
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

УДК 517.956.255; 621.319.7

© С. И. Шевченко, 2024

О МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СВЕТОСИЛЫ В ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКЕ

Приведен метод расчета светосилы, примененный к цилиндрическому зеркалу. Показаны условия, при которых реализуется фокусировка второго порядка. Показана возможность увеличения светосилы при отборе тока из кольца эмиссии достаточно большого радиуса.

Кл. сл.: энергоанализатор, цилиндрическое зеркало, эмиссия, выходная апертура

ВВЕДЕНИЕ

В любом измерительном приборе желательно иметь как можно больший выходной сигнал (ток на выходе). Ради этого разработчикам приходится идти на разные ухищрения.

Применительно к энергоанализаторам (ЭА) заряженных частиц (ниже будем рассматривать электроны) как один из возможных путей повышения выходного сигнала рассматривалась возможность увеличения площади поверхности эмиттера, с которого частицы попадают на детектор. Рассмотрим аксиально-симметричную систему (например, цилиндрическое зеркало). Если эмиссия происходит не с оси (радиус-вектор точки эмиссии $\mathbf{r}_0 \neq 0$), то в аксиально-симметричном случае площадь эмиссии представляет собой кольцо некоторой толщины с центром, находящимся на оси системы. Если толщина кольца постоянна, а меняется радиус кольца r_0 , то с ростом r_0 площадь кольца эмиссии (КЭ) растет пропорционально r_0 .

В этом месте следует определить понятие светосилы. Рассмотрим ток, который выходит из некоторого малого участка эмиттера и попадает на детектор.

В общем случае [1] светосила некоторой (бесконечно) малой площади эмиттера ds при определенной энергии E — это отношение тока, вышедшего с этой площади и попавшего на детектор (dI_{det}), к полному току, эмитированному с этой площади (dI_{em}):

$$S_w = dI_{\text{det}}/dI_{\text{em}}.$$

Если считать распределение плотности эмиссии по углам изотропным, то выражение для светосилы упрощается

$$S_w = d\Omega/\Omega,$$

где $d\Omega$ — телесный угол, все электроны, вылетевшие в пределах которого, попадают на детектор; Ω — полный телесный угол 4π .

Это отношение в [1] названо геометрическим фактором.

При умножении площади выделенного малого элемента КЭ на плотность эмиссии и на величину светосилы получаем ток электронов в пространстве детектора, вылетевших с рассматриваемого элемента поверхности эмиттера.

Основной вклад в теорию функционирования цилиндрического зеркала внесли работы [2–5].

В данной работе рассмотрим вопросы вычисления телесного угла (ТУ) $d\Omega$.

Общие идеи применим к вычислению светосилы цилиндрического зеркала (ЦЗ).

ПОСТРОЕНИЕ ТЕЛЕСНОГО УГЛА

Рассмотрим геометрию цилиндрического зеркала (см. рис. 1). Эмитирующей поверхностью служит плоскость, перпендикулярная оси L системы.

Ввод заряженных частиц в дисперсионное пространство, а затем вход в пространство детектора осуществляется через идеальную сетку, являющуюся частью поверхности внутреннего цилиндра. Конкретные вычисления проводились для ЦЗ с диаметром внутреннего цилиндра $r_1 = 20$ мм, диаметром внешнего цилиндра $r_2 = 50$ мм.

Методика построения телесного угла приведена в работе [6]. В данной работе мы только вкратце коснемся этого вопроса. Для задания ТУ $d\Omega$ применяется задание его границ.

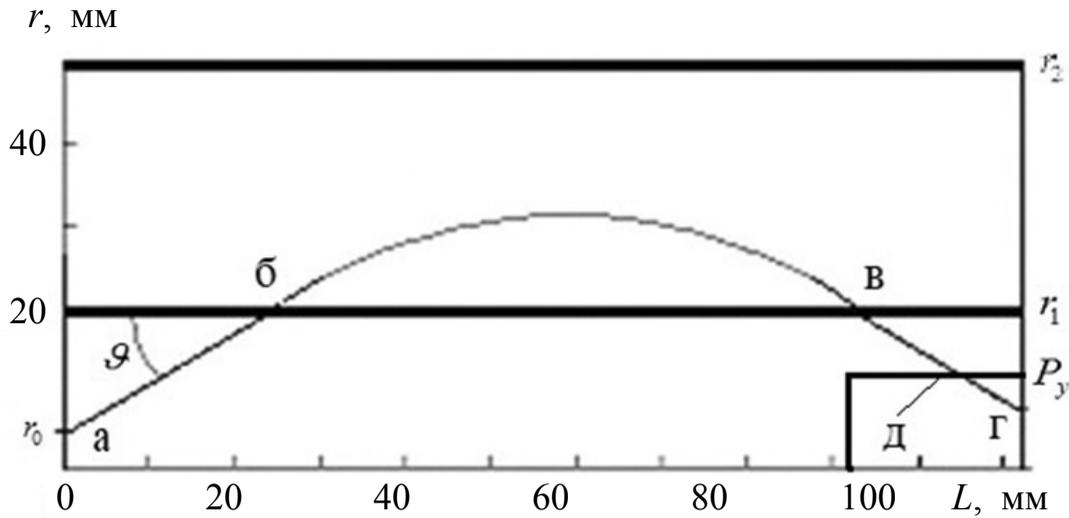


Рис. 1. Половина сечения цилиндрического зеркала (от оси и выше вдоль радиуса) плоскостью, опирающейся на ось.

L — ось ЦЗ; $r_1 = 20$ мм — радиус внутреннего цилиндра; $r_2 = 50$ мм — радиус внешнего цилиндра; r_0 — точка эмиссии электронов; д — цилиндр, на котором расположена выходная диафрагма (ЦВД); P_y — радиус цилиндра д; абвг — траектория электрона в ЦЗ; θ — стартовый угол наклона траектории к оси ЦЗ. Подробности в тексте

Все электроны, эмитированные с поверхности источника внутри этих границ, попадают в зазор выходной диафрагмы (ВД). Расстояние L вдоль оси Z , на котором электрон пересекает поверхность цилиндра, содержащего ВД (ЦВД), и попадает на детектор, удовлетворяет неравенству $L_{\text{Beg}} < L < L_{\text{End}}$, где L_{Beg} и L_{End} соответственно положения ближнего и дальнего края ВД. Для построения телесного угла следует построить линии, стартуя с которых электроны попадают в один из краев ВД.

Из работы [6] берем значение энергии старта электронов $E = 124.5$ эВ, и $L_{\text{Beg}} = 91.492$ мм, $L_{\text{End}} = 101.492$ мм. L_{Beg} и L_{End} выбирались такими, чтобы исследуемые нами эффекты проявили себя, $r_0 = 2$ мм, радиус ЦВД $P_y = 7$ мм.

Делим расстояние от ближнего края ВД до дальнего на $N_L = 100$ одинаковых частей. Массив линий $L[i_L]$ делит ЦВД на части

$$L[i_L] = L_{\text{Beg}} + dL \cdot i_L,$$

где $dL = (L_{\text{End}} - L_{\text{Beg}}) / N_L$ — шаг вдоль L ; i_L — номер линии деления, изменяется от 0 до N_L .

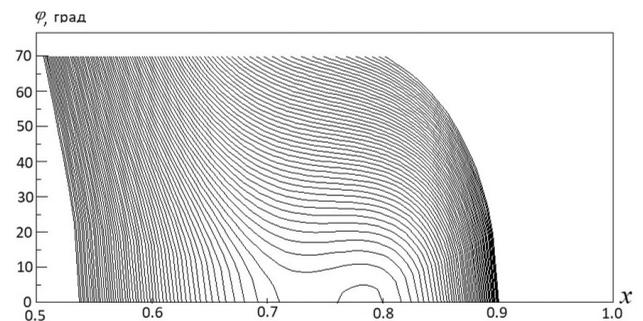


Рис. 2. Вид функции $\varphi(x, L[i_L])$ при фиксированной энергии E . Подробности в тексте

Для каждой линии $L[i_L]$ в соответствии с [6] рассчитываем и строим функцию $\varphi(x, L = L[i_L])$ (см. рис. 2), где: φ — азимутальный угол; $x = \cos(\theta)$ — косинус угла θ ; радиус старта электронов с поверхности источника $r_0 = 2$ мм; радиус цилиндра, содержащего ВД, $P_y = 7$ мм.

