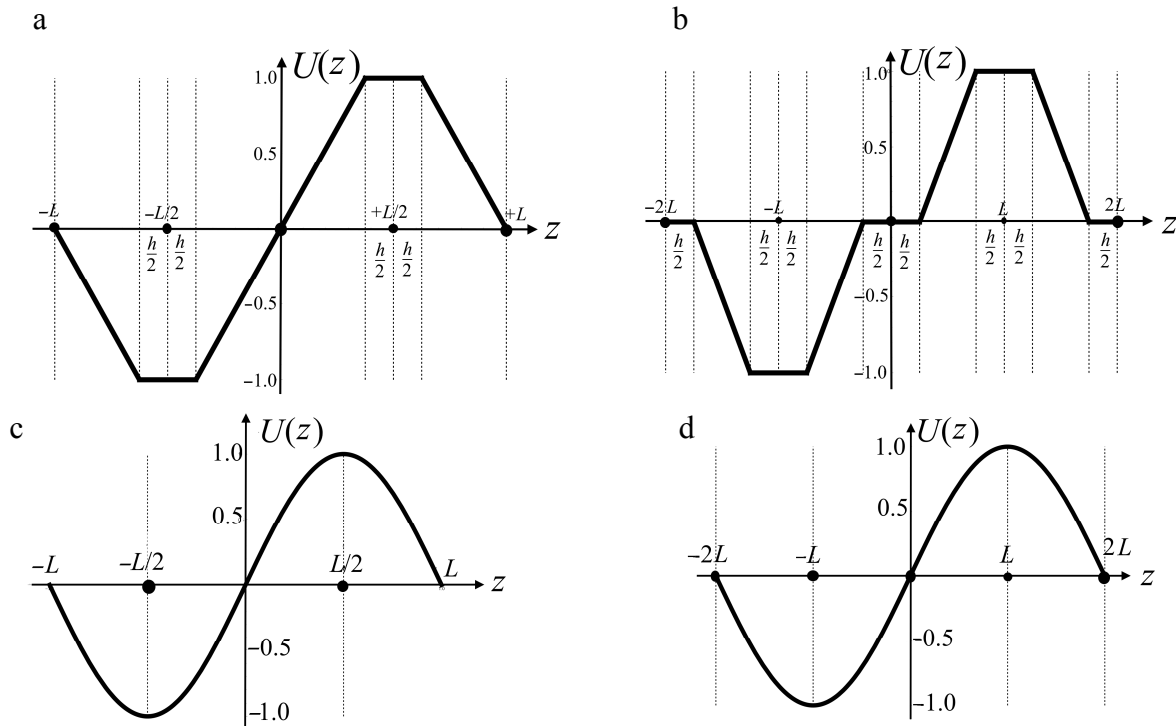


Рис. 4. Нормированное граничное условие вдоль границы $r = R$.

а — для соседних диафрагм с напряжениями противоположных знаков, б — при наличии промежуточной диафрагмы с нулевым напряжением, с — аналитическое решение (4) без промежуточных диафрагм, д — аналитическое решение (4) с промежуточными диафрагмами

Как и в случае формулы (11), формула (12) наглядно показывает, что четные синусоидальные гармоники разложения краевого условия в ряд Фурье тождественно равны нулю. Для сравнения на рис. 4, с, показано точное краевое условие вдоль границы $r = R$ для аналитического решения (4).

Требуется исследовать, насколько допустимо применять кусочно-линейную аппроксимацию краевого условия при вычислении амплитуд гармоник ряда Фурье. Для этой цели в качестве модельной задачи можно использовать краевое поле плоского конденсатора с тонкими и толстыми электродами, которое рассматривается в [18] (гл. II, §3, п. 39, пример 3).

Известно, что любое решение двумерного уравнения Лапласа (планарный электрический потенциал) можно представить как вещественную часть комплекснозначной аналитической функции комплексного переменного. В частности, если $U(x, y)$ — это потенциал некоторого электростатического поля, удовлетворяющий двумерному уравнению Лапласа, то его всегда можно дополнить такой функцией $V(x, y)$, что

$$u + iv = U(x, y) + iV(x, y) = F(x + iy) \quad (13)$$

будет аналитической функцией комплексного переменного (для этого необходимо и достаточно, чтобы функции $U(x, y)$, $V(x, y)$ удовлетворяли соотношениям Коши–Римана). Если производная функции (13) не равна нулю в какой-то точке, то в окрестности этой точки можно найти обратную аналитическую функцию комплексного переменного

$$x + iy = f(u + iv) = g(u, v) + ih(u, v), \quad (14)$$

так что выполнены тождества $x + iy \equiv f(F(x + iy))$, $u + iv \equiv F(f(u + iv))$.

Пара уравнений $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ задают двухпараметрическое семейство кривых на плоскости (x, y) . Однопараметрические линии $u = \text{const}$ будут эквипотенциальными линиями электростатического поля с электрическим потенциалом $U(x, y)$; однопараметрические линии $v = \text{const}$ будут силовыми линиями электростатического поля с электрическим потенциалом $U(x, y)$, ортогональными эквипотенциальным линиям.

Для задачи о краевом поле плоского конденсатора с тонкими электродами не удастся найти решение в виде суперпозиции элементарных функций, однако обратную функцию (14) можно представить в таком виде ([18], гл. II, §3, п. 39, пример 3):

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \frac{1}{\pi} \left(e^{\pi v} \cos(\pi u) + \pi v + 1 \right), \\ y(u, v) &= \frac{1}{\pi} \left(e^{\pi v} \sin(\pi u) + \pi u \right), \end{aligned} \quad (15)$$

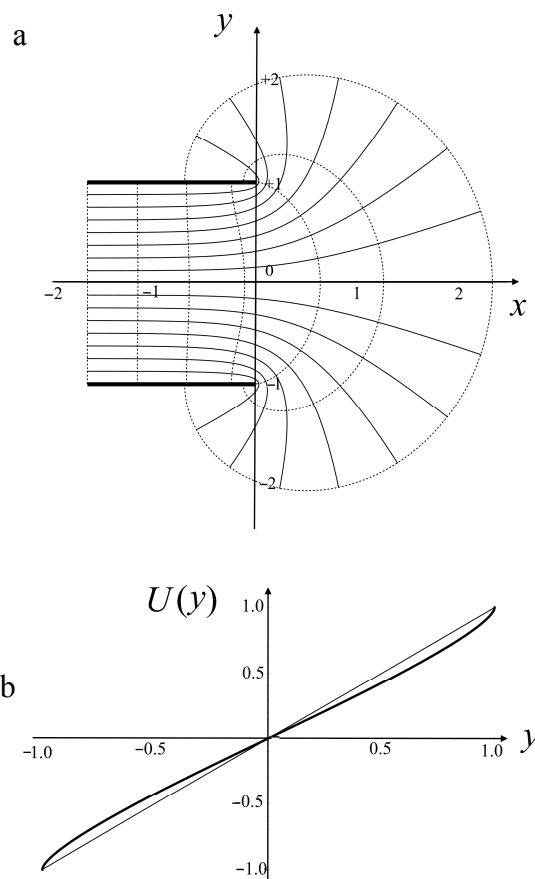


Рис. 5. Решение (15) задачи о краевом поле плоского конденсатора с тонкими электродами.

а — эквипотенциальные линии и силовые линии на плоскости (x, y) , б — график изменения нормированного электрического потенциала вдоль линии $x = 0$, $y \in [-1, +1]$

где электрод с напряжением $+1$ представляет собой тонкую линию $y = +1$, $x \leq 0$, а электрод с напряжением -1 представляет собой тонкую линию $y = -1$, $x \leq 0$. На рис. 5, а, показаны эквипотенциальные линии и силовые линии на плоскости (x, y) для решения (15), на рис. 5, б, — график изменения электрического потенциала вдоль линии $x = 0$, $y \in [-1, +1]$, который получен с помощью численного решения алгебраических уравнений (15). С точностью ± 0.004 эта зависимость описывается эмпирической формулой

$$U(y) = y - \sqrt{1 - y^2} (0.223697y + 0.108425y^3). \quad (16)$$

Точно так же для задачи о краевом поле плоского конденсатора с толстыми электродами реше-

ние (14) можно представить в таком виде ([18], гл. II, §3, п. 39, пример 3):

$$x + iy = \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{\exp(\pi(v + iu)) + 1} + \ln \left(\sqrt{\exp(\pi(v + iu)) + 1} - 1 \right) - \frac{\pi}{2}(v + iu) \right), \quad (17)$$

где электрод с напряжением $+1$ представляет собой квадрант $y \geq +1$, $x \leq 0$, а электрод с напряжением -1 представляет собой квадрант $y \leq -1$, $x \leq 0$. На рис. 6, а, показаны эквипотенциальные линии и силовые линии на плоскости (x, y) для решения (15), на рис. 6, б, — график изменения электрического потенциала вдоль линии $x = 0$, $y \in [-1, +1]$, который получен с помощью численного решения алгебраических уравнений (17). С точностью ± 0.0025 эта зависимость описывается эмпирической формулой

$$U(y) = y - \sqrt{1 - y^2} (0.171353y + 0.0389675y^3). \quad (18)$$

Таким образом, для оценки значений гармоник ряда Фурье линейная аппроксимация вполне применима, за исключением случаев моделирования движения ионов в непосредственной близости к краям электродов.

