ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2024, том 34, № 3, с. 70–78

УДК 534.232

© **Б. П. Шарфарец,** 2024

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В работе обосновывается возможность использования гидродинамической модели — вязкой несжимаемой теплопроводящей жидкости — для расчета параметров электроосмотического течения в пористой среде, наполненной жидкостью, в условиях приложения к этой среде постоянного и переменного электрических полей. Приводятся условия перехода к этой модели от модели вязкой, сжимаемой жидкости. Указываются границы параметров задачи, в частности границы скоростей течения и частотные ограничения для оправданности такого перехода. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании указанных процессов на вычислительных пакетах.

Кл. сл.: электроосмос, вязкая несжимаемая теплопроводная жидкость, система уравнений Навье-Стокса и переноса тепла

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появилось достаточно много работ, посвященных использованию электрокинетических явлений для создания электрокинетических преобразователей: звуковых излучателей, приемников и ретрансляторов. Укажем лишь несколько работ, вышедших в последние годы [1–8]. Решение этого вопроса с теоретической точки зрения практически завершено, однако не полностью сняты научно-технические вопросы, связанные с обеспечением практической реализации этого проекта. И касается это в первую очередь вопросов практической реализации электрокинетических преобразователей в жидкой среде. В случае с воздушными электрокинетическими преобразователями эти вопросы к настоящему моменту можно считать решенными. Тем не менее, не дожидаясь окончательного решения научно-технических проблем, связанных с указанными преобразованиями в жидкости, желательно воспользоваться численным моделированием процессов на вычислительных пакетах с целью оценки сравнительной эффективности жидкостных и воздушных электрокинетических преобразователей вообще и электрокинетических излучателей в частности для адекватного прогноза эффективности их работы в жидкой среде.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Основная цель работы заключается в выборе и обосновании простейшей математической электрогидродинамической модели функционирования электрокинетического излучателя в воде и в воздухе по компромиссному критерию "точность вычислений – скорость вычислений". Такой критерий актуален благодаря очень широкому кругу выбора математических моделей по их сложности и, соответственно, по немалому времени численного моделирования указанных непростых процессов.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Рассматриваемая в работе тематика относится к компетенции достаточно молодой области физики — *электрогидродинамике* (ЭГД). Согласно [9, с. 653], в средах с очень малой электропроводностью и без приложенного извне большого магнитного поля при скоростях движения жидкости, много меньших скорости света, определяющим во взаимодействии электромагнитного поля со средой является не магнитное, а электрическое поле. Электрическое поле в ЭГД описывается законами электростатики, а его воздействие на среду — электрической частью силы Лоренца $\rho_e\mathbf{E}$, где ρ_e — плотность электрического заряда в среде, а $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля. Электрический ток определяется при этом не только самостоятельным движением зарядов, но и учитывается ток переноса заряда жидкостью $\rho_e\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ — скорость течения жидкости) и ток смещения. Уравнениям электрогидродинамики посвящено достаточно много публикаций (отнюдь не полный их перечень приведен в работе [10]). Далее приведем систему уравнений ЭГД, выписанную в [10] с необходимыми комментариями, связанными с моделированием процессов на пакете COMSOL.

Первыми рассмотрим гидродинамические уравнения: сохранение импульса (уравнение Навье – Стокса) и уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости с необходимыми обоснованиями выбора.

Начнем с общего случая сжимаемой вязкой жидкости. Согласно [11, с. 73], уравнение Навье – Стокса (сохранения импульса) и уравнение непрерывности [11, с. 18] имеют соответственно вид:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]= -\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot)\mathbf{v}+\mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0. \quad (2)$$

При определенных условиях жидкость можно считать несжимаемой, что влечет за собой упрощение системы уравнений Навье – Стокса и уравнения непрерывности, которые в случае однородной жидкости сводятся соответственно к виду [11, с. 73, 37]:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+\mathbf{f}, \quad (3)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0. \quad (4)$$