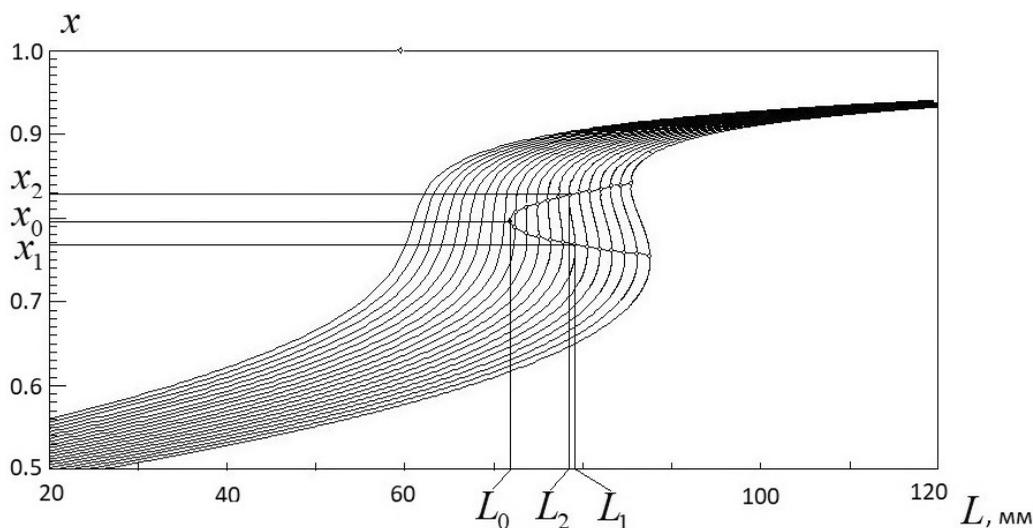


Рис. 3. График функции $x = x(L)$ при разных значениях энергии E .
 Подробности в тексте

Для каждой части ВД от $L[i_L]$ до $L[i_L + 1]$ на графике функции $\varphi(x)$ пространство между двумя линиями $\varphi(x, L[i_L])$ и $\varphi(x, L[i_L + 1])$ представляет собой телесный угол. Все электроны, испущенные между линиями $\varphi(x, L[i_L])$ и $\varphi(x, L[i_L + 1])$, попадают в зазор ВД между $L[i_L]$ и $L[i_L + 1]$.

Вид функции $\varphi(x, L[i_L])$, приведенный на рис. 2, показывает, что линия $\varphi(x, L[i_L])$ может иметь как одно, так и три пересечения с осью x . В дальнейшем нам понадобятся координаты этих точек пересечения. Вычисление точек пересечения означает нахождение нулей функции $\varphi(x, L[i_L])$ (см. Приложение 1).

Рассмотрим, как меняется вид соседних линий $\varphi(x, L[i_L])$ (и образуемый ими телесный угол) при увеличении расстояния L . Будем считать, что dL является малым. При значениях L , близких к L_{Beg} (см. рис. 2), последовательные линии $\varphi(x, L[i_L])$ и $\varphi(x, L[i_L + 1])$ располагаются практически параллельно и образуют некоторую область (телесный угол), назовем ее основной (см. линии слева на рис. 2 и в Приложении 2 обе линии на рис. П1). Затем при некотором значении $L = L_2$, справа от основной области, появляется малая область. Назовем эту область дополнительной (см. рис. П2 Приложения 2). Точку L_2 нанесем на график $x = x(L)$ (см. рис. 3, верхний ряд точек). При дальнейшем увеличении L дополнительная область начинает расширяться: сторона малых зна-

чений x в сторону меньших x и основной области, а сторона больших x в сторону больших x . При некоторых значениях L основная область и дополнительная область соприкоснутся и основная и дополнительная области сольются в одну основную область.

Рассмотрим поведение точек пересечения линий $\varphi(x)$ с осью L (при разных значениях L и фиксированной энергии E). Как видно из рис. 2, при значениях L , меньших некоторого значения, линии $\varphi(x)$ имеют только одну точку пересечения с осью L .

При значении $L = L_2$ на графике $\varphi(x)$ появляется точка (x_2, L_2) (справа от основной области), которая при дальнейшем увеличении L переходит в дополнительную область. При увеличении L график функции $\varphi(x)$ пересекает ось L уже в двух точках: слева от x_2 и справа (при x , меньших x_2 и больших x_2).

При дальнейшем увеличении L лежащая на оси L точка основной области движется в сторону больших x , а ближний край дополнительной области двигается в сторону меньших значений x . В некоторой точке при $L = L_1$ эти линии соприкоснутся. Поведение точек пересечения линий $\varphi(x)$ с осью L показано на рис. 3.

На рис. 3 в диапазоне изменения энергии от $E_{\text{Beg}} = 124.5$ эВ до $E_{\text{End}} = 129.5$ эВ, с шагом $dE = 0.25$ эВ представлены результаты вычисления функции $x = x(L)$.

Основные точки, которые определяют поведение функции $x = x(L)$: в точке (x_2, L_2) появляется дополнительная область, в точке (x_1, L_1) основная и дополнительная области соприкасаются. В точке (x_2, L_2) имеется экстремум (минимум) функции $L = L(x, E = \text{const})$, т.е. в этой точке имеется фокус первого порядка. На рис. 3 траекторию этой точки в переменных (x, L) составляет верхний ряд точек. В точке (x_1, L_1) имеется максимум функции $L = L(x, E = \text{const})$, т.е. в этой точке также имеется фокус первого порядка. Траектория этой точки составляет нижний ряд точек. В точке (x_0, L_0) два экстремума сливаются и получается фокус второго порядка.

Было отмечено, что максимальное значение светосилы наблюдается, когда основная и дополнительная области на графике функции $\varphi(x, L = L[i_L])$ касаются, что соответствует точке (x_1, L_1) на графике функции $L = L(x, E = \text{const})$. Эта точка является точкой фокуса первого порядка.

Таким образом в случае учета неаксиальных траекторий существует область (точка), в которой реализуется фокусировка второго порядка.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕЛЕСНОГО УГЛА

Выше был задан диапазон изменения длины вдоль поверхности цилиндра, содержащего ВД, $(L_{\text{Beg}}, L_{\text{End}})$, в пределах которого нам интересно распределение электронов по поверхности этого цилиндра. Этот довольно широкий диапазон первоначально был определен в работе [6]. Аналогично задаем диапазон изменения переменных x $(x_{\text{Beg}}, x_{\text{End}})$ и φ $(\varphi_{\text{Beg}}, \varphi_{\text{End}})$. Для каждой переменной задаем число разбиений соответствующего диапазона на участки-отрезки N_L, N_x, N_φ . И получаем шаг вдоль соответствующей переменной: $dL = (L_{\text{End}} - L_{\text{Beg}}) / N_L$, $dx = (x_{\text{End}} - x_{\text{Beg}}) / N_x$, $d\varphi = (\varphi_{\text{End}} - \varphi_{\text{Beg}}) / N_\varphi$.

Из всех пар линий $\varphi_{B,E}(x)$ можно выделить несколько типов (см. Приложение 2) в зависимости от значений индекса — числа пересечений нижней и верхней линий с осью x .

Для вычисления "площади" между двумя последовательными линиями $\varphi_B(x)$ и $\varphi_E(x)$ будем использовать метод квадратур Гаусса [7] (метод наивысшей алгебраической точности). Чтобы применять этот метод, линии $\varphi_{B,E}(x)$ не должны содержать изломов и сингулярностей, а также участков вблизи сингулярностей ($2N - 1$ гладкость

границ, где N — порядок квадратуры). Будем использовать квадратуры 10-го порядка.

На рис. 2. такими негладкими не подходящими для интегрирования участками могут быть участки линий $\varphi_{B,E}(x)$ вблизи пересечения этих линий с осью x , где эти линии могут быть практически перпендикулярными оси x . Поэтому на этих участках проводим интегрирование не по переменной x , а по переменной φ .

Рассмотрим первый участок на рис. П1, простирающийся от $x_B = x_{\text{min}}$ до $x_E = x_{\text{CT}_B[0]} - dx$, где $x_{\text{CT}_B[0]}$ — x -координата первой точки пересечения линии $\varphi_B(x)$ и оси x (определена в Приложении 1). В качестве x_{min} выбираем $x_{\text{min}} = 0.5$, что соответствует углу $\theta = 60^\circ$.

Делим этот участок на $N_1 = \text{int}((x_E - x_B) / dx) + 1$ частей (отрезков), где int — функция вычисления целой части от некоторого числа. Массив линий, делящих рассматриваемый участок, определяется формулой $x[n] = x_B + n \cdot dx$. В пределах каждого отрезка $(x[n], x[n+1])$ проводим численное интегрирование по правилу Гаусса. Согласно этому правилу, для каждого узла $x[i_g] = x[n] + xg[i_g] \cdot dx$ методом, описанным в [6], находим значения функций $\varphi_B(x)$ и $\varphi_E(x)$ на нижней и верхней линиях.

Формула Гаусса для отрезка $(x[n], x[n+1])$:

$$S_1[n] = \sum_{i_g=0}^9 Ag[i_g] \cdot (\varphi_E[i_g] - \varphi_B[i_g]),$$

где $S_1[n]$ — вклад в ТУ от отрезка номер n первого участка, i_g — номер узла Гаусса, $xg[i_g]$ — массив узлов Гаусса для отрезка $(0, 1)$, $x[i_g]$ — массив узлов Гаусса для отрезка $(x[n], x[n+1])$, $Ag[i_g]$ — массив весов Гаусса. Значения $xg[i_g]$ и $Ag[i_g]$ взяты из таблиц монографии [7], $\varphi_E[i_g]$ и $\varphi_B[i_g]$ — значения функций $\varphi_{B,E}(x)$ в узлах квадратуры, т.е. $\varphi_E(x[i_g])$ и $\varphi_B(x[i_g])$.