РАДИОЧАСТОТНЫЕ КАНАЛЫ ТРАНСПОРТИРОВКИ С НЕКРУГОВЫМИ ДИАФРАГМАМИ

Наряду с аналитическим осесимметричным решением (5), (6) имеются аналитические мультипольные решения:

$$\begin{aligned} U_{cc}(z, r) &= \\ &= U_0 \cos(m \arctan(y/x)) \cos(\lambda z) I_m(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} U_{sc}(z, r) &= \\ &= U_0 \sin(m \arctan(y/x)) \cos(\lambda z) I_m(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{cs}(z, r) &= \\ &= U_0 \cos(m \arctan(y/x)) \sin(\lambda z) I_m(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} U_{ss}(z, r) &= \\ &= U_0 \sin(m \arctan(y/x)) \sin(\lambda z) I_m(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}), \end{aligned}$$

где m — натуральное число, а I_m — модифицированная функция Бесселя порядка m [11–13]. Первый нижний индекс соответствует выбору косинуса либо синуса для азимутального множителя, второй нижний индекс — для аксиального множителя. В окрестности нуля $I_m(\xi) \approx \xi^m / (2^m m!)$, при больших аргументах $I_m(\xi) \approx e^\xi / \sqrt{2\pi\xi}$.

Потенциалам (5), (6) соответствуют диафрагмы с круговыми апертурами (рис. 7), а потенциалам (19) — мультипольные диафрагмы (рис. 8). Суперпозиция этих решений позволяет исследовать каналы с диафрагмами сложной формы. В Приложении на рис. П показаны эллиптические диафрагмы для суммы осесимметричного и квадрупольного потенциалов.

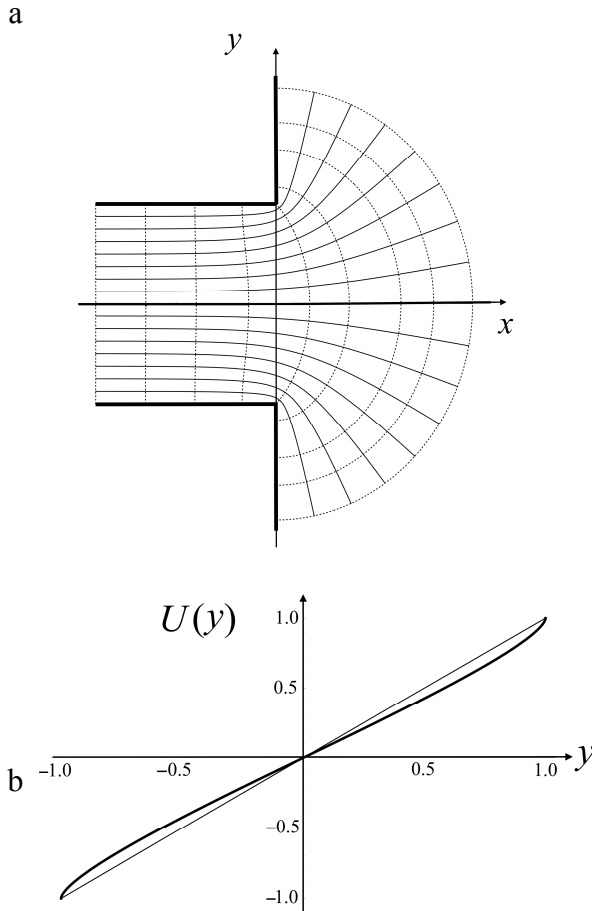


Рис. 6. Решение (15) задачи о краевом поле плоского конденсатора с толстыми электродами.

а — эквипотенциальные линии и силовые линии на плоскости (x, y) , б — график изменения нормированного электрического потенциала вдоль линии $x = 0$, $y \in [-1, +1]$

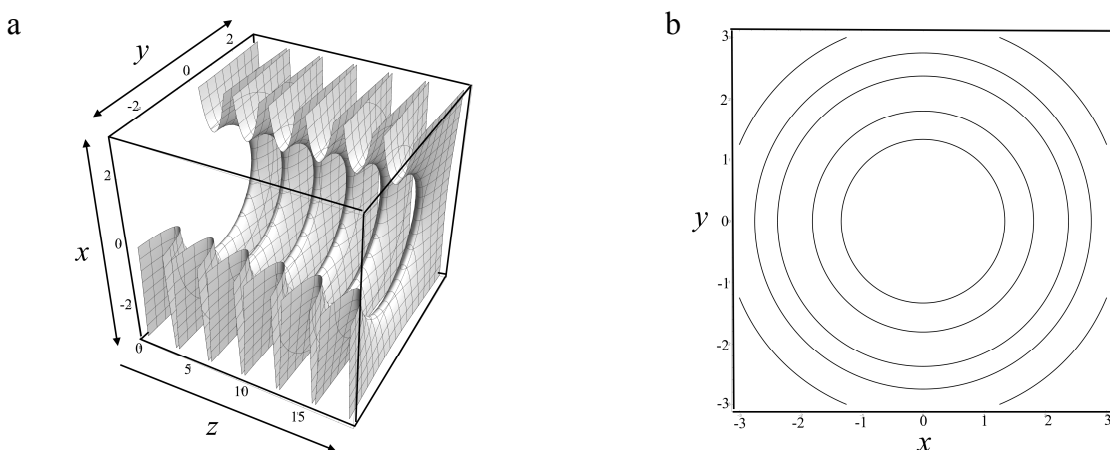


Рис. 7. Точная форма электродов для осесимметричных электрических потенциалов (5), (6). а — трехмерный вид электродов, б — эквипотенциальные линии в сечениях $z = \text{const}$ расположения максимумов и минимумов осевого распределения потенциала (форма отверстий)

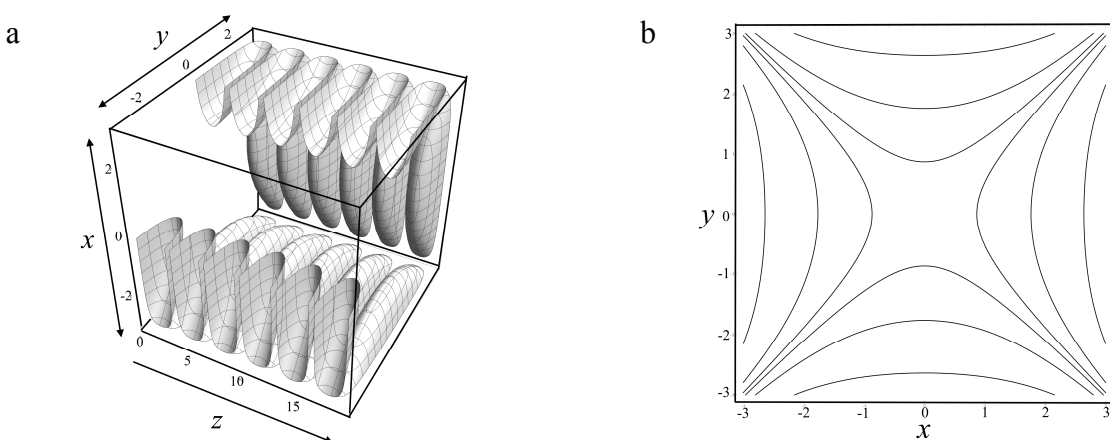


Рис. 8. Точная форма электродов для мультипольного (квадрупольного) аналитического электрического потенциала (первая формула (19) при $m = 2$). а — трехмерный вид электродов, соответствующих эквипотенциальным поверхностям, б — эквипотенциальные линии (возможные формы отверстий диафрагм) в сечениях $z = \text{const}$ максимумов и минимумов осевого распределения потенциала

Подобно тому, как для осесимметричных цилиндрических каналов можно использовать плоские диафрагмы вместо диафрагм с криволинейным профилем, для мультипольных каналов можно использовать огрубленное мультипольное сегментирование диафрагм (рис. 9). Как и раньше, для системы электродов с идентичными плоскими мультипольными либо некруговыми диафрагмами можно прикладывать к четным и нечетным диафрагмам разные электрические напряжения и тем самым создавать электрическое поле, соответствующее взвешенной сумме электрических потенциалов, сдвинутых в пространстве вдоль оси OZ .