В (1)–(4) приняты обозначения: $\mathbf{v}$ — поле скоростей жидкости; p — поле давления в жидкости; $\eta=\text{const}$ и $\zeta=\text{const}$ — сдвиговая и объемная вязкости жидкости соответственно (для упрощения расчетов принимается допущение о постоянстве этих величин); $\mathbf{f}=\rho_e\mathbf{E}$ — объемная сила, действующая на единицу объема жидкости, характерная для электроосмотических задач; $\mathbf{E}=(0,0,E)$ — напряженность электрического поля, приложенного к торцам расположенного вдоль вертикальной оси Oz наполненного жидкостью капилляра длиной l; ρ_e — плотность электрического заряда в жидкости (электрический заряд единицы объема жидкости). Кроме того, в случае (1), (2) ρ — поле плотности среды в общем случае $\rho\neq\text{const}$, а в случае (3), (4) поле плотности среды постоянно $\rho=\text{const}$.

Далее рассмотрим пределы возможности использования модели несжимаемой вязкой жидкости для электроосмотических процессов. Согласно [11, с. 41], жидкость при стационарном ее течении можно считать несжимаемой при условии, что вариации плотности среды малы: $\frac{\Delta\rho}{\rho}\ll 1$, что равносильно условию $|\mathbf{v}|\ll c$, где $|\mathbf{v}|$ — амплитуда вектора скорости жидкости, c — скорость звука в жидкости. Кроме того, в нестационарном режиме движения жидкости необходимо выполнение еще одного условия [11, с. 42]:

$$\tau\gg\frac{l}{c},$$

где τ и l — величины порядка промежутков времени и расстояний, на которых скорость жидкости и промежутки времени соответственно испытывают заметное изменение.

Согласно результатам работы [12], система уравнений гидродинамики для несжимаемой жидкости (3), (4) адекватно описывает гидродинамику процессов в электрокинетических преобразователях соответственно в воде до частот $f\le 100$ кГц и $f\le 20$ кГц в воздухе.

Далее рассмотрим уравнение сохранения энергии (уравнение теплопроводности) также для обоих случаев жидкости — сжимаемой и несжимаемой.

В случае сжимаемой жидкости это уравнение имеет вид [11, с. 273]:

$$\rho T\left[\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla s\right]=\nabla\cdot(\kappa\nabla T)+ +\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)^2+\zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2. \quad (5)$$

Здесь T — поле температур в жидкости; s — энтропия единицы массы жидкости; κ — коэффициент теплопроводности.

В случае несжимаемой жидкости уравнение теплопроводности преобразуется к виду [11, с. 277]:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla T=\chi\Delta T+\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2+w/\rho c_p, \quad (6)$$

где $\nu=\eta/\rho$ — кинематическая вязкость, а вместо коэффициента теплопроводности κ введена температуропроводность $\chi=\kappa/\rho c_p$; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

В уравнении (6), в отличие от [11, (50.2)], справа добавлена плотность теплового источника w (нормированная, как вся правая часть, произведением ρc_p) — теплота, выделенная источником в единицу времени в единице объема жидкости, $[w]=\text{Вт/м}^3$. Рассмотрим случай, когда такой тепловой источник порождается процессом прохождения через электролит электрического тока. В данном случае воспользуемся законом Джоуля – Ленца о выделении тепла при прохождении тока. Мощность выделения тепла w (тепла, выделяемого в единице объема среды в единицу времени) при протекании электрического тока пропорциональна произведению плотности электрического тока $\mathbf{j}$ на величину напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ [14, с. 604, 605]. Математически это записывается так:

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\,. \qquad (7)$$

Для того, чтобы в уравнениях движения неравномерно нагретой жидкости можно было считать плотность постоянной, необходимо, помимо малости отношения скорости жидкости к скорости звука $|\mathbf{v}| \ll c$, чтобы имеющиеся в жидкости разности температур были достаточно малы (речь идет именно об абсолютных значениях разности температур, а не о градиенте температуры). В этом случае жидкость можно считать несжимаемой. Считая разности температур малыми, можно пренебречь также и температурной зависимостью величин η, κ и c_p, т.е. уравнение теплопроводности может быть записано в виде (6) [11, с. 277].

Таким образом, при принятых выше допущениях гидродинамическая часть уравнений, описывающих исследуемый процесс, может быть записана в виде уравнений Навье – Стокса для несжимаемой жидкости (3), (4), а уравнение теплопроводности может быть записано в виде (6), (7).