Суммируем все вклады от всех отрезков первого участка

$$S_1 = \sum_{n=0}^{N_1-1} S_1[n],$$

получаем вклад в ТУ от первого участка диафрагмы $(L[i_L], L[i_L + 1])$.

Подобным же образом вычисляем вклад от отрезка 3, где линии $\varphi_{B,E}(x[i_g])$ проходят вблизи оси x и касаются ее практически под прямым углом. Поэтому на этом участке проводим интегрирова-

ние по переменной φ . Для каждого $\varphi[i_g] = \varphi[n] + xg[i_g] \cdot d\varphi$ находим значения функции $x_{L,R}(\varphi[i_g])$ на левой и правой линиях $x_{L,R}(\varphi)$:

$$S_3[n] = \sum_{i_g=0}^9 Ag[i_g] \cdot (x_E[i_g] - x_B[i_g]).$$

Суммируя все вклады от отрезков 3-го участка, получаем вклад в ТУ от третьего участка

$$S_3 = \sum_{n=0}^{M_1-1} S_3[n].$$

Последний участок на рис. П1, имеющий "треугольный" вид, можно интегрировать как по переменной φ , так и по переменной x . Отличие этого случая от ранее рассмотренных в том, что одна из сторон, вдоль которой требуется вычислять x или φ , является прямой, параллельной одной из осей. Поэтому на этой прямой x или φ вычислять не требуется, т.к. на ней или x , или φ постоянны. Это сокращает время вычислений. Сравнительное вычисление площади этого треугольного участка интегрированием по переменной φ и по переменной x показало совпадение не хуже 5 знаков (значащих цифр).

Собираем все вычисленные части вместе и получаем ТУ, под которым из источника видна ВД в виде $(L[i_L], L[i_L + 1])$.

Вычисляем ТУ для всех участков длины зазора диафрагмы и получаем функцию, пропорциональную распределению электронов по длине цилиндра, содержащего ВД.

Все другие возможные случаи конфигурации ТУ, показанные на рис П1–П5, интегрируются вполне аналогично рассмотренному случаю.

На этих рисунках области интегрирования по переменной φ показаны (выделены) горизон-

тальной штриховкой. Области без штриховки интегрируются по переменной x .

Теперь, с одной стороны, можно вычислить ТУ для любой диафрагмы, размер которой кратен dL . С другой стороны, если построить график $S[i_L]$, то получим распределение значений ТУ вдоль цилиндра, содержащего ВД.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТУ ВДОЛЬ ЦИЛИНДРА, СОДЕРЖАЩЕГО ВД

Метод вычисления 1

Для получения функции $S(L)$ разбиваем выбранный участок ЦВД на N_L ($N_L = 100$) равных частей $(L[i_L])$, строим функции $\varphi(x, L[i_L])$ и для каждой пары $(L[i_L], L[i_L + 1])$ вычисляем телесный угол $(S^{(1)}[i_L])$. Верхний индекс в скобках указывает на то, что это результат первой итерации. Строим график функции $S^{(1)}(L)$ в виде гистограммы рис. 4, где на каждом отрезке $(L[i_L], L[i_L + 1])$ телесный угол постоянен.

Видно, что график этой функции имеет явно выраженный максимум.

Среди всех $S^{(1)}[i_L]$ находим максимальное значение $S_{\max}^{(1)}$ и его номер $i_{L_{\max}}$. Выбираем новый участок $(L[i_{L_{\max}} - 2], L[i_{L_{\max}} + 2])$, делим этот участок на $N_L = 100$ частей, находим на нем новые значения $S^{(2)}[i_L]$ и $S_{\max}^{(2)}$. Таким образом, за несколько итераций можно с хорошей точностью вычислить максимум функции и параметры максимума $S(L)$, т.е. значения S_{\max} , L_{\max} , x_{\max} , ($\varphi_{\max} \approx 0$).

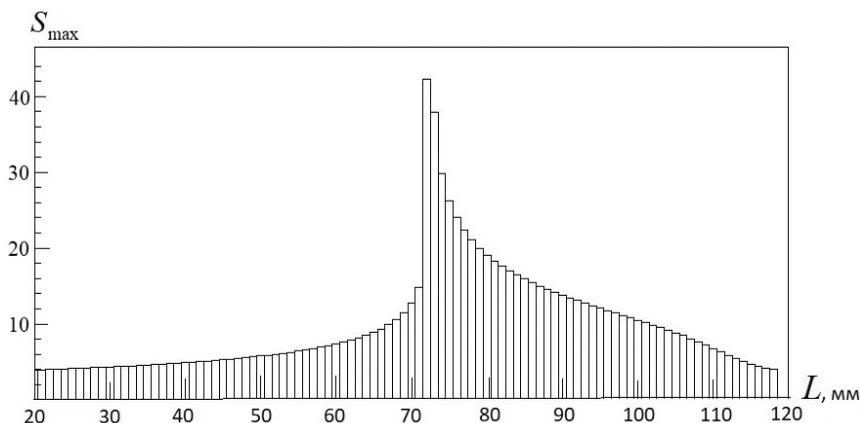


Рис. 4. Вид функции $S^{(1)}(L)$ при $dL = 0.1$ мм

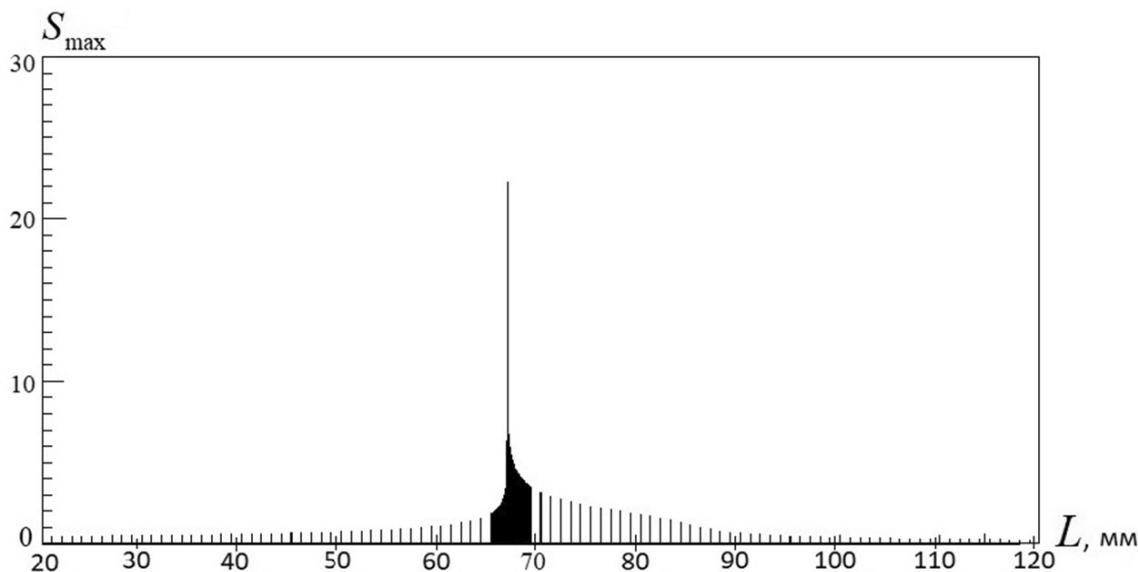


Рис. 5. Вид функции $S(L)$ при первых пяти итерациях

У этого метода есть недостаток: результаты разных итераций нельзя представить в виде одной линии (огibaющей вершин), т.к. масштабы по S разные.

Метод вычисления 2

Можно к этому вопросу подойти с несколько другой стороны. В предыдущем случае отрезки длины вдоль цилиндра, содержащего ВД, плотно покрывали эту длину. Нам нет необходимости в процессе поиска максимума ТУ знать величину этого ТУ. Достаточно знать величину ТУ относительно соседних участков.

В этом случае нет необходимости плотно покрывать длину цилиндра. Как ранее, разбиваем участок на ЦВД на $N_L = 100$ равных частей ($L[i_L]$). Берем некоторую ширину ΔL настолько малой, что при всех итерациях разница $L[i_L + 1] - L[i_L]$ была много больше этой ширины. Для образования зазора ВД, по которому будем проводить интегрирование, берем каждое $L[i_L]$ и отступаем от него в сторону меньших и больших значений длины на $\Delta L / 2$. Для этой ширины зазора проводим все вычисления. При этом в любой итерации масштаб по S будет одним и тем же.

Некоторая проблема в масштабе по L . Если при переходе к следующей итерации этот масштаб не менять, то уже вторая, третья и все последующие

итерации на графике $S(L)$ сольются (см. рис. 5). Однако хвосты пика будут хорошо видны.

На рис. 5 приведены результаты расчетов функции $S(L)$ в каждой из пяти проделанных итераций.