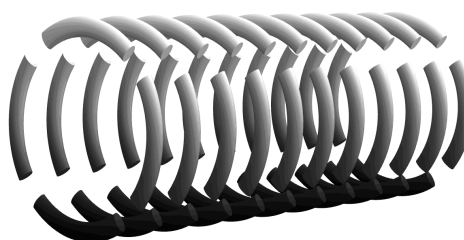


Рис. 9. Квадрупольно-сегментированные электроды цилиндрического канала с упрощенным сегментированием электродов.

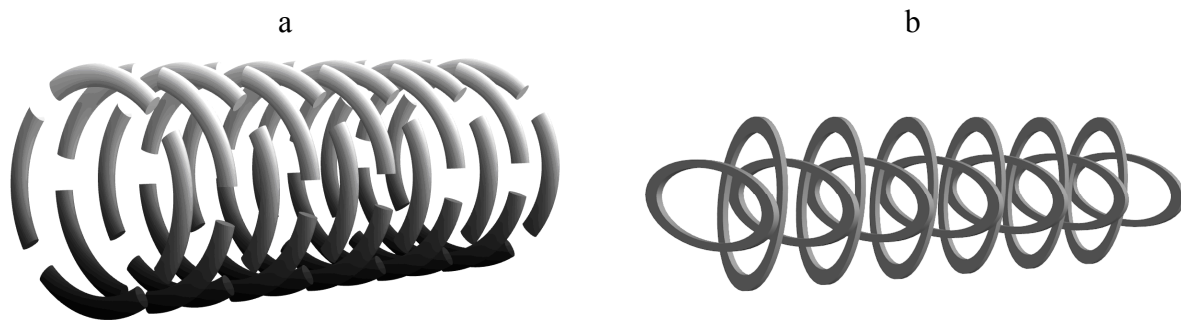


Рис. 10. Цилиндрические каналы с чередующимися диафрагмами.
а — при чередующемся мультипольном сегментировании, б — при чередующихся некруговых диафрагмах разной формы

Более того, можно использовать раздельное мультипольное сегментирование для четных и нечетных диафрагм (рис. 10, а). Результатом будет конфигурация электродов, с помощью которой в канале транспортировки создается электрическое поле, соответствующее взвешенной сумме мультипольных электрических потенциалов, сдвинутых в пространстве вдоль оси OZ и с разной мультипольной симметрией. При синтезе каналов транспортировки с некруговыми диафрагмами можно использовать этот же подход для создания каналов, у которых форма четных и нечетных диафрагм отличается (рис. 10, б).

Использование плоских диафрагм вместо диафрагм с идеальным криволинейным профилем (рис. 3), а также мультипольного сегментирования круговых диафрагм вместо идеальных мультипольных профилей (рис. 11), приводит к появлению паразитных компонентов электрического поля.

Паразитные компоненты электрического поля соответствуют старшим гармоникам при разложении в соответствующие ряды Фурье кусочно-линейных краевых условий для аксиальной координаты (рис. 4) и/или для азимутального угла (рис. 12).

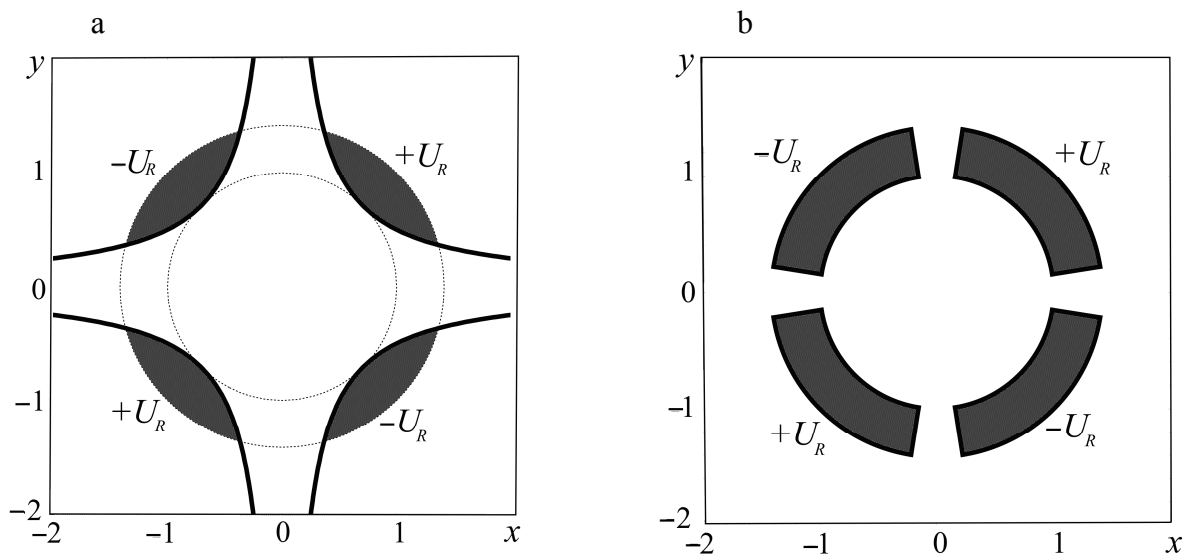


Рис. 11. Форма апертуры мультипольной (квадрупольной) диафрагмы.
а — для точного аналитического решения в сечении $z = 0$ (первая из формул (19) при $m = 2$);
б — при мультипольном сегментировании тонкой круговой диафрагмы в сечении $z = 0$ для $m = 2$

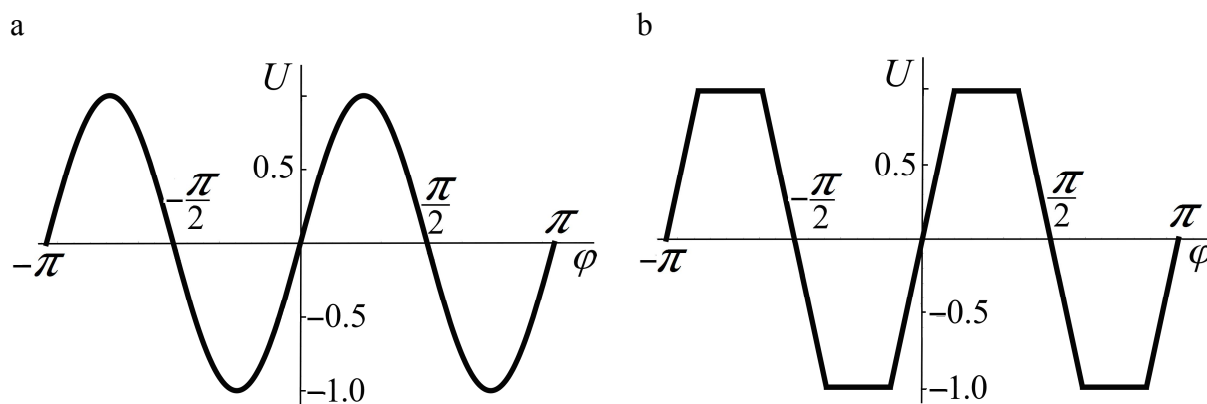


Рис. 12. Краевые азимутальные распределения мультипольного (квадрупольного) потенциала вдоль линий $r = \text{const}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ в сечениях размещения плоских диафрагм. а — аналитическое решение, б — сегментированная круговая диафрагма

Аналитические потенциалы (5), (6), (19), (20) позволяют организовывать разложение электрического потенциала, заданного во всем пространстве, в ряды Фурье (возможно, двойные) как по аксиальному, так и по азимутальному направлению. Для этого требуется подставить в эти формулы кратные мультипольные индексы m и/или кратные геометрические масштабы λ . Сопоставление с коэффициентами Фурье огрубленных краевых условий позволяет построить точное аналитическое решение для электрического потенциала возмущенного электрического поля.