О ПЛОТНОСТИ ТОКА В ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ

В электроосмотическом процессе при вычислении плотности электрического тока $\mathbf{j}$ в заполненных жидкостью тонких капиллярах и диафрагмах необходимо учитывать некоторые особенности электропроводности, в отличие от электропроводности в свободной жидкости (см., например, [15, гл. 5], [16, с. 211–214]). Это связано с повышением концентрации ионов около поверхностей раздела жидкость – твердое тело вследствие образования двойного электрического слоя (ДЭС). В результате адсорбции ионов суммарная концентрация их в подвижной части ДЭС превышает таковую в окружающем свободном растворе. Избыток противоионов в ДЭС превышает по абсолютной величине недостаток коионов. В этом случае возникает дополнительная электропроводность σ_s, обусловленная поверхностным избытком ионов и называемая поверхностной проводимостью. Отметим [16, с. 211], что величина σ_s здесь отнюдь не является удельной проводимостью поверхностного слоя, а представляет собой избыток объемной проводимости жидкости σ в пористой среде, усредненный, как бы "размазанный" по всему объему капилляра. Таким образом, удельная электропроводность пóрового раствора σ является суммой объемной электропроводности σ_v и поверхностной электропроводности σ_s: $\sigma = \sigma_\mathrm{v} + \sigma_\mathrm{s}$.

В работе [15, с. 26] тем не менее отмечено, что при выполнении условия*

$$\mathrm{Rel} = \frac{\sigma_\mathrm{s}}{\sigma_\mathrm{v}} \ll 1 \qquad (8)$$

поверхностная проводимость оказывает слабое влияние на электрокинетические явления. А для случая капилляров постоянного сечения поправкой (8) исчерпывается влияние поверхностной проводимости на электрокинетические явления и, в частности, на электроосмос.

Поскольку далее при проведении модельных экспериментов радиус капилляра, наполненного жидкостью, в котором осуществляется моделирование электроосмотического процесса, будет значительно больше толщины ДЭС, то жидкость, текущая через капилляр, будет иметь удельную электропроводность σ, близкую к σ_v, и поверхностной проводимостью можно пренебречь.

О ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА w

Мощность w выделения тепла (7) в капилляре вычисляется так:

$$w = \mathbf{jE} = \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}}{\sigma_\mathrm{v}} = \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_\mathrm{v}} = \sigma_\mathrm{v}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = \sigma_\mathrm{v}|\mathbf{E}|^2. \qquad (9)$$

На электроды мембраны электрокинетического излучателя обычно подается смесь $U_0 + u_1$ постоянного напряжения $U_0 = \mathrm{const}$ и переменного синусоидального напряжения $u_1 = u_0 e^{\mathrm{i}\omega t}$ соответственно (здесь u_0 — амплитуда переменного напряжения u_1). В случае гармонического переменного напряжения в (9) нужно учитывать *действующее* значение амплитуды электрического поля, в случае постоянного напряжения в (9) учитывается

---

* В настоящее время безразмерное число Rel получило общепризнанное название "число Духина" Du в честь одного из соавторов работы [15], предложившего этот критерий подобия.

амплитуда постоянного напряжения. Тогда (9) после осреднения по периоду колебаний переписывается так: $\overline{w} = \overline{w}_0 + \overline{w}_1$, где $\overline{w}_0$ и $\overline{w}_1$ равны соответственно:

$$\overline{w}_0 = \sigma_{\mathrm{v}} \left|\mathbf{E}_0\right|^2 = \sigma_{\mathrm{v}} \left(U_0/l\right)^2 \quad \text{и}$$

$$\overline{w}_1 = \sigma_{\mathrm{v}} \overline{\left|\mathbf{E}_1\right|^2} = \sigma_{\mathrm{v}} \overline{\left(u_1/l\right)^2} = \sigma_{\mathrm{v}} \left(u_0/l\right)^2/2 .$$

Здесь l — толщина мембраны электрокинетического излучателя. Окончательно для (9) имеем:

$$w = \frac{\sigma_{\mathrm{v}}}{l^2}\left[U_0^2 + u_0^2/2\right]. \qquad (10)$$

Тогда с учетом (10) уравнение (6) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \chi\Delta T + \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 + $$
$$+ \frac{\sigma_{\mathrm{v}}}{\rho c_p l^2}\left[U_0^2 + u_0^2/2\right]. \qquad (11)$$