О сокращении времени расчетов

И в заключение этого раздела опишем, как сэкономить время расчетов. Для этого следует применить метод поиска максимума по пяти точкам. Интервал L , в котором предполагается нахождение максимума, делится на четыре равных отрезка. В 5 точках деления вычисляется $S(L)$ и среди них находится максимальное значение $S(L)$. Ближайшие 2 отрезка делятся пополам, и в точках деления вычисляются значения $S(L)$. Этим к максимальному значению и 2 точкам, ближайшим к точке с максимальным значением, прибавляются еще 2 точки. Всего снова получается 5 точек. Среди них находим точку с максимальным значением $S(L)$. И так далее. Итерационный процесс можно заканчивать, когда, например, разница между двумя значениями $S(L)$ в последовательных итерациях окажется меньше 10^{-6} . Этот метод нахождения максимума функции $S(L)$ оказывается значительно более быстрым, чем описанный ранее.

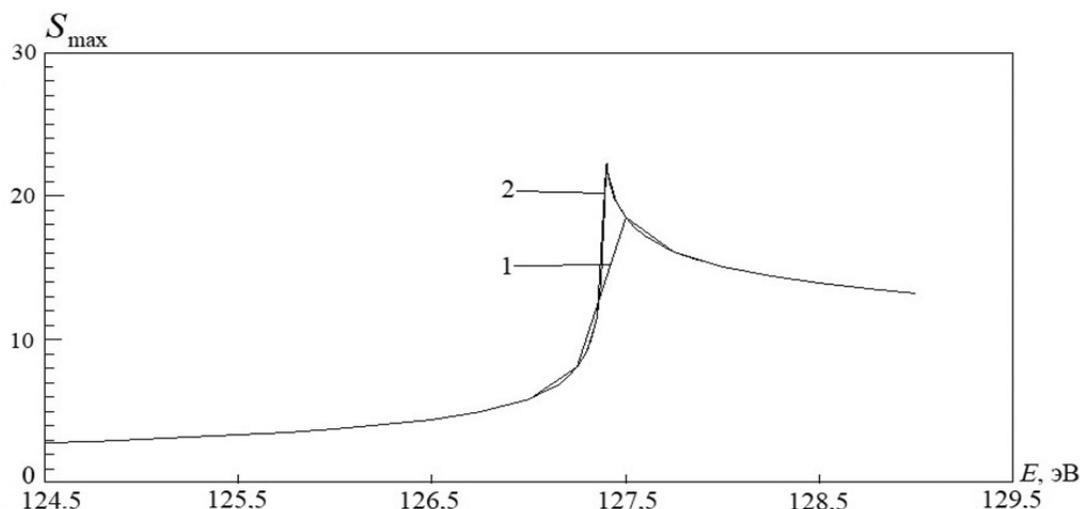


Рис. 6. Вид функции $S_{\max}(L_{\max}, E)$ для нескольких итераций по E .
1 — результат первой итерации, 2 — результат пятой итерации

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ

В предыдущем разделе было найдено расстояние L_{\max} вдоль оси системы, при котором реализуется максимально возможное значение телесного угла S_{\max} . Это было проделано при $E_0 = \text{const}$, $r_0 = \text{const}$, $P_y = \text{const}$.

Перед нами стоит задача получить максимальный ток на детекторе. Для этого следует получить максимальный исследованный выше телесный угол. Это задача оптимизации, а целевая функция — телесный угол.

Из [6] берем диапазон значений $E_0 = (E_{\text{Beg}}, E_{\text{End}})$, в рамках которого имеет смысл искать максимальное значение S_{\max} . Разбиваем этот диапазон на N_e поддиапазонов ($dE = (E_{\text{End}} - E_{\text{Beg}}) / N_e$) и при $N_e + 1$ значениях энергии ($E_{i_E} = E_{\text{Beg}} + dE \cdot i_E$) вычисляем S_{\max} максимальное среди всех значений L и заодно получаем L_{\max} , при котором этот максимум реализуется. Результаты такого действия приведены на рис. 6 (линия 1).

Каждая точка этого графика соответствует определенной энергии E и представляет собой максимальное значение ТУ при этой энергии. Далее находим максимальное значение по E , используя такой же алгоритм, что был использован при нахождении максимума по L . То есть находим максимальное значение $E_{\max}^{(1)}$ в первой итерации и номер этого значения $i_{E_{\max}^{(1)}}$. Далее уточняем

$E_{\max}^{(i)}$ по ранее приведенной для L методике. Для этого изменяем диапазон энергии:

$$E_{\text{beg}} = E[i_{E_{\max}} - 2] \text{ и } E_{\text{end}} = E[i_{E_{\max}} + 2].$$

В новом диапазоне вычисляем $S_{\max}(L_{\max}, E)$ и находим $E_{\max}^{(2)}$ и т.д.

Так как мы получили экстремум (максимум) по каждой из переменных (L и E), то в этой точке мы имеем локальный максимум. Этот алгоритм очень похож на метод Гаусса – Зайделя (метод покоординатного спуска, или поиск оптимума поочередно по каждой переменной).

Подобные действия проводим для $r_0 \in (0, r_1)$ и для $P_y \in (0, r_1)$. Результаты выведены на рис. 7.

На рис. 7 цифра 1 соответствует значению $r_0 = 0.1 \cdot r_1$, 2 — $r_0 = 0.2 \cdot r_1$, 3 — $r_0 = 0.3 \cdot r_1$, 4 — $r_0 = 0.4 \cdot r_1$, 5 — $r_0 = 0.5 \cdot r_1$, 6 — $r_0 = 0.6 \cdot r_1$, 7 — $r_0 = 0.7 \cdot r_1$, 8 — $r_0 = 0.8 \cdot r_1$, 9 — $r_0 = 0.9 \cdot r_1$.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Ранее было отмечено, что максимальное значение светосилы наблюдается, когда основная и дополнительная области на графике $\varphi(x)$ касаются, что соответствует точке (L_0, x_0) на графике $L(x)$. Находя максимум светосилы при изменении энергии, мы находим точку слияния двух фокусов первого порядка в фокус второго порядка.

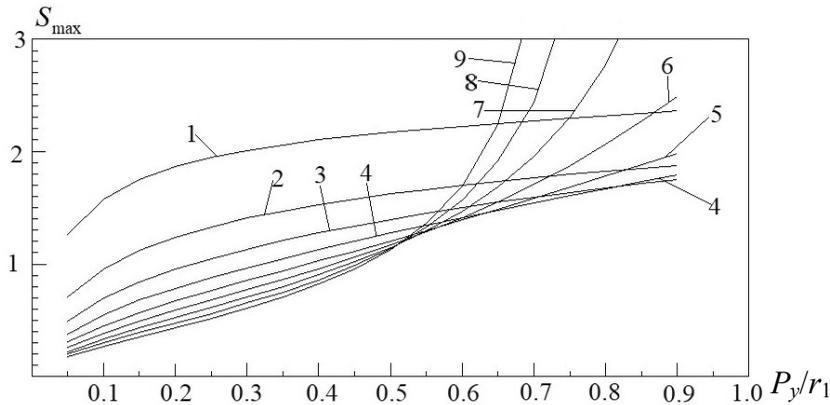


Рис. 7. Зависимость величины максимальной светосилы (оптимизированной по L и E) от радиуса ЦВД (P_y), при разных значениях радиуса старта электронов r_0 .
 Подробности в тексте

Табл. Сравнение найденных максимумов

Метод	S_{\max}	L_{\max} , мм
Слияние	0.10184942	96.725138
Оптимизация	0.10144286	96.725174

Для подтверждения этого приведем данные сравнения результатов поиска максимума светосилы методом оптимизации и только что описанным методом (см. табл.).

Описанная выше методика нахождения максимума светосилы не может обеспечить значительную точность. Хотя приведенные данные показывают весьма неплохие результаты. С другой стороны, новая методика показала, что требует примерно на 2 порядка меньше счетного времени, чем метод расчета светосилы и ее оптимизация.

Основной результат данной работы показан на рис. 7. Видно, что с увеличением P_y максимально достижимая светосила растет. А вот зависимость максимально достижимой светосилы от радиуса старта электронов с поверхности эмиттера не столь однозначна.

При $P_y < 0.4 \cdot r_1$ и при увеличении r_0 S_{\max} уменьшается. Причем при приближении r_0 к r_1 наблюдается сгущение линий $S_{\max}(P_y/r_1)$.

До $r_0 < 0.3 \cdot r_1$ и для всех P_y линии S_{\max} с большими номерами всегда располагаются ниже линий с меньшими номерами. Начиная с линии с номером 4, которая пересекает линию с номером 3 примерно при $P_y = 0.8 \cdot r_1$, все последующие линии

S_{\max} пересекают все предыдущие линии. Наблюдается точка сгущения, в которой пересекаются линии с номерами от 5-го до 9-го.

Линия 6 при больших P_y пересекает линию 1. То есть полный сигнал при $r_0 > 0.5 \cdot r_1$ и $P_y > 0.85$ увеличивается по отношению к величине сигнала с площадки вблизи оси на отношение площадей эмиссии.