С помощью азимутальных рядов Фурье для огрубленного краевого условия, показанного на рис. 12, может быть исследован процесс экспоненциально быстрого затухания паразитных азимутальных старших гармоник, происходящий по мере удаления от краев диафрагм. Это позволяет найти оценки для геометрических характеристик плоских диафрагм, для которых итоговое возмущение электрического поля будет незначительным. Процедура аналогична исследованию затухания старших аксиальных гармоник, которое было выполнено в предыдущем разделе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовались способы описания электрических полей цилиндрических радиочастотных транспортирующих каналов с помощью аналитических выражений. Показано, что возможно использовать аналитическое представление электрического потенциала не только для главной аксиальной компоненты электрического поля, обычно применяемой при исследовании ионно-оптических свойств цилиндрических транспорти-

рующих каналов, но и для старших паразитных гармоник. Появление старших паразитных гармоник связано с отклонением реальной формы электродов от идеальной формы, соответствующей эквипотенциальным поверхностям главной аксиальной компоненты электрического поля. Их наличие способно существенным образом исказить функционирование радиочастотного транспортирующего канала. Оценка экспоненциального затухания паразитных аксиальных гармоник по мере удаления от края диафрагм помогает выбирать геометрические характеристики электродов, оптимальные для функционирования устройства.

Показано, как с помощью полученных аналитических выражений можно описывать электрические поля радиочастотных транспортирующих каналов с мультипольными диафрагмами, а также с диафрагмами, обладающими апертурами некруговой формы. Также показано, как можно учитывать влияние паразитных старших азимутальных гармоник электрического поля в случае замены идеальных мультипольных профилей для апертур диафрагм на мультипольно сегментированные круговые диафрагмы. Оценка экспоненциально-степенного затухания паразитных азимутальных гармоник по мере удаления от края диафрагмы помогает выбирать геометрические характеристики электродов, оптимальные для функционирования устройства.

В последующих публикациях планируется исследование особенностей функционирования цилиндрических радиочастотных транспортирующих каналов с помощью псевдопотенциальной модели движения заряженных частиц в высокочастотных электрических полях и аналитических выражений для электрических полей, полученных в данной статье.

ПРИЛОЖЕНИЕ

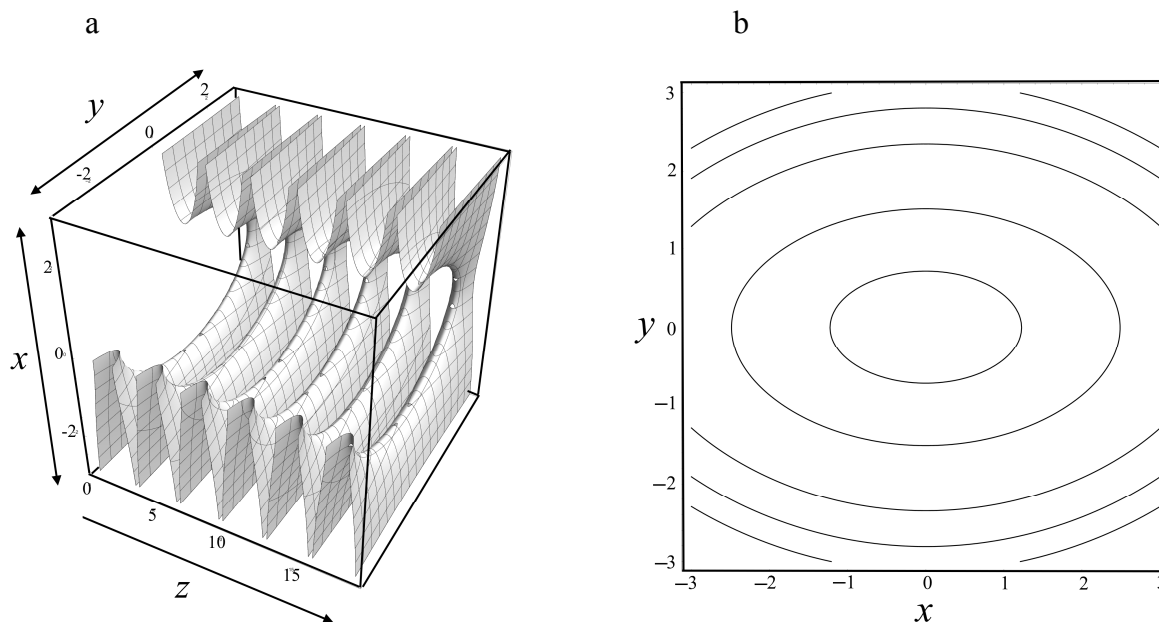


Рис. П. Точная форма электродов для суммы осесимметричных и квадрупольных потенциалов.
 а — трехмерный вид электродов, б — эквипотенциальные линии в сечениях $z = \text{const}$ расположения максимумов и минимумов осевого распределения потенциала (форма отверстий)

Благодарности

Авторы выражают свою искреннюю благодарность док-ру физ.-мат. наук Михаилу Игоревичу Явору, гл. научн. сотр. Института аналитического приборостроения РАН (г. Санкт-Петербург), за активное и деятельное участие в обсуждении рассматриваемой проблемы и указание на полезные литературные источники, использованные в данном исследовании.

Для аналитических вычислений и создания рисунков использовалась программа *Wolfram Mathematica* версии 11 Home Edition (<http://wolfram.com/mathematica/>).

Финансирование

Исследование выполнено в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-00444-25-00 (от 26.12.2024), тема НИР FFZM-2025-0006.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Yavor M.I. Optics of charged particle analyzers // *Advances in Imaging and Electron Physics* (Book Series). Amsterdam, Academic Press, 2009. Vol. 157. P. 142–168.
2. Gerlich D. Inhomogeneous RF fields: A versatile tool for the study of processes with slow ions // *Advances in Chemical Physics: State-selected and state-to-state ion-molecule reaction dynamics. Part 1: Experiment* (Book Series, vol. 82). New York: John Wiley & Sons Inc., 1992. P. 1–176. DOI: 10.1002/9780470141397.ch1
3. Сысоев А.А., Бердников А.С., Масюкевич С.В., Соловьев К.В., Краснова Н.К. Аналитическое исследование режимов работы радиочастотных воронок в газодинамических интерфейсах тандемных трехквадрупольных масс-спектрометров // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2023. Т. 16, № 4. С. 134–145. DOI: 10.18721/JPM.16411
4. Бердников А.С., Масюкевич С.В. Аналитические потенциалы электрических полей для моделирования транспортирующих каналов с периодической структурой // *Научное приборостроение*. 2024. Т. 34, № 1. С. 107–116. URL: <http://iairas.ru/mag/2024/abst1.php#abst9>
5. Бердников А.С., Масюкевич С.В., Помозов Т.В., Хасин Ю.И., Соловьев К.В. Аналитические потенциалы электрических полей для моделирования мультипольных радиочастотных ионных воронок с нелинейным профилем // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2024. Т. 17, № 2. С. 94–119. DOI: 10.18721/JPM.17208
6. Bahr R. Diplom thesis. University of Freiburg. 1969.
7. Gerlich D. Diplom thesis. University of Freiburg. 1971.
8. Teloy E., Gerlich D. Integral cross sections for ion-molecule reactions. Part I. The Guided beam technique // *Chemical Physics*. 1974. Vol. 4, no. 3. P. 417–427. DOI: 10.1016/0301-0104(74)85008-1
9. Gerlich D., Kaefer G. Ion trap studies of association processes in collisions of CH_3^+ and CD_3^+ with $n\text{-H}_2$, $p\text{-H}_2$,

- D₂ and He at 80 K // The Astrophysical Journal. 1989. Vol. 347, no. 2. P. 849–854. DOI: 10.1086/168174
10. Бердников А.С., Галль Н.Р. Радиочастотные транспортирующие ловушки с периодическими электродами без паразитных областей захвата // Масс-спектрометрия. 2013. Т. 10, № 4. С. 224–229. URL: <http://mass-spektrometria.ru/pre-t10n4-radiochast/>
 11. Ватсон Дж.Н. Теория бесселевых функций. Пер. со 2-го англ. изд. М.: Издательство иностранной литературы, 1949. 799 с.
 12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Серия "Справочная математическая библиотека". Изд. 2-е. М.: Наука, 1974. 296 с.
 13. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
 14. Андреева А.Д., Бердников А.С. Масс-спектрометрические устройства на основе радиочастотных электрических полей с архимедовыми свойствами // Масс-спектрометрия. 2011. Т. 8, № 4. С. 293–296. URL: <http://mass-spektrometria.ru/pre-8n4-pismo/>
 15. Бердников А.С. Высокочастотные электромагнитные поля с архимедовыми свойствами // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 1. С. 104–127. URL: <http://iairas.ru/mag/2014/abst1.php#abst13>
 16. Бердников А.С., Андреева А.Д. Устройство для манипулирования заряженными частицами. Патент РФ RU 113611U1 (Дата приоритета/подачи заявки: 05.05.2011, дата публикации: 20.02.2012). URL: <https://patents.google.com/patent/RU113611U1/ru>
 17. Бердников А.С., Андреева А.Д. Устройство для манипулирования заряженными частицами. Патент РФ RU 2465679C1 (Дата приоритета/подачи заявки: 05.05.2011, дата публикации: 27.10.2012). URL: <https://patents.google.com/patent/RU2465679C1/ru>
 18. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 3-е, испр. М.: "Наука". Гл. ред. физико-математической лит-ры, 1965. 716 с.

**Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург** (Бердников А.С., Масюкевич С.В.,
Соловьев К.В., Хасин Ю.И.)

**Санкт-Петербургский политехнический универси-
тет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия**
(Соловьев К.В.)

Контакты: Бердников Александр Сергеевич,
asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 05.05.2025

ELECTRIC FIELDS OF CYLINDRICAL RF ION GUIDES

A. S. Berdnikov¹, S. V. Masyukevich¹, K. V. Solovyev^{1,2}, Yu. I. Khasin¹

¹*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg, Russia*

²*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*

The article considers analytical expressions for the potentials of electric fields that correspond to cylindrical RF channels. The electrodes of such channels are a sequence of identical flat diaphragms, in the particular case of circular diaphragms with apertures of constant radius. The obtained expressions allow one to estimate the disturbances of the transporting electric fields when approaching the edges of the electrodes and can be useful for qualitative simulation of RF devices designed for isolation, transporting and focusing of ions.

Keywords: analytical solutions of the Laplace equation, electric RF fields, electron-optical systems with periodic electrodes, ion guides

REFERENCES

1. Yavor M.I. Optics of charged particle analyzers. *Advances in Imaging and Electron Physics* (Book Series). Amsterdam, Academic Press, 2009, vol. 157, pp. 142–168.
2. Gerlich D. Inhomogeneous RF fields: A versatile tool for the study of processes with slow ions. *Advances in Chemical Physics: State-selected and state-to-state ion-molecule reaction dynamics. Part 1: Experiment* (Book Series). New York, John Wiley & Sons Inc., 1992, pp. 1–176. DOI: 10.1002/9780470141397.ch1
3. Sysoev A.A., Berdnikov A.S., Masyukevich S.V., Solovyev K.V., Krasnova N.K. [Analytical study of operating modes of RF ion funnels in the gas dynamic interfaces of tandem triple-quadrupole mass-spectrometers]. *Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPBGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics], 2023, vol. 16, no. 4, pp. 134–145. DOI: 10.18721/JPM.16411 (In Russ.).
4. Berdnikov A.S., Masyukevich S.V. [Analytical potentials of electric fields for simulation of ion guides with a periodic structure]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2024, vol. 34, no. 1, pp. 107–116. URL: <http://iairas.ru/mag/2024/abst1.php#abst9> (In Russ.).
5. Бердников А.С., Масыкевич С.В., Помозов Т.В., Хасин Ю.И., Соловьев К.В. Аналитические потенциалы электрических полей для моделирования мультипольных радиочастотных ионных воронок с нелинейным профилем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17, № 2. С. 94–119. DOI: 10.18721/JPM.17208
6. Bahr R. *Diplom thesis*. University of Freiburg. 1969.
7. Gerlich D. *Diplom thesis*. University of Freiburg. 1971.
8. Teloy E., Gerlich D. Integral cross sections for ion-molecule reactions. Part I. The Guided beam technique. *Chemical Physics*, 1974, vol. 4, no. 3, pp. 417–427. DOI: 10.1016/0301-0104(74)85008-1
9. Gerlich D., Kaefer G. Ion trap studies of association processes in collisions of CH_3^+ and CD_3^+ with $n\text{-H}_2$, $p\text{-H}_2$, D_2 and He at 80 K. *The Astrophysical Journal*, 1989, vol. 347, no. 2, pp. 849–854. DOI: 10.1086/168174
10. Berdnikov A.S., Gall N.R. [Radio frequency ion guiding traps with periodical electrodes without spurious trapping regions]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2013, vol. 10, no. 4, pp. 224–229. URL: <http://mass-spektrometria.ru/pre-t10n4-radiochast/> (In Russ.).
11. Watson G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge, Cambridge University Press, 1922. 804 p. (Russ. ed.: Vatson Dzh.N. *Teoriya besselevykh funktsii*. Transl. from eng. Moscow: Izdatel'stvo inostran-noi literatury, 1949. 799 p.).
12. Bateman H., Erdei A. *Higher Transcendental Functions. Vol. 2*. McGraw Hill book company, 1953. 396 p. (Russ. ed.: Beitmen G., Ehrdeii A. *Vyshsie transtsendentnye funktsii. T. 2: Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny*. Seriya "Spravochnaya matematicheskaya biblioteka". Izd. 2-e. Moscow: Nauka Publ., 1974. 296 p.).
13. Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 1964. 1046 p. (Russ. ed.: Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami*. Moscow: Nauka Publ., 1979. 832 p.).
14. Andreeva A.D., Berdnikov A.S. [Mass spectrometric devices with archimedean radio frequency electric fields]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2011, vol. 8, no. 4, pp. 293–296. (In Russ.). URL: <http://mass-spektrometria.ru/pre-8n4-pismo/>
15. Berdnikov A.S. [High frequency electromagnetic fields with 'Archimedean' properties which are calculated taken Maxwell's terms into account]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 1, pp. 104–127. URL: <http://iairas.ru/mag/2014/abst1.php#abst13> (In Russ.).
16. Berdnikov A.S., Andreeva A.D. *Ustroistvo dlya manipulirovaniya zaryazhennymi chastitsami. Patent RF no. RU 113611U1* [Patent for device for manipulating charged particles]. Prioritet 05.05.2011. URL: <https://patents.google.com/patent/RU113611U1/ru> (In Russ.).

17. Berdnikov A.S., Andreeva A.D. *Ustroistvo dlya manipirovaniya zaryazhennymi chastitsami. Patent RF no. RU 2465679C1* [Patent for apparatus for manipulating charged particles]. Prioritet 05.05.2011. URL: <https://patents.google.com/patent/RU2465679C1/ru> (In Russ.).
18. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. Izd. 3-e, ispr.* [Methods of the theory of functions of complex variable. Ed. 3rd]. Moscow, Nauka Publ., Gl. red. fiziko-matematicheskoi lit-ry, 1965. 716 p. (In Russ.).

Article received by the editorial office on 05.05.2025

Contacts: *Berdnikov Alexander Sergeevich*,
asberd@yandex.ru

INTRODUCTION

Devices for isolation and transport of ions, which represent a sequence of flat diaphragms of that or other shape with radio-frequency electric voltages applied to them, are quite widespread [1, 2]. In this work, a narrow (in the sense of variety of constructions) but widely used subset of similar devices will be considered — straight-line transporting channels of cylindrical shape, in most cases composed of flat circular diaphragms. More advanced analytical models of electric potentials for radio frequency transport channels of complex form are presented in [3–5].

When constructing analytical models of radio frequency electric fields, the principle of quasi-staticity is used. If the quasi-static condition is met (see below), the high-frequency electric potential of such a field can be represented as the product of a time function that specifies the law of change of voltages on the electrodes and the potential of the electrostatic field corresponding to constant voltages on the electrodes.

The assumption of a quasi-static high-frequency electric field is valid when the time of the characteristic change of electric voltages on the electrodes significantly exceeds the time of propagation of the electromagnetic disturbance within the device. Typical sizes of electrode configurations used in the construction of ion-optical systems are no more than several tens of centimeters (as a rule, significantly less). Taking into account the equality of the speed of light and the speed of propagation of electromagnetic disturbance, the specified assumption is obviously fulfilled for the frequencies of electric voltages, usually used in ion-optical devices (from hundreds of kilohertz to several megahertz, rarely — several gigahertz).