ВЫВОДЫ

Таким образом, выше показано, что система уравнений для описания гидродинамических процессов и процессов, связанных с теплопереносом, применительно к моделированию электрокинетического излучателя при подаче на него постоянного напряжения накачки U_0 и переменного напряжения амплитудой u_0, может быть ограничена гидродинамической системой уравнений (3), (4) с источником $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E}$ в (3) и уравнением сохранения энергии (11) с источником $\frac{\sigma_{\mathrm{v}}}{\rho c_p l^2}\left[U_0^2 + u_0^2/2\right]$.

Предложенная система уравнений является полной и максимально упрощенной, позволяя достаточно точно численно моделировать рассматриваемые процессы.

Работа выполнена в ИАП РАН в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ № 075-01157-23-00 от 29.12.2022 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Шарфарец Б.П., Гуляев Ю.В.* Теоретическое обоснование нового метода электроакустического преобразования. Линейное приближение // Доклады Академии наук. 2018. Т. 483, № 3. С. 260–264. DOI: 10.31857/S086956520003244-1
2. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Гуляев Ю.В.* О методе электроакустического преобразования, основанном на электрокинетических явлениях // Акуст. журн. 2020. Т. 66, № 4. С. 453–462. DOI: 10.31857/S0320791920030053
3. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Сергеев В.А.* О работе электроакустического преобразователя, основанного на электрокинетических явлениях, при турбулентном режиме движения жидкости // Акуст. журн. 2020. Т. 66, № 5. С. 575–580. DOI: 10.31857/S0320791920050135
4. *Шарфарец Б.П.* Реализация приемной антенны на механизме электрокинетического явления "потенциал течения" // Научное приборостроение. 2019. Т. 29, № 2. С. 103–108. URL: http://iairas.ru/mag/2019/abst2.php#abst13
5. *Шарфарец Б.П., Дмитриев С.П., Курочкин В.Е., Сергеев В.А.* О методе акустоэлектрического преобразования на основе электрокинетических явлений // Акуст. журн. 2022. Т. 68, № 5. С. 571–578. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=49273414
6. *Дмитриев С.П., Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* К вопросу о чувствительности микрофона нового типа // Научное приборостроение. 2021. Т. 31, № 2. С. 77–83. URL: http://iairas.ru/mag/2021/abst2.php#abst7
7. *Шарфарец Б.П., Дмитриев С.П., Курочкин В.Е., Легуша Ф.Ф.* Электрокинетический ретранслятор акустических колебаний // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48, вып. 11. С. 29–31. DOI: 10.21883/PJTF.2022.11.52610.18971
8. *Шарфарец Б.П., Дмитриев С.П., Курочкин В.Е.* Электрокинетический акустический ретранслятор, находящийся в постоянном электрическом поле // Журн. техн. физики. 2024. Т. 94, вып. 1. С. 151–155. DOI: 10.61011/JTF.2024.01.56913.100-23
9. Физическая энциклопедия. Т. 2 / Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Сов. Энциклопедия, 1990. 704 с.
10. *Шарфарец Б.П.* Система уравнений электрогидродинамики применительно к электроосмотическим процессам // Научн. приборостроение. 2019. Т. 29, № 1. С. 135–142. URL: http://iairas.ru/mag/2019/abst1.php#abst20
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. *Шарфарец Б.П.* Обоснование возможности использования гидродинамической модели вязкой несжимаемой жидкости при моделировании на программном пакете излученного поля электроосмотического электроакустического излучателя // Научн. приборостроение. 2023. Т. 33, № 3. С. 117–124. URL: http://iairas.ru/mag/2023/abst3.php#abst8
13. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
14. Физическая энциклопедия. Т. 1. М.: Советская энциклопедия. 1988. 699 с.
15. *Духин С.С., Дерягин Б.В.* Электрофорез. М.: Наука, 1976. 332 с.
16. *Фридрихсберг Д.А.* Курс коллоидной химии. Л.: Химия, 1984. 368 с.

Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 06.05.2024

ISSN 0868–5886 NAUCHNOE PRIBOROSTROENIE, 2024, Vol. 34, No. 3, pp. 70–78

SYSTEM OF EQUATIONS FOR MODELING ELECTROOSMOTIC EMITTER IN THE APPROXIMATION OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE HEAT-CONDUCTING FLUID

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg, Russia

The paper substantiates the possibility of using a hydrodynamic model of a viscous, incompressible, heat-conducting fluid to calculate the parameters of electroosmotic flow in a porous medium filled with liquid under conditions of the application of a constant and alternating electric field to this medium. Conditions for transitioning to this model from the model of viscous, compressible liquid are given. The boundaries of the problem parameters, in particular the boundaries of flow velocities and frequency constraints for the justification of such a transition, are specified. The obtained results can be used in modeling the above processes using computational packages.

Keywords: electroosmosis, viscous incompressible heat-conducting fluid, system of Navier-Stokes equations and heat transfer

INTRODUCTION

Recently, quite a lot of work on the use of electrokinetic phenomena has appeared to create electrokinetic transducers: sound emitters, receivers, and repeaters. We will indicate only a few works published in recent years [1–8]. The state of solving this issue from a theoretical point of view is almost complete, but it does not completely consider scientific and technical issues related to ensuring the practical implementation of this project. And this concerns, first of all, the issues of the practical implementation of electrokinetic converters in a liquid medium. As for air electrokinetic converters, these issues can be considered resolved by now. Nevertheless, without waiting for a final solution to the scientific and technical problems associated with these transformations in liquids, it is desirable to use numerical modeling of processes on computer packages in order to assess the comparative efficiency of liquid and air electrokinetic converters in general and electrokinetic emitters in particular for an adequate forecast of their efficiency in a liquid medium.

PROBLEM STATEMENT

The main goal of the work is to select and justify the simplest mathematical electrohydrodynamic model of an electrokinetic emitter operating in water and air according to the compromise criterion "calculation accuracy – calculation speed". This criterion is relevant due to the very wide range of mathematical models in terms of their complexity and, accordingly, the considerable time spent on numerical modeling of these difficult processes.

BASIC EQUATIONS FOR DESCRIBING THE ELECTROOSMOTIC PROCESS

The topics considered in the work refer to the competence of a fairly young field of physics — *electrohydrodynamics* (EHD). According to [9, p. 653], in environments with very low electrical conductivity and without a large magnetic field applied from the outside, at liquid velocities much lower than the speed of light, the determining factor in the interaction of the electromagnetic field with the medium is not the magnetic, but the electric field. The electric field in the EHD is described by the laws of electrostatics, and its effect on the medium is described by the electric part of the Lorentz force $\rho_e \mathbf{E}$ where ρ_e is the electric charge density in the medium, and $\mathbf{E}$ is the electric field strength vector. The electric current is determined not only by the independent movement of charges but also by taking into account the current of charge transfer by the liquid $\rho_e \mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ — the flow rate of the liquid) and the bias current. Quite a lot of publications are devoted to the equations of electrohydrodynamics (by no means a complete list of them is given in [10]). Next, we present the system of EHD equations, written out in [10] with necessary comments related to modeling using the COMSOL package.

The first to consider are the hydrodynamic equations: momentum conservation (Navier – Stokes equation) and the continuity equation for an incompressible fluid, with the necessary justifications for the choice.

Let's start with the general case of a compressible viscous fluid. According to [11, p. 73], the Navier – Stokes equation (conservation of momentum) and the continuity equation [11, p. 18] are respectively of the form:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]=$$

$$=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot)\mathbf{v}+\mathbf{f}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0. \qquad (2)$$

Under certain conditions, the liquid can be considered incompressible, which entails the simplification of the Navier – Stokes equations and the continuity equation, which in the case of a homogeneous liquid are reduced to the form [11, pp. 73, 37]:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+\mathbf{f}, \qquad (3)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0. \qquad (4)$$

In (1)–(4), the following designations are adopted: $\mathbf{v}$ — fluid velocity field; p — fluid pressure field; $\eta=\text{const}$ and $\zeta=\text{const}$ — shear and volumetric viscosities of the liquid, respectively (to simplify the calculations, the assumption is made that these values are constant); $\mathbf{f}=\rho_e\mathbf{E}$ — volumetric force acting per unit volume of the liquid and characteristic for electroosmotic tasks; $\mathbf{E}=(0,0,E)$ — the electric field strength applied to the ends of a capillary of length l located along the vertical axis *Oz* and filled with liquid; ρ_e — density of the electric charge in the liquid (electric charge per unit volume of liquid). In addition, in cases (1), (2) ρ is the density field of the medium in the general $\rho\neq\text{const}$, and in the cases (3), (4) the density field of the medium is constant $\rho=\text{const}$.