Гораздо более интересны графики S_{\max} с номерами с седьмого по девятый, линии на которых уходят за верхнюю границу рисунка. Этот режим будет нами рассмотрен в следующей работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЛИНИИ $\varphi(x)$ И ОСИ X

Вычисление точек пересечения означает нахождение нулей функции $\varphi(x, L = L[i_L])$.

Первый этап решения уравнения

$$\varphi(x, L = L[i_L]) = 0 \quad (\text{П1})$$

заключается в нахождении интервала x , в котором функция $\varphi(x, L = L[i_L])$ меняет знак. Для этого весь интервал изменения x делим на N_x равных частей. В точках деления находим значение функции $\varphi(x, L[i_L])$ и последовательно проверяем все отрезки оси x на выполнение одного из неравенств:

$$\varphi(x[n]) < 0 < \varphi(x[n+1]) \quad (\text{П2})$$

или

$$\varphi(x[n+1]) < 0 < \varphi(x[n]). \quad (\text{П3})$$

Этим мы локализовали положение одного из корней уравнения (П1).

На втором этапе вычисляем более точное значение искомого корня методом деления пополам (метод пристрелки). Для удобства введем обозначения $x[n] = x_1$, $x[n+1] = x_2$, $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$. Как выше было отмечено, y_1 и y_2 имеют разные знаки. Берем точку $x_m = 0.5 \cdot (x_1 + x_2)$ и вычисляем в ней $y_m = \varphi(x_m)$.

Проверяем совпадение знаков:

если $y_1 \cdot y_m < 0$ (т.е. они имеют разный знак), то проводим замену $x_2 = x_m$, $y_2 = y_m$ и далее берем среднюю точку x_m и вычисляем $y_m = \varphi(x_m)$ и т.д.

Если $y_1 \cdot y_m > 0$ (одинаковый знак), то проводим замену $x_1 = x_m$, $y_1 = y_m$, берем среднюю точку x_m и вычисляем $y_m = \varphi(x_m)$ и т.д.

Эту процедуру повторяем, пока абсолютная величина y_m не станет меньше 10^{-8} . Это значит, что с этой точностью корень найден.

Вводим параметр $xCr[0] = x_m$ — x -координату первой точки пересечения линии $\varphi(x)$ и оси x .

Первый корень мы нашли. Далее проверяем следующие промежутки $x \in (x[n+1], x[n+2])$ на наличие на них корня. Введем целое число nCr — признак, указывающий, сколько пересечений имеет линия $\varphi(x, L[i_L])$ с осью x .

Если на одном из следующих отрезков x выполняется неравенство (П2) или (П3), то на рассматриваемом участке есть еще одно пересечение линии $\varphi(x)$ с осью x , которое получаем после применения метода деления пополам. Присваиваем $nCr = 2$ и $xCr[1] = x_m$.

Согласно рис. 2, если есть второе пересечение линии $\varphi(x)$ с осью x , то есть и третье. Нахождение этого пересечения вполне аналогично: $nCr = 3$ и $xCr[2] = x_m$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕЛЕСНОГО УГЛА

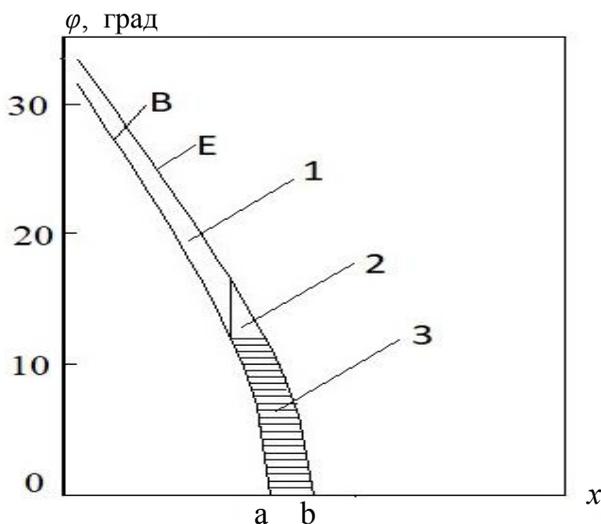


Рис. П1. Телесный угол образует пара соседних линий $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ и $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$, для которых $nCr = 1$. В телесном угле присутствует только основная область, а дополнительная отсутствует.

В — нижняя линия $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ пересекает ось x в точке "а"; Е — верхняя линия $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$ пересекает ось x в точке "б"; 1 — область интегрирования по переменной x , в которой необходимо рассчитывать φ_B и φ_E ; 2 — область интегрирования по переменной x , в которой необходимо рассчитывать только φ_E ; 3 — область интегрирования по переменной φ , в которой необходимо рассчитывать $x_L(\varphi[i_g])$ и $x_R(\varphi[i_g])$

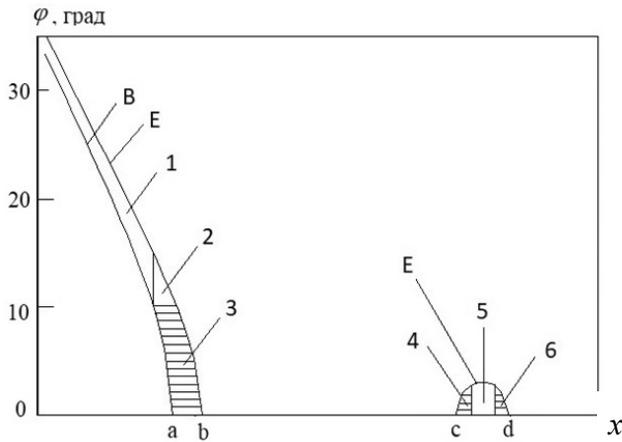


Рис. П2. Телесный угол образует пара соседних линий $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ и $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$, для φ_B $nCR = 1$ и для φ_E $nCR = 2$.

Левая часть телесного угла является основной частью и образована линиями В (линия φ_B), которая пересекает ось x в точке "а", и Е (линия φ_E), которая пересекает ось x в точке "b". Правая часть телесного угла является дополнительной частью и образована только линией Е, которая пересекает ось x в точках "с" и "d".

На рисунке обозначения такие же, как на рис. П1, и дополнительно: 4 — область интегрирования по переменной φ , в которой необходимо рассчитывать x_B ; 5 — область интегрирования по переменной x , в которой необходимо рассчитывать только φ_E ; 6 — область интегрирования по переменной φ , в которой необходимо рассчитывать x_E

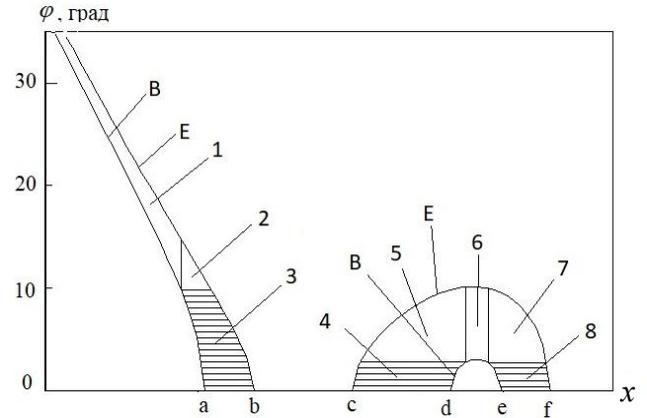


Рис. П3. Телесный угол образует пара соседних линий $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ и $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$, для которых $nCR = 2$.

Левая часть телесного угла является основной частью и образована линиями В, которая пересекает ось x в точке "а", и Е, которая пересекает ось x в точке "b". Правая часть телесного угла является дополнительной частью и образована линиями В, которая пересекает ось x в точках "d" и "e", и Е, которая пересекает ось x в точках "с" и "f".

На рисунке обозначения такие же, как на рис. П1, и дополнительно: 4, 8 — области интегрирования по переменной φ , в которых необходимо рассчитывать $x_L(\varphi[i_g])$ и $x_R(\varphi[i_g])$; 5, 7 — области интегрирования по переменной x , в которых необходимо рассчитывать только φ_E ; 6 — область интегрирования по переменной x , в которой необходимо рассчитывать φ_B и φ_E

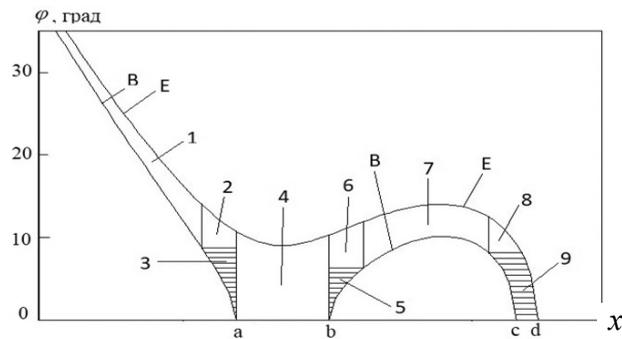


Рис. П4. Телесный угол образует пара соседних линий $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ и $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$, для φ_B $nCR = 3$ и для φ_E $nCR = 1$.

Телесный угол состоит только из основной части, которая образована линиями В (пересекает ось x в точках "а", "b" и "с") и Е (пересекает ось x в точке "d").