Under such conditions, the electromagnetic disturbance spreads practically instantaneously so that the high-frequency electric potential, which varies in time and space, can be represented as the product of the time function and the electrostatic potential, which depends on the spatial coordinates. The time-dependent multiplier describes the temporal change of electrical voltages, and the coordinate-dependent potential corresponds to constant voltages on the electrodes, which change in time synchronously and proportionally to each other.

In other words, within the framework of the quasi-static model, it is assumed that such an electric field is created, which changes synchronously and proportionally at each point in space in accordance with the law of changes in electrical voltages on the electrodes. Although this step represents, in essence, neglect of electrodynamic effects, i.e., accompanying electromagnetic wave, arising in accordance with Maxwell's equations during any change in electric and magnetic fields over time but it is quite permissible if the fre-

quency of the voltages applied to the electrodes is not too great (in the sense indicated above).

RADIO FREQUENCY TRANSPORT CHANNELS WITH CIRCULAR DIAPHRAGMS

Radio-frequency cylindrical traps and transporting cylindrical channels such as SRIG (Stacked Ring Ion Guides) represent a sequence of diaphragms of the same shape and size with sinusoidal radio-frequency or pulsed electric voltages applied to them [1, 2, 6–10]. Diaphragms are located at the same distance from each other and form a cylindrical transportation channel with a straight axis. Figure 1 shows a typical cylindrical radio frequency trap of SRIG type with circular diaphragms of the same radius.

Fig. 1. The structure of periodic ring electrodes of a cylindrical radiofrequency trap of the SRIG type.

In a typical case, applied sinusoidal radio frequency voltages are characterized by a phase shift between adjacent diaphragms. This means that the signs and amplitudes of sinusoidal voltages applied to separate diaphragms alternate according to the rule

$$+U_R, -U_R, +U_R, -U_R, +U_R, -U_R, \dots \quad (1)$$

Therefore, at any moment in time, the voltages on the adjacent diaphragms have opposite signs, which should maximize the tension of the controlling radio frequency electric field.

Due to the symmetry of the geometric shape of the electrodes and the antisymmetry of the voltages applied to the electrodes, the plane along which the electric potential is identically equal to zero is located in the middle between the neighboring electrodes. This allows one to add fictitious diaphragms with zero voltages without distortion of the electric field and thereby introduce periodic sequences of diaphragms and voltages that are organized according to the rule:

$$+U_R, 0, -U_R, 0, +U_R, 0, -U_R, 0, +U_R, 0, -U_R, \dots \quad (2)$$

If we move electrodes and the electric voltages applied to them, given according to the scheme (2), by one step along the cylindrical axis, we will get an analytical solution for the electric field corresponding to the voltages on the diaphragms organized according to the rule

$$0, +U_R, 0, -U_R, 0, +U_R, 0, -U_R, 0, +U_R, 0, \dots \quad (3)$$

It is known [2] that away from the edges of the electrodes, in the vicinity of the axis of the transport channel, the electrostatic potential of such a system of electrodes with periodic voltages applied to them and

corresponding to the sequence of voltages (1) is described with good accuracy by the expression

$$U(z, r) = \frac{U_R}{I_0(\lambda R)} \cos(\lambda z + \beta) I_0(\lambda r), \quad (4)$$

where z , r are the axial and radial coordinates ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$); U_R are the static potentials applied to the diaphragms; I_0 is the modified zero-order Bessel function [11–13]; R is the radius of the circular diaphragms; β determines the shift of the sequence of diaphragms relative to the origin; λ is the geometric scale parameter. For voltages on the diaphragms according to scheme (1), the parameter λ is equal to π/L , where L is the distance between neighboring diaphragms, for schemes (2) and (3), the parameter λ is equal to $\pi/(2L)$. The reason: for scheme (1), the distance between adjacent maxima and minima of the axial distribution of the potential, which correspond to the placement of the diaphragm along the axis, is equal to $\Delta(\lambda z + \beta) = \lambda \Delta z = \pi$, where $\Delta z = L$, whereas for scheme (2), (3) the distance between adjacent maxima/minima and zeros of the axial distribution is equal to $\Delta(\lambda z + \beta) = \lambda \Delta z = \pi/2$.

Equipotential lines and a three-dimensional graph of electrical potential, given by formula (4), in normalized coordinates (z , r) are shown in Fig. 2. Strictly speaking, for the creation of precisely such an electric field in the entire volume of the transporting trap, it is necessary that the electrodes forming the sequence of diaphragms have the form of the equipotential surfaces shown in Fig. 2. However, in practice, it is sufficient to use flat annular diaphragms with corresponding electrical potentials. For such electrodes, the electric field in the middle of the channel away from the edges of the electrodes will be described with good accuracy by the analytical expression (4) (see [2]).

Fig. 2. Static electric potential (4) in normalized coordinates.
a — equipotential lines on the plane (z , r), b — behavior of the potential on the axis $r = 0$.

The potential (4) is a weighted sum with constant coefficients, composed of two linearly independent potentials given by the formulas

$$U_c(z, r) = \frac{U_R}{I_0(\lambda R)} \cos(\lambda z) I_0(\lambda r), \quad (5)$$

$$U_s(z, r) = \frac{U_R}{I_0(\lambda R)} \sin(\lambda z) I_0(\lambda r). \quad (6)$$

On the axis of symmetry $r = 0$ potential (5) behaves as $U_0 \cos(\lambda z)$, and potential (6) — as $U_0 \sin(\lambda z)$, where $U_0 = U_R/I_0(\lambda R)$ is an amplitude of spatial oscillations of the electrostatic potential on the axis of the system. Electrostatic potentials (5), (6) prove to be useful tools for constructing analytical models of the electric field in complex configurations of radio frequency voltages on electrodes, including impulse voltages and voltages with a complex spectrum.

Functions (5) can be used to describe the electrostatic field of a periodic sequence of annular diaphragms with voltages corresponding to a periodic sequence of voltages (2), and function (6) — diaphragms with voltages corresponding to a periodic sequence of voltages (3). For this, in formulas (5), (6) it is necessary to use a geometric scale $\lambda = \pi/(2L)$, where L is the distance between neighboring circular diaphragms.

Figure 3, a, shows equipotential surfaces that can be used as electrodes to create an electric field with electric potential (5). Figure 3, b, shows equipotential surfaces that can be used as electrodes to create an electric field with electric potential (6). Bold lines show equipotentials $U(z, r) = +U_R$, thin lines show equipotentials $U(z, r) = -U_R$, dashed lines show equipotentials $U(z, r) = 0$.

Fig. 3. Axisymmetric equipotential surfaces that can be used as electrodes.
a — for electric potential (5), b — for electric potential (6), c — superposition of electrode systems "a" and "b" on each other, d — roughened electrode system "c" in the form of flat circular diaphragms

The electric field of the device can be the sum of electric fields with potentials (5), (6), and the weight coefficients of the sum must be controlled by the voltages on the electrodes. It is impossible to combine the electrodes in Fig. 3, a. and Fig. 3, b, into a single system because of their overlapping (Fig. 3, c). However, when replacing exact diaphragms of curvilinear form with flat circular diaphragms (fig. 3, d), we get a system of electrodes, for which in the central part of the transport channel, away from the edges of the diaphragms, both an electric field (5) and an electric field (6) can be created with high accuracy, depending on the electric voltages applied to the electrodes. The perturbations of the electric fields caused by such a replacement of ideal electrodes are considered below.

EDGE FIELDS AND DISTURBANCES CAUSED BY DISTORTION OF THE ELECTRODE SHAPE

Figure 3 shows the process of replacing ideal curved-line electrodes with constructively more convenient flat diaphragms. Obviously, it is accompanied by a distortion of the exact electric field but it can be expected from general considerations, that such distortions quickly die out when removed from the edges of flat diaphragms. In this section, estimates of the damping rate are considered, and critical geometric parameters of flat diaphragms are determined at which distortions of the electric field in the central part of the transportation channel can be considered insignificant.

We consider a variant when the signs and amplitudes of high-frequency voltages applied to diaphragms are alternated according to rule (1). Because of the periodicity of both the geometry of the electrodes and the electric voltages applied to them, the distribution of the electric potential along the horizontal line

$r = R$ represents a periodic function and because of this, it can be decomposed into a Fourier series:

$$U(z, R) = U_R \sum_{k=1, \infty} u_k \sin\left(\frac{k\pi z}{L}\right). \quad (7)$$

Here point $z = -L/2$ corresponds to a diaphragm with voltage $-U_R$, point $z = +L/2$ corresponds to a diaphragm with voltage $+U_R$, point $z = 0$ corresponds to the middle between neighboring diaphragms, L — distance between neighboring diaphragms, u_k — normalized dimensionless amplitudes of sinusoidal harmonics of the Fourier series. As will be shown further, cosine harmonics and even sinusoidal harmonics are equal to zero due to the symmetry of the electrodes and electrical voltages.