Next, consider the limits of possibility using an incompressible viscous fluid model for electroosmotic processes. According to [11, p. 41], a liquid with its stationary flow can be considered incompressible provided that the variations in the density of the medium are small: $\frac{\Delta\rho}{\rho}\ll 1$, which is equivalent to the condition $|\mathbf{v}|\ll c$, where $|\mathbf{v}|$ is the amplitude of the liquid velocity vector; c — the speed of sound in fluid. In addition, in the transient mode of fluid movement, one more condition must be met [11, p. 42]:

$$\tau \gg \frac{l}{c},$$

where τ and l are values of the order of time intervals and distances at which the liquid velocity and time intervals, respectively, experience a noticeable change.

According to the results of work [12], the system of equations of hydrodynamics for incompressible fluid (3), (4) adequately describes the hydrodynamics of processes in electrokinetic transducers, respectively, to frequencies $f\leq 100\,\text{kHz}$ in water and $f\leq 20\,\text{kHz}$ in the air.

Next, consider the energy conservation equation (thermal conductivity equation) for both cases of liquid — compressible and incompressible.

In the case of a compressible fluid, this equation is [11, p. 273]:

$$\rho T\left[\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla s\right]=\nabla\cdot(\kappa\nabla T)+$$

$$+\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)^2+\zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2. \qquad (5)$$

Here T is the temperature field in the fluid; s is the entropy of the mass unit of the fluid; κ is the thermal conductivity coefficient.

In the case of an incompressible fluid, the equation of thermal conductivity is converted to the form [11, p. 277]:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla T=\chi\Delta T+\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2+w/\rho c_p, \qquad (6)$$

where $\nu=\eta/\rho$ is the kinematic viscosity, and thermal conductivity κ is replaced by thermal diffusivity $\chi=\kappa/\rho c_p$; c_p is the specific heat capacity at constant pressure.

In equation (6), unlike [11, (50.2)], the density of the heat source w (normalized as the entire right side by the product ρc_p) is added to the right side— the heat emitted by the source per unit time per unit volume of liquid, $[w]=\text{W/m}^3$. Consider the case when such a thermal source is generated by the electric current passing through the electrolyte. In this case, we will use the Joule – Lenz law on the release of heat during the passage of current. The power of heat release w (heat released per unit volume of the medium per unit time) during the flow of electric current is proportional to the product of the electric current density $\mathbf{j}$ by the value of the electric field strength $\mathbf{E}$ [14, pp. 604, 605]. Mathematically, it is written like this:

$$w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\,. \qquad (7)$$

In order for the density of an unevenly heated liquid to be considered constant in the equations of motion, it is necessary, in addition to the smallness of the ratio of the velocity of the liquid to the speed of sound $|\mathbf{v}| \ll c$, that the temperature differences in the liquid are sufficiently small (we are talking about the absolute values of the temperature difference, and not about the temperature gradient). In this case, the liquid can be considered incompressible. Considering the temperature differences as small, one can also neglect the temperature dependence of the values η, κ and c_p, i.e., the equation of thermal conductivity can be written in the form of (6) [11, p. 277].

Thus, with the above assumptions, the hydrodynamic part of the equations describing the process under study can be written in the form of Navier – Stokes equations for incompressible fluid (3), (4), and the equation of thermal conductivity can be written in the form of (6), (7).