На рисунке обозначения такие же, как на рис. П1, и дополнительно: 4, 6, 8 — области интегрирования по переменной x , в которых необходимо рассчитывать только $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$; 5 — область интегрирования по переменной φ , в которой необходимо рассчитывать $x_B = x(\varphi, L[i_L])$; 7 — область интегрирования по переменной x , в которой необходимо рассчитывать φ_B и φ_E ; 9 — область интегрирования по переменной φ , в которой необходимо рассчитывать x_B и x_E

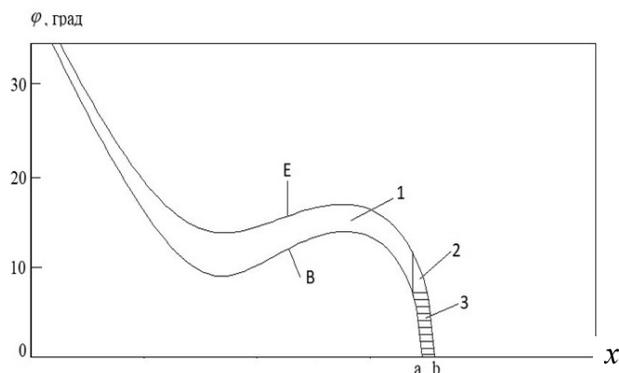


Рис. П5. Телесный угол образует пара соседних линий $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ и $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$, для которых $nCR = 1$, т.е. присутствует только основная область. На рисунке обозначения такие же, как на рис. П1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов И.Г. Современные проблемы электронной спектроскопии. М.: Атомиздат, 1978. 248 с.
2. Заичвара В.В., Корсунский М.И., Лавров В.П., Редькин В.С. О влиянии конечного размера источника на фокусировку пучка заряженных частиц в электростатическом спектрометре с цилиндрическим полем // ЖТФ. 1971. Т. 41, № 1. С. 187–192.
3. Сар-Эль Х.З. Анализатор типа цилиндрического зеркала с входной и выходной щелями на поверхности электрода. I. Нерелятивистский случай // Приборы для научных исследований. 1971. Т. 42, № 11. С. 43–48 (первоисточник англ.). DOI: 10.1063/1.1684948
4. Аксела С. Аппаратная функция цилиндрического анализатора энергий электронов // Приборы для научных исследований. 1972. Т. 43, № 9. С. 122–128 (первоисточник англ.). DOI: 10.1063/1.1685923
5. Дрейпер Д.Е., Ли Ч.-И. Характеристики анализатора типа цилиндрического зеркала с геометрией "кольцо-ось", "ось-ось" и $n = 1.5$ при конечных размерах источника и щели для углов средней траектории 30° – 65° // Приборы для научных исследований. 1977. Т. 48, № 7. С. 138–154 (первоисточник англ.). DOI: 10.1063/1.1135170

6. Шевченко С.И. О свойствах цилиндрического зеркала при учете электронов, имеющих азимутальную компоненту скорости. Распределение электронов вблизи выходной диафрагмы // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 1. С. 90–101.
URL: <http://iairas.ru/mag/2017/abst1.php#abst15>
7. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966. 370 с.

**Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург**

Контакты: Шевченко Сергей Иванович,
пуго2@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 29.10.2023

ABOUT THE METHOD OF CALCULATING THE LIGHT INTENSITY IN ELECTRONIC OPTICS

S. I. Shevchenko

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg, Russia

The method of calculating the light intensity applied to a cylindrical mirror is presented. The conditions under which second-order focusing is realized are shown. The possibility of increasing the light intensity when taking current from the emission ring with a sufficiently large radius is shown.

Keywords: energy analyzer, cylindrical mirror, emission ring, output aperture

REFERENCES

1. Kozlov I.G. *Sovremennyye problemy ehlektronnoi spektroskopii* [Modern problems of electron spectroscopy]. Moscow, Atomizdat Publ., 1978. 248 p. (In Russ.).
2. Zashkvara V.V., Korsunskii M.I., Lavrov V.P., Red'kin V.S. [On the influence of finite source size on focusing of a charged particle beam in a cylindrical-field electrostatic spectrometer]. *ZhTF* [Technical Physics], 1971, vol. 41, no. 1, pp. 187–192. (In Russ.).
3. Sar-El H.Z. Cylindrical Mirror Analyzer with Surface Entrance and Exit Slots. I. Nonrelativistic Part. *Review of Scientific Instruments*, 1971, vol. 42, no. 11, pp. 43–48. DOI: 10.1063/1.1684948
4. Aksela S. Instrument Function of a Cylindrical Electron Energy Analyzer. *Review of Scientific Instruments*, 1972, vol. 43, no. 9, pp. 122–128. DOI: 10.1063/1.1685923
5. Draper J.E., Lee Ch.-yi. Response functions of ring-to-axis, axis-to-axis, and $n=1.5$ cylindrical mirror analyzers with finite source and slit and central angle 30° – 65° . *Review of Scientific Instruments*, 1977, vol. 48, no. 7, pp. 138–154. DOI: 10.1063/1.1135170
6. Shevchenko S.I. [About the properties of cylindrical mirrors for the accounting of electrons with the azimuthal component of velocity. The distribution of electrons near the output aperture]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 1, pp. 90–101. URL: <http://iairas.ru/mag/2017/abst1.php#abst15> (In Russ.).
7. Krylov V.I., Shul'gina L.T. *Spravochnaya kniga po chislennomu integrirovaniyu* [A reference book on numerical integration]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 370 p. (In Russ.).

Contacts: *Shevchenko Sergey Ivanovich*,
nyro2@yandex.ru

Article received by the editorial office on 29.10.2023

INTRODUCTION

In any measuring instrument, it is desirable to have as large an output signal (output current) as possible. For this, developers have to resort to various tricks.

In relation to energy analyzers (EA) of charged particles (we will consider electrons below), the possibility of increasing the surface area of the emitter from which particles fall on the detector was considered as one of the possible ways to increase the output signal. Consider an axially symmetric system (for example, a cylindrical mirror). If the emission occurs not from the axis (radius vector of the emission point $\mathbf{r}_0 \neq 0$), then in the axially symmetric case, the emission area is a ring of some thickness with the center located on the axis of the system. If the thickness of the ring is constant and the radius of the ring r_0 changes, then the area of the emission ring (ER) increases in proportion to r_0 .

At this point, the concept of light intensity should be defined. Let's consider the current that comes out of some small section of the emitter and enters the detector.

In the general case [1], the light intensity of a certain (infinitely) small area of the emitter ds given a certain energy E is the ratio of the current leaving this area and hitting the detector (dI_{det}) to the total current emitted from this area (dI_{em}):

$$S_w = dI_{\text{det}}/dI_{\text{em}}.$$

If we consider the distribution of emission density over angles to be isotropic, then the expression for light intensity is simplified

$$S_w = d\Omega/\Omega,$$

where $d\Omega$ is the solid angle, all electrons emitted within which fall on the detector; Ω is the full solid angle 4π .

This relation in [1] is called a geometric factor.

When multiplying the area of the selected small element of ER by the emission density and the light intensity, we obtain the current of electrons in the detector space emitted from the considered element of the emitter surface.

The main contribution to the theory of the functioning of CM was made by works [2–5].

In this work, we consider the issue of calculating the solid angle (SA) $d\Omega$.

General ideas can be applied to calculating the light intensity of a cylindrical mirror (CM).

CONSTRUCTION OF SOLID ANGLE

Let's consider the geometry of a cylindrical mirror (see Fig. 1). The emitting surface is a plane perpendicular to the L axis of the system.

Fig. 1. Half of the cross section of a cylindrical mirror (from the axis and above along the radius) by a plane resting on the axis.

L — CM axis; $r_1 = 20$ mm — radius of the inner cylinder; $r_2 = 50$ mm — radius of the outer cylinder; r_0 — electron emission point; \mathcal{A} — cylinder on which the outlet diaphragm (COD) is located; P_y — radius of the cylinder \mathcal{A} ; $a\mathcal{B}\mathcal{V}$ is the trajectory of the electron in the CM; θ is the starting angle of inclination of the trajectory to the CM axis. Details in the text

Charged particles are introduced into the dispersion space and then enter the detector space through an ideal grid, which is part of the surface of the inner cylinder. Specific calculations were carried out for CM with an inner cylinder diameter $r_1 = 20$ mm, outer cylinder diameter $r_2 = 50$ mm,

The technique for constructing a solid angle is given in [6]. In this paper, we will only briefly touch on this issue. To set a solid angle $d\Omega$, the setting of its boundaries is used.

All electrons emitted from the source surface within these boundaries fall into the gap of the output diaphragm (OD). The distance L along the Z axis at which the electron crosses the surface of the cylinder containing the OD (COD) and hits the detector satisfies the inequality $L_{\text{Beg}} < L < L_{\text{End}}$, where L_{Beg} and L_{End} , respectively, are the positions of the near and far edges of the OD. To construct a solid angle, you need to construct lines starting from which the electrons fall into one of the edges of the OD.