The exact solution of the Dirichlet problem for the axisymmetric Laplace equation with the boundary condition (7) has the form

$$U(z, r) = U_R \sum_{k=1, \infty} u_{2k-1} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi z}{L}\right) \frac{I_0((2k-1)\pi r/L)}{I_0((2k-1)\pi R/L)}, \quad (8)$$

where I_0 is a modified Bessel zero-order function. Since the function $I_0(\xi)$ grows exponentially fast with an increase in the argument ξ , so that the estimate $I_0(\xi) \approx e^\xi / \sqrt{2\pi\xi}$ is correct if $\xi \geq 0.27$, then the senior harmonics quickly decay when shifted along the radius from the border $r = R$ toward the $r = 0$ axis. The contribution of the third and fifth harmonics to the first harmonic at a step Δr from the edge of the circular diaphragms is estimated as

$$\begin{aligned} \left| \frac{U_3(z, r)}{U_1(z, r)} \right| &\approx \\ &\approx \frac{u_3}{u_1} \frac{I_0(3\pi(R - \Delta r)/L)}{I_0(3\pi R/L)} \frac{I_0(\pi R/L)}{I_0(\pi(R - \Delta r)/L)} \approx \\ &\approx \exp(-3\pi\Delta r/L), \\ \left| \frac{U_5(z, r)}{U_1(z, r)} \right| &\approx \\ &\approx \frac{u_5}{u_1} \frac{I_0(5\pi(R - \Delta r)/L)}{I_0(5\pi R/L)} \frac{I_0(\pi R/L)}{I_0(\pi(R - \Delta r)/L)} \approx \\ &\approx \exp(-5\pi\Delta r/L). \end{aligned} \quad (9)$$

In particular, already if $R/L \geq 2$ the contribution of the higher harmonics in the near-axis region $0 \leq r \leq R/4$ is negligibly small.

The exponential growth of electric potentials (4) with distance from the $r = 0$ axis towards the $r = R$ boundary has another side effect. Namely, the electric voltage U_R applied to the diaphragm decays exponentially as it approaches the axis $r = 0$:

$$U_0 = \frac{U_R}{I_0(\pi R/L)} \approx U_R \exp(-\pi R/L), \quad (10)$$

where U_0 is the amplitude of the spatial oscillations of the electric potential on the axis of the system.

By virtue of formula (10) with sufficiently large values of the dimensionless parameter R/L , the controlling effect of the high-frequency electric field on the ions located near the axis is practically absent. In particular, if $R \geq 4L$ the high-frequency electric field on the axis of the system is negligible for any reasonable amplitudes of sinusoidal voltages applied to the electrodes of the transport channel.

This effect must be taken into account if it is required to control the movement of ions in the axial region of the transport channel with the help of a high-frequency electric field of the transport channel. In particular, in the case of transporting ions using the A-wave effect [14–17], the dimensionless parameter R/L must be, on the one hand, large enough so that the effect of the higher spatial harmonics of the high-frequency electric field on the axis of the system is small. On the other hand, the dimensionless parameter R/L must be small enough so that a noticeable high-frequency electric field is present on the axis and that the height of the pseudopotential barriers around the

local traps of the A-wave on the axis of the system ensures the capture and forced transport of ions.

For a more accurate assessment of the contribution of the higher spatial harmonics of the considered electric field, we use a rough model for the distribution of the electric potential along the horizontal line $r = R$, where the electric potential is approximated by a straight line in the space between the adjacent diaphragms (Fig. 4, a).

Fig. 4. Normalized boundary condition along the boundary $r = R$.

a — for adjacent diaphragms with stresses of opposite signs, b — in the presence of an intermediate diaphragm with zero stress, c — analytical solution (4) without intermediate diaphragms, d — analytical solution (4) with intermediate diaphragms

Because of the symmetry of the boundary conditions, the amplitude of the cosine harmonics and the amplitude of the even sinusoidal harmonics are turned to zero. For the considered boundary condition, the amplitude of sinusoidal harmonics $\sin(k\pi z/L)$ is equal

$$u_k = \frac{L}{L-H} \frac{8}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{k\pi H}{2L}\right), \quad (11)$$

where L is the distance between the neighboring diaphragms, H is the thickness of the diaphragm ($0 \leq H \leq L$), $k = 1, 2, 3, \dots$ is the number of harmonics. In particular, it follows from formula (11) that all even sinusoidal harmonics are equal to zero, as it should be due to the symmetry of the periodic boundary condition shape. If $H/L = 1/3$, the third sinusoidal harmonic turns to zero, which seems to be the optimal choice for cylindrical transport channels of the SRIG type with circular diaphragms or a choice close enough to the optimal one. In addition, the amplitude of the first harmonic shows what part of the applied electric voltage is used for the useful component of the radio frequency electric field on the axis of the cylindrical channel.

Similarly, for the stress scheme (2) and the normalized piecewise linear boundary condition at the boundary $r = R$ shown in Fig. 4, b, the amplitudes of the sinusoidal harmonics $\sin(k\pi z / 2L)$ are

$$u_k = \frac{L}{L-H} \frac{16}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{k\pi(L-H)}{4L}\right). \quad (12)$$

It is worth paying attention that the period of the boundary conditions in this case is $4L$, not $2L$, which accordingly affects both the frequencies of the spatial harmonics of the high-frequency electric field and the

attenuation of these harmonics when moving away from the edge of the diaphragm. As in the case of formula (11), formula (12) clearly shows that even sinusoidal harmonics of the expansion of the boundary condition in a Fourier series are identically equal to zero.

For comparison, Fig. 4, c, shows the exact boundary condition along the boundary $r = R$ for the analytical solution (4).

It is necessary to investigate to what extent it is permissible to use a piecewise linear approximation of the boundary condition when calculating the amplitudes of the harmonics of the Fourier series. For this purpose, as a model problem, one can use the edge field of a flat capacitor with thin and thick electrodes, which is considered in [18] (Ch. II, §3, p. 39, example 3).

It is known that any solution of Laplace's two-dimensional equation (planar electric potential) can be represented as a real part of a complex-valued analytical function of a complex variable. In particular, if $U(x, y)$ is the potential of some electrostatic field satisfying the two-dimensional Laplace equation, it can always be supplemented with such a function $V(x, y)$, that

$$u + iv = U(x, y) + iV(x, y) = F(x + iy) \quad (13)$$

it will be an analytical function of a complex variable (for this it is necessary and sufficient that the functions $U(x, y)$, $V(x, y)$ satisfy the Cauchy–Riman relations). If the derivative function (13) is not equal to zero at some point, then in the vicinity of this point it is possible to find the inverse analytical function of the complex variable

$$x + iy = f(u + iv) = g(u, v) + ih(u, v), \quad (14)$$

so that the identities $x + iy \equiv f(F(x + iy))$, $u + iv \equiv F(f(u + iv))$ are satisfied.

A pair of equations $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ defines a two-parameter family of curves on the plane (x, y) . One-parameter lines $u = \text{const}$ will be equipotential lines of the electrostatic field with electric potential $U(x, y)$; one-parameter lines $v = \text{const}$ will be lines of force of the electrostatic field with electric potential $U(x, y)$, orthogonal to the equipotential lines.

For the problem of the edge field of a flat capacitor with thin electrodes, it is not possible to find a solution in the form of a superposition of elementary functions; however, the inverse function (14) can be presented in the following form ([18], ch. II, §3, p. 39, example 3):

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \frac{1}{\pi} (e^{\pi v} \cos(\pi u) + \pi v + 1), \\ y(u, v) &= \frac{1}{\pi} (e^{\pi v} \sin(\pi u) + \pi u), \end{aligned} \quad (15)$$

Fig. 5. Solution (15) of the problem of the edge field of a flat capacitor with thin electrodes.
a — equipotential lines and lines of force on the plane (x, y) , b — graph of the change in the normalized electric potential along the line $x = 0, y \in [-1, +1]$.

where the electrode with voltage $+1$ is a thin line $y = +1, x \leq 0$, and the electrode with voltage -1 is a thin line $y = -1, x \leq 0$. Figure 5, a, shows equipotential lines and power lines on the plane (x, y) for the solution (15).