ABOUT CURRENT DENSITY IN ELECTROOSMOTIC PROCESS

Considering the electroosmotic process and calculating the electric current density $\mathbf{j}$ in thin capillaries and diaphragms filled with liquid, it is necessary to take into account some features of electrical conductivity in contrast to electrical conductivity in a free liquid (see, for example, [15, Ch. 5]; [16, pp. 211–214]). This is due to an increase in the concentration of ions near the liquid — solid body interfaces due to the formation of an electrical double layer (EDL). As a result of the adsorption of ions, their total concentration in the EDL moving part exceeds that in the surrounding free solution. The excess of counterions in EDL exceeds the deficiency of coions in absolute value. In this case, additional electrical conductivity arises due to the surface excess of ions and is called surface conductivity. Note [16, p. 211] that the value σ_s here is not the specific conductivity of the surface layer, but is an excess of the volumetric conductivity of the liquid σ in the porous medium, averaged, so to speak, "distributed" throughout the capillary. Thus, the conductivity of the pore solution σ is the sum of the volumetric conductivity σ_v and surface conductivity σ_s: $\sigma = \sigma_\text{v} + \sigma_\text{s}$.

In work [15, p. 26], however, it is noted that when the condition is met*

$$\mathrm{Rel} = \frac{\sigma_\text{s}}{\sigma_\text{v}} \ll 1 \qquad (8)$$

surface conductivity has little effect on electrokinetic phenomena. And for the case of capillaries of constant cross-section, correction (8) exhausts the effect of surface conductivity on electrokinetic phenomena, in particular electroosmosis.

Since, in conducting model experiments, the radius of the liquid-filled capillary in which the electroosmotic process is simulated will be significantly greater than the thickness of the EDL, the liquid flowing through the capillary will have a specific electrical conductivity σ close to σ_v and surface conductivity can be neglected.

ABOUT HEAT SOURCE DENSITY *w*

The heat generation power w (7) in the capillary is calculated as follows:

$$w = \mathbf{jE} = \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}}{\sigma_\text{v}} = \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_\text{v}} = \sigma_\text{v}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = \sigma_\text{v}|\mathbf{E}|^2. \qquad (9)$$

The electrodes of the electrokinetic emitter membrane are usually supplied with a mixture $U_0 + u_1$ of constant voltage $U_0 = \text{const}$ and alternating sinusoidal voltage $u_1 = u_0 e^{i\omega t}$, respectively (here u_0 — the amplitude of the alternating voltage u_1). In the event of harmonic alternating voltage in (9) it is necessary to take into account the *actual* value of electric field amplitude; in the event of constant voltage in (9) it is necessary to take into account the amplitude of constant voltage. Then, after averaging over the period of oscillations, (9) can be rewritten as follows: $\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_1$, where $\bar{w}_0$ and $\bar{w}_1$ are equal, respectively:

$$\bar{w}_0 = \sigma_\text{v}|\mathbf{E}_0|^2 = \sigma_\text{v}(U_0/l)^2 \quad \text{and}$$

$$\bar{w}_1 = \sigma_\text{v}\overline{|\mathbf{E}_1|^2} = \sigma_\text{v}\overline{(u_1/l)^2} = \sigma_\text{v}(u_0/l)^2/2\,.$$

Here l is the thickness of the membrane of the electrokinetic emitter. Finally, for (9) we have:

$$w = \frac{\sigma_\text{v}}{l^2}\left[U_0^2 + u_0^2/2\right]. \qquad (10)$$

Then, taking into account (10), equation (6) can be written as follows:

* Currently, the dimensionless number Rel has received the generally recognized name "Dukhin number" Du in honor of one of the co-authors of the work [15], who proposed this similarity criterion.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + \\ + \frac{\sigma_\mathrm{v}}{\rho c_p l^2} \left[U_0^2 + u_0^2 / 2 \right]. \qquad (11)$$

CONCLUSIONS

Thus, it is shown above that the system of equations for describing hydrodynamic processes and processes associated with heat transfer in relation to modeling an electrokinetic emitter when applying a constant pump voltage U_0 and an alternating voltage with amplitude u_0 to it can be limited by the hydrodynamic system of equations (3), (4) with the source $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E}$ in (3) and the energy conservation equation (11) with the source $\frac{\sigma_\mathrm{v}}{\rho c_p l^2} \left[U_0^2 + u_0^2 / 2 \right]$.

The proposed system of equations is complete and simplified as much as possible, allowing us to accurately model the processes under consideration.