From [6] we take the electron start energy value $E = 124.5$ eV, and $L_{\text{Beg}} = 91.492$ mm, $L_{\text{End}} = 101.492$ mm. L_{Beg} and L_{End} were chosen in such a way that the effects we studied would manifest themselves, $r_0 = 2$ mm, radius of the COD $P_y = 7$ mm.

We divide the distance from the near edge of the OD to the far one into $N_L = 100$ equal parts. An array of lines $L[i_L]$ divides the COD into parts

$$L[i_L] = L_{\text{Beg}} + dL \cdot i_L,$$

where $dL = (L_{\text{End}} - L_{\text{Beg}}) / N_L$ is the step along L ; i_L is a division line number, varies from 0 to N_L .

For each line $L[i_L]$, in accordance with [6], we calculate and construct a function $\varphi(x, L = L[i_L])$ (see

Fig. 2), where: φ is the azimuthal angle; $x = \cos(\theta)$ — cosine of angle θ ; radius of electron start from the source surface $r_0 = 2$ mm; radius of the cylinder containing the OD, $P_y = 7$ mm.

Fig. 2. Form of the function $\varphi(x, L[i_L])$ at a fixed energy E . Details in the text

For each part of the OD from $L[i_L]$ to $L[i_L + 1]$, the space between two lines $\varphi(x, L[i_L])$ and $\varphi(x, L[i_L + 1])$ represents a solid angle on the graph of a function $\varphi(x)$. All electrons emitted between the lines $\varphi(x, L[i_L])$ and $\varphi(x, L[i_L + 1])$ fall into the OD gap between $L[i_L]$ and $L[i_L + 1]$.

The form of the function $\varphi(x, L[i_L])$, given in Fig. 2, shows that the line $\varphi(x, L[i_L])$ can have either one or three intersections with the axis x . Below, we will need the coordinates of these intersection points. Calculating intersection points means finding the zeros of the function $\varphi(x, L[i_L])$. (see Appendix 1).

Let us consider how the appearance of adjacent lines $\varphi(x, L[i_L])$ (and the solid angle formed by them) changes with increasing distance L . We will assume that dL is small. If values of L are close to L_{Beg} , (see Fig. 2) successive lines $\varphi(x, L[i_L])$ and $\varphi(x, L[i_L + 1])$ are located almost parallel and form a certain area (solid angle), let's call it the main one (see the lines on the left in Fig. 2 and both lines in Appendix 2, Fig. II1). Then, with a certain value $L = L_2$, a small area appears to the right of the main area. Let's call this area additional (see Appendix 2, Fig. II2). Let's plot the point L_2 on the graph $x = x(L)$ (see Fig. 3, top row of points). With a further increase of L , the additional region begins to expand: the side of small values of x towards smaller x and the main region, and the side of large x towards larger x . For some values of L , the main region and the additional region will touch, and the main and additional areas will merge into one main area.

Fig. 3. Graph of the function $x = x(L)$ at different values of energy E . Details in the text

Let us consider the behavior of the points of intersection of lines $\varphi(x)$ with the L axis (for different values of L and fixed energy E). As can be seen from Fig. 2, for values of L less than a certain value, the

lines $\varphi(x)$ have only one point of intersection with the L axis.

If $L = L_2$, a point (x_2, L_2) appears on the graph $\varphi(x)$ (to the right of the main area), and, with a further increase of L , moves into an additional area. As L increases, the graph of the function $\varphi(x)$ intersects the axis L at two points already: to the left of x_2 and to the right (for x smaller than x_2 and larger than x_2).

With a further increase of L , the point of the main region lying on the axis L moves towards larger x values, and the near edge of the additional region moves towards smaller x values. If $L = L_1$ these lines touch at some point. The behavior of the points of intersection of lines $\varphi(x)$ with the axis L is shown in Fig. 3.

Fig. 3 presents the results of calculating the function $x = x(L)$ in energy range of $E_{\text{Beg}} = 124.5$ eV to $E_{\text{End}} = 129.5$ eV, with a step $dE = 0.25$ eV.

The main points that determine the behavior of the function $x = x(L)$ are: an additional area appears at the point (x_2, L_2) , main and additional areas are in contact at the point (x_1, L_1) . At the point (x_2, L_2) there is an extremum (minimum) of the function $L = L(x, E = \text{const})$, i.e. a first order focus. In Fig. 3, the trajectory of this point in the variables (x, L) is made up of the upper row of points. At a point (x_1, L_1) there is a maximum of the function $L = L(x, E = \text{const})$, i.e., at this point, there is also a first-order focus. The trajectory of this point consists of the bottom row of points. At a point (x_0, L_0) , two extrema merge and a second-order focus is obtained.

It was noted that the maximum light intensity is observed when the main and additional areas on the function graph $\varphi(x, L = L[i_L])$ touch, which corresponds to a point (x_1, L_1) on the function graph $L = L(x, E = \text{const})$. This point is the first-order focus point.

Thus, taking into account non-axial trajectories, there is a region (point) in which second-order focusing is realized.

CALCULATION OF SOLID ANGLE

Above, the range of length changes along the surface of the cylinder containing the OD was specified $(L_{\text{Beg}}, L_{\text{End}})$, within which we consider the distribution of electrons over the surface of this cylinder. This rather wide range was originally defined in [6]. Similarly, we set the range of changes in the variables x $(x_{\text{Beg}}, x_{\text{End}})$ and φ $(\varphi_{\text{Beg}}, \varphi_{\text{End}})$. For each variable, we set the number of divisions of the corresponding range

into segments N_L, N_x, N_φ . And we get a step along the corresponding variable: $dL = (L_{\text{End}} - L_{\text{Beg}}) / N_L$, $dx = (x_{\text{End}} - x_{\text{Beg}}) / N_x$, $d\varphi = (\varphi_{\text{End}} - \varphi_{\text{Beg}}) / N_\varphi$.

Of all pairs of lines $\varphi_{B,E}(x)$, several types can be distinguished (see Appendix 2) depending on the values of the index — the number of intersections of the lower and upper lines with the axis x .

To calculate the "area" between two consecutive lines $\varphi_B(x)$ and $\varphi_E(x)$ we will use the Gaussian quadrature method [7] (the method with the highest algebraic accuracy). To apply this method, the lines $\varphi_{B,E}(x)$ must not contain kinks and singularities, as well as areas near singularities ($2N - 1$ smoothness of boundaries, where N is the order of quadrature). We will use quadratures of the 10th order.

In Fig. 2, such non-smooth sections, unsuitable for integration, can be sections of lines near the intersection of the lines $\varphi_{B,E}(x)$ with the axis x , where these lines can be practically perpendicular to the axis x . Therefore, in these sections, we carry out integration not over the variable x , but over the variable φ .

Let's look at the first section in Fig. II1, extending from $x_B = x_{\min}$ to $x_E = x_{\text{Cr}_B}[0] - dx$, where $x_{\text{Cr}_B}[0]$ is the x -coordinate of the first intersection point of the line $\varphi_B(x)$ and the axis x (defined in Appendix 1). As x_{\min} we choose $x_{\min} = 0.5$, which corresponds to the angle $\theta = 60^\circ$.

We divide this area into $N_1 = \text{int}((x_E - x_B) / dx) + 1$ parts (segments), where int is a function for calculating the integer part of a certain number. The array of lines dividing the section under consideration is set by the formula $x[n] = x_B + n \cdot dx$. Within each segment $(x[n], x[n+1])$, we carry out numerical integration according to Gauss's rule. According to this rule, for each node $x[i_g] = x[n] + xg[i_g] \cdot dx$, using the method described in [6], we find the values of the functions $\varphi_B(x)$ and $\varphi_E(x)$ on both the lower and upper lines.

Gauss formula for a segment $(x[n], x[n+1])$:

$$S_1[n] = \sum_{i_g=0}^9 Ag[i_g] \cdot (\varphi_E[i_g] - \varphi_B[i_g]),$$

where $S_1[n]$ is the contribution to the SA from the segment number n of the first section, i_g is the number of the Gaussian node, $xg[i_g]$ is the array of Gaussian nodes for the segment $(0, 1)$, $x[i_g]$ is the array of Gaussian nodes for the segment $(x[n], x[n+1])$, $Ag[i_g]$ is an array of Gaussian weights. The values of $xg[i_g]$ and $Ag[i_g]$ are taken from the tables of the monograph [7], $\varphi_E[i_g]$ and $\varphi_B[i_g]$ are the values of the

functions $\varphi_{B,E}(x)$ at the quadrature nodes, i.e. $\varphi_E(x[i_g])$ and $\varphi_B(x[i_g])$.

We sum up all the contributions from all segments of the first section

$$S_1 = \sum_{n=0}^{N_1-1} S_1[n],$$

we get the contribution to the SA from the first section of the diaphragm $(L[i_L], L[i_L + 1])$.

In a similar way, we calculate the contribution from segment 3, where the lines $\varphi_{B,E}(x[i_g])$ pass close to the axis x and touch it almost at a right angle. Therefore, in this section we carry out integration over the variable φ . For each $\varphi[i_g] = \varphi[n] + xg[i_g] \cdot d\varphi$, we find the values of the function $x_{L,R}(\varphi[i_g])$ on the left and right lines $x_{L,R}(\varphi)$:

$$S_3[n] = \sum_{i_g=0}^9 Ag[i_g] \cdot (x_E[i_g] - x_B[i_g]).$$

Summing up all the contributions from the segments of the 3rd section, we obtain the contribution to the SA from the third section

$$S_3 = \sum_{n=0}^{N_1-1} S_3[n].$$

The last section in Fig. III, which has a "triangular" form, can be integrated both over the variable φ , and over the variable x . The difference between this case and those previously considered is that one of the sides along which you want to calculate x or φ , is a straight line parallel to one of the axes. Therefore, there is no need to calculate x or φ on this line, because on it either x or φ are constant. This reduces computation time. A comparative calculation of the area of this triangular section by integration over the variable and over the variable x showed a coincidence of no worse than 5 digits (significant figures).

We put all the calculated parts together and get the SA, at which the OD is visible from the source as $(L[i_L], L[i_L + 1])$.

We calculate the SA for all sections of the diaphragm gap length and obtain a function proportional to the distribution of electrons along the length of the cylinder containing the OD.

All other possible cases of the SA configuration, shown in Figs. III–III5, are integrated quite similarly to the case considered.

In these figures, the areas of integration over variable φ are shown (highlighted) by horizontal shading. Areas without shading are integrated over the variable x .

Now, on the one hand, you can calculate the SA for any light intensity which size is a multiple of dL . On the other hand, if we build a graph $S[i_L]$, then we obtain the distribution of SA values along the cylinder containing the OD.

DISTRIBUTION OF SA ALONG CYLINDER CONTAINING OD

Calculation method 1

To obtain the function $S(L)$, we divide the selected section of the COD into N_L ($N_L=100$) equal parts ($L[i_L]$), construct functions $\varphi(x, L[i_L])$ and for each pair ($L[i_L], L[i_L+1]$) calculate the solid angle ($S^{(1)}[i_L]$). The superscript in parentheses indicates that this is the result of the first iteration. We plot the function $S^{(1)}(L)$ in the form of a histogram Fig. 4, where the solid angle is constant on each segment ($L[i_L], L[i_L+1]$).

Fig. 4. Form of function $S^{(1)}(L)$ for $dL = 0.1$ mm

It can be seen that the graph of this function has a clearly expressed maximum.

Among all $S^{(1)}[i_L]$, we find the maximum value $S_{\max}^{(1)}$ and its number $i_{L_{\max}}$. Select a new section ($L[i_{L_{\max}} - 2], L[i_{L_{\max}} + 2]$), divide this section into $N_L = 100$ parts, we find new values of $S^{(2)}[i_L]$ and $S_{\max}^{(2)}$ on it. Thus, in a few iterations, it is possible to calculate the maximum of the function and the parameters of the maximum $S(L)$ with good accuracy, i.e. values $S_{\max}, L_{\max}, x_{\max}, (\varphi_{\max} \approx 0)$.

This method has a drawback: the results of different iterations cannot be presented in the form of a single line (envelope of the vertices), because S scales are different.

Calculation method 2

You can approach this issue from a slightly different angle. In the previous case, the lengths along the cylinder containing the OD densely covered this length. We don't need to know the value of SA when searching for the maximum SA. It is enough to know the value of the SA relative to neighboring areas.

In this case, there is no need to tightly cover the length of the cylinder. As before, we divide the section on the COD into $N_L = 100$ equal parts ($L[i_L]$). We take a certain width ΔL — so small that during

all iterations the difference $L[i_L+1] - L[i_L]$ was much greater than this width. To form an OD gap over which we will carry out integration, we take each $L[i_L]$ and retreat from it towards smaller and larger length values by $\Delta L / 2$. For this gap width, we carry out all the calculations. Moreover, in any iteration the S scale will be the same.

There is some problem with the L scale. If, when moving to the next iteration, this scale is not changed, then the second, third, and all subsequent iterations on the graph $S(L)$ will merge (see Fig. 5). However, the tails of the peak will be clearly visible.

Fig. 5. Form of function $S(L)$ during the first five iterations

Fig. 5 shows the results of calculating the function $S(L)$ in each of the five iterations performed.

About reducing calculation time

At the end of this section, we will describe how to save calculation time. To do this, you should use the five-point maximum search method. The interval L , in which the maximum is expected to be found, is divided into four equal segments.

In the 5 division points $S(L)$ are calculated and the maximum value is found among them. The nearest 2 segments are divided in half, and the values of $S(L)$ are calculated at the division points. 2 more points are added to the maximum value and 2 points closest to the point with the maximum value. There are again 5 points in total. Among them, we find the point $S(L)$ with the maximum value. And so on. The iterative process can be ended when, for example, the difference between two values $S(L)$ in successive iterations is less than 10^{-6} . This method of finding the maximum of a function turns out to be much faster than the one described earlier.

ABOUT OPTIMIZATION

In the previous section, the distance L_{\max} with the maximum possible value of the solid angle S_{\max} along the axis of the system was realized. This was done with $E_0 = \text{const}, r_0 = \text{const}, P_y = \text{const}$.

Our task is to obtain the maximum current at the detector. To do this, obtain the maximum solid angle studied above. This is an optimization problem, and the objective function is the solid angle.

From [6] we take the range of values $E_0 = (E_{\text{Beg}}, E_{\text{End}})$, within which it makes sense to look for the maximum value S_{max} . We divide this range into N_e subranges ($dE = (E_{\text{End}} - E_{\text{Beg}}) / N_e$); for $N_e + 1$ energy values ($E_{i_E} = E_{\text{Beg}} + dE \cdot i_E$) we calculate S_{max} — the maximum among all values of L , and at the same time, we obtain L_{max} , at which this maximum is realized. The results of this action are given in Fig. 6 (line 1).

Fig. 6. Form of function $S_{\text{max}}(L_{\text{max}}, E)$ for several iterations over E .
1 — the result of the first iteration, 2 — the result of the fifth iteration

Each point on this graph corresponds to a specific energy E and represents the maximum SA value for that energy. Next, we find the maximum value for E , using the same algorithm that was used to find the maximum for L . That is, we find the maximum value $E_{\text{max}}^{(1)}$ in the first iteration and the number of this value $i_{E_{\text{max}}}$. Next, we clarify $E_{\text{max}}^{(i)}$ using the previously given method for L . To do this, we change the energy range:

$$E_{\text{beg}} = E[i_{E_{\text{max}}} - 2] \text{ and } E_{\text{end}} = E[i_{E_{\text{max}}} + 2].$$

In the new range, we calculate $S_{\text{max}}(L_{\text{max}}, E)$ and determine $E_{\text{max}}^{(2)}$, etc.

Since we got the extremum (maximum) for each of the variables (L and E), at this point we have a local maximum. This algorithm is very similar to the Gauss-Seidel method (coordinate descent method, or searching for the optimum for each variable in turn).

We carry out similar actions for $r_0 \in (0, r_1)$ and for $P_y \in (0, r_1)$. The results are shown in Fig. 7.

Fig. 7. Dependence of the maximum light intensity (L and E optimized) on the radius of the COD (P_y), for various values of the electron start radius r_0 . Details in the text

In Fig. 7 digit 1 corresponds to the value $r_0 = 0.1 \cdot r_1$, 2 — $r_0 = 0.2 \cdot r_1$, 3 — $r_0 = 0.3 \cdot r_1$, 4 — $r_0 = 0.4 \cdot r_1$, 5 — $r_0 = 0.5 \cdot r_1$, 6 — $r_0 = 0.6 \cdot r_1$, 7 — $r_0 = 0.7 \cdot r_1$, 8 — $r_0 = 0.8 \cdot r_1$, 9 — $r_0 = 0.9 \cdot r_1$.

THE DISCUSSION OF THE RESULTS

It was previously noted that the maximum light intensity value is observed when the main and additional areas on the graph $\varphi(x)$ touch, which corresponds to point (L_0, x_0) on the graph $L(x)$. By finding the maximum light intensity with a change in energy, we find the point of merging of two first-order focuses into a second-order focus.

To confirm this, we present data comparing the results of searching for maximum light intensity using the optimization method and the method just described (see Table).

Tab. Comparison of maxima

The method described above for finding the maximum light intensity cannot provide significant accuracy. Although the data presented shows very good results. On the other hand, the new technique has shown that it requires approximately 2 orders of magnitude less computational time than the method of calculating the light intensity and its optimization.

The main result of this work is shown in Fig. 7. It can be seen that the maximum achievable light intensity increases with increasing P_y . But the dependence of the maximum achievable light intensity on the radius of electrons starting from the emitter surface is not so clear.

If $P_y < 0.4 \cdot r_1$ and r_0 increases, S_{max} decreases. Moreover, when approaching r_0 to r_1 , a thickening of the lines $S_{\text{max}}(P_y / r_1)$ is observed.

To $r_0 < 0.3 \cdot r_1$ and for all P_y , lines