Figure 5, b, — graph of changes in electric potential along the line $x = 0, y \in [-1, +1]$, which is obtained with the help of numerical solutions of algebraic equations (15). With accuracy ± 0.004 this dependence is described by an empirical formula

$$U(y) = y - \sqrt{1 - y^2} (0.223697y + 0.108425y^3). \quad (16)$$

Also, for the problem of the edge field of a flat capacitor with thick electrodes, the solution (14) can be presented in this way ([18], ch. II, §3, p. 39, example 3):

$$x + iy = \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{\exp(\pi(v + iu)) + 1} + \ln \left(\sqrt{\exp(\pi(v + iu)) + 1} - 1 \right) - \frac{\pi}{2}(v + iu) \right), \quad (17)$$

where the electrode with voltage $+1$ is a quadrant $y \geq +1, x \leq 0$, and the electrode with voltage -1 is a quadrant $y \leq -1, x \leq 0$. Figure 6, a, shows equipotential lines and power lines on the plane (x, y) for the solution (15), Fig. 6, b, — graph of changes in electric potential along the line $x = 0, y \in [-1, +1]$, which is obtained with the help of numerical solutions of algebraic equations (17). With accuracy ± 0.0025 this dependence is described by an empirical formula

$$U(y) = y - \sqrt{1 - y^2} (0.171353y + 0.0389675y^3). \quad (18)$$

Thus, the Fourier linear approximation is quite applicable for the estimation of the values of the harmonic series, except for the cases of modeling the movement of ions in the immediate vicinity of the edges of the electrodes.

Fig. 6. Solution (15) of the problem of the edge field of a flat capacitor with thick electrodes.
a — equipotential lines and lines of force on the plane (x, y) , b — graph of the change in the normalized electric potential along the line $x = 0, y \in [-1, +1]$.

$$\begin{aligned} U_{cc}(z, r) &= \\ &= U_0 \cos(m \arctan(y/x)) \cos(\lambda z) I_m(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} U_{sc}(z, r) &= \\ &= U_0 \sin(m \arctan(y/x)) \cos(\lambda z) I_m(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{cs}(z, r) &= \\ &= U_0 \cos(m \arctan(y/x)) \sin(\lambda z) I_m(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} U_{ss}(z, r) &= \\ &= U_0 \sin(m \arctan(y/x)) \sin(\lambda z) I_m(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}), \end{aligned}$$

where m is a natural number, and I_m is a m -order modified function of Bessel [11–13]. The first subscript corresponds to the choice of cosine or sine for the azimuthal multiplier, the second subscript — for the axial multiplier. In the vicinity of zero $I_m(\xi) \approx \xi^m / (2^m m!)$, for large arguments $I_m(\xi) \approx e^\xi / \sqrt{2\pi\xi}$.

Potentials (5), (6) correspond to diaphragms with circular apertures (Fig. 7), and to potentials (19) — to multipole diaphragms (Fig. 8).

Fig. 7. The exact shape of the electrodes for axisymmetric electric potentials (5), (6).
a — three-dimensional view of the electrodes, b — equipotential lines in the cross sections $z = \text{const}$ of the locations of the maxima and minima of the axial distribution of the potential (shape of the holes)

RADIO FREQUENCY TRANSPORT CHANNELS WITH NON-CIRCULAR DIAPHRAGMS

Along with analytical axisymmetric solutions (5), (6) there are analytical multipole solutions:

Fig. 8. The exact shape of the electrodes for the multipole (quadrupole) analytical electric potential (the first formula (19) for $m = 2$).

a — three-dimensional view of the electrodes corresponding to the equipotential surfaces, b — equipotential lines (possible shapes of the diaphragm holes) in the sections $z = \text{const}$ of the maxima and minima of the axial potential distribution

The superposition of these solutions allows you to examine channels with diaphragms of a complex shape. Figure Π in Appendix shows elliptical apertures for the sum of axially symmetrical and quadrupole potentials.

Similar to how flat diaphragms can be used instead of diaphragms with a curvilinear profile for axisymmetric cylindrical channels, coarse multipole segmentation of diaphragms can be used for multipole channels (Fig. 9).

Fig. 9. Quadrupole-segmented cylindrical channel electrodes with simplified electrode segmentation.

As before, for a system of electrodes with identical flat multipole or non-circular diaphragms, different electric voltages can be applied to even and odd diaphragms and thereby create an electric field corresponding to the weighted sum of electric potentials shifted in space along the OZ axis.

Moreover, it is possible to use separate multi-field segmentation for even and odd diaphragms (Fig. 10, a).

Fig. 10. Cylindrical channels with alternating diaphragms.

a — alternating multipole segmentation, b — alternating non-circular diaphragms of different shapes

The result will be a configuration of electrodes, with the help of which an electric field is created in the transportation channel. This field is corresponding to the weighted sum of multipole electric potentials, shifted in space along the OZ axis and with different multipole symmetry. When synthesizing transport channels with non-circular diaphragms, the same approach can be used to create channels with different shapes of smooth and non-circular diaphragms (Fig. 10, b).

The use of flat diaphragms instead of diaphragms with an ideal curved profile (Fig. 3), as well as multipole segmentation of circular diaphragms instead of ideal multipole profiles (Fig. 11), leads to the appearance of parasitic components of the electric field.

Fig. 11. Aperture shape of a multipole (quadrupole) diaphragm.

a — for an exact analytical solution in the cross section $z = 0$ (the first of formulas (19) for $m = 2$); b — for multipole segmentation of a thin circular diaphragm in the section $z = 0$ for $m = 2$

The parasitic components of the electric field correspond to the senior harmonics when decomposing piecewise-linear boundary conditions for the axial coordinate (Fig. 4) and/or for the azimuthal angle (Fig. 12) into the corresponding series of Fourier.

Fig. 12. Edge azimuthal distributions of the multipole (quadrupole) potential along the lines $r = \text{const}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ in the cross-sections of the placement of flat diaphragms.

a — analytical solution, b — segmented circular diaphragm

Analytical potentials (5), (6), (19), (20) allow organizing the decomposition of the electric potential, given in the whole space, in Fourier series (possible, double) both in the axial and in the azimuthal direction. For this, multiple multipole indices m and/or multiple geometric scales λ are required to be substituted into these formulas. Comparison with the Fourier coefficients of the roughened boundary conditions allows us to construct an exact analytical solution for the electric potential of the disturbed electric field.

With the help of azimuthal series Fourier for the rough edge condition shown in Fig. 12, the process of exponentially fast decay of parasitic azimuthal senior harmonics, which occurs as the distance from the edges of the diaphragm, can be investigated. This allows you to find estimates for the geometric characteristics of flat diaphragms, for which the resulting disturbance of the electric field will be insignificant. The procedure is analogous to the study of attenuation of senior axial harmonics, which was performed in the previous section.

CONCLUSION

Methods of describing electric fields of cylindrical radio-frequency transport channels using analytical expressions were investigated. It is shown that it is possible to use the analytical representation of the electric potential not only for the main axial component of the electric field, usually used in the study of ion-optic properties of cylindrical transport channels, but also for senior parasitic harmonics.

The appearance of senior parasitic harmonics is connected with the deviation of the real form of the

electrodes from the ideal form corresponding to the equipotential surfaces of the main axial component of the electric field. Their presence is capable of significantly distorting the functioning of the radio frequency transport channel. Estimating the exponential damping of parasitic axial harmonics as they move away from the edge of the diaphragm helps to choose the geometric characteristics of the electrodes, optimal for the device's function.

It has been shown how, with the help of obtained analytical expressions, it is possible to describe electric fields of radio-frequency transport channels with multipole diaphragms, as well as diaphragms with non-circular apertures. It is also shown how it is possible to take into account the influence of parasitic senior azimuthal harmonics of the electric field in the case of replacing ideal multipole profiles for diaphragm apertures with multipole segmented circular diaphragms. Estimation of the exponential-step damping of parasitic azimuthal harmonics as the distance from the edge of the diaphragm helps to choose the geometric characteristics of the electrodes, optimal for the device's function.

In subsequent publications, it is planned to study the features of the functioning of cylindrical radio-frequency transport channels using a pseudopotential model of the movement of charged particles in high-frequency electric fields and analytical expressions for electric fields obtained in this article.

APPENDIX

Fig. II. The exact shape of the electrodes for the sum of axisymmetric and quadrupole potentials.
a — three-dimensional view of the electrodes, b — equipotential lines in the cross sections $z = \text{const}$ of the location of the maxima and minima of the axial distribution of the potential (shape of the holes)