REFERENCES

1. Kurochkin V.E., Sergeyev V.A., Sharfarets B.P., Gulyayev Yu.V. [Theoretical argumentation of the new method of electro-acoustic conversion. Linear approximation]. *Doklady Akademii nauk* [Doklady Physics], 2018, vol. 483, no. 3, pp. 260–264. DOI: 10.31857/S086956520003244-1 (In Russ.).
2. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E., Sergeev V.A., Gulyaev Yu.V. [On the electroacoustic transformation method based on electrokinetic phenomena]. *Akusticeskij zurnal* [Acoustical Physics], 2020, vol. 66, no. 4, pp. 453–462. DOI: 10.31857/S0320791920030053 (In Russ.).
3. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E., Sergeev V.A. [On the operation of an electroacoustic transducer based on electrokinetic phenomena under turbulent fluid motion]. *Akusticeskij zurnal* [Acoustical Physics], 2020, vol. 66, no. 5, pp. 575–580. DOI: 10.31857/S0320791920050135 (In Russ.).
4. Sharfarets B.P. [Implementation of receiving antenna using mechanism of electrokinetic phenomenon "flow potential"]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2019, vol. 29, no. 2, pp. 103–108. DOI: 10.18358/np-29-2-i103108 (In Russ.).
5. Sharfarets B.P., Dmitriev S.P., Kurochkin V.E., Sergeev V.A. [On the method of acoustoelectric transformation based on electrokinetic phenomena]. *Akusticeskij zurnal* [Acoustical Physics], 2022, vol. 68, no. 5, pp. 571–578. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=49273414 (In Russ.).
6. Dmitriev S.P., Kurochkin V.E., Sharfarets B.P. [On the question of the sensitivity of a new type of microphone]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2021. vol. 31, no. 2, pp. 77–83. DOI: 10.18358/np-31-2-i7783 (In Russ.).
7. Sharfarets B.P., Dmitriev S.P., Kurochkin V.E., Legusha F.F. [Electrokinetic repeater of acoustic vibrations]. *Pis'ma v ZhTF* [Technical Physics Letters], 2022, vol. 48, no. 11, pp. 29–31. (In Russ.). DOI: 10.21883/PJTF.2022.11.52610.18971
8. Sharfarets B.P., Dmitriev S.P., Kurochkin V.E. [An electrokinetic acoustic repeater located in a constant electric field]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2024, vol. 94, no. 1, pp. 151–155. (In Russ.). DOI: 10.61011/JTF.2024.01.56913.100-23
9. Prohorov A.M., ed. *Fizicheskaya ehnciklopediya* [Physical encyclopedia]. In 5 vol. Vol. 2. Moscow, Sovetskaya ehnciklopediya Publ., 1990. 704 p. (In Russ.).
10. Sharfarets B.P. [System electrohydrodynamics equations applied to electroosmotic processes]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2019. vol. 29, no. 1, pp. 135–142. DOI: 10.18358/np-29-1-i135142 (In Russ.).
11. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika, t. 6. Gidrodinamika* [Theoretical Physics, vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p. (In Russ.).
12. Sharfarets B.P. [Justification of the possibility of using the hydrodynamic model of a viscous incompressible fluid in software simulation of the radiated field of the electroosmotic electroacoustic radiator]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2023, vol. 33, no. 3, pp. 117–124. URL: http://iairas.ru/en/mag/2023/abst3.php#abst8 (In Russ.)
13. Koshlyakov N.S., Gliner Eh.B., Smirnov M.M. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Equations in partial derivatives of mathematical physics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1970. 712 p. (In Russ.).
14. Prohorov A.M., ed. *Fizicheskaya ehnciklopediya* [Physical encyclopedia]. In 5 vol., Vol. 1. Moscow, Sovetskaya ehnciklopediya Publ., 1988. 699 p. (In Russ.).
15. Dukhin S.S., Deryagin B.V. *Ehlektroforez* [Electrophoresis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 332 p. (In Russ.).
16. Fridrikhsberg D.A. *Kurs kolloidnoi khimii* [Colloidal chemistry course]. Leningrad, Khimiya Publ., 1984. 368 p. (In Russ.).

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article received by the editorial office on 06.05.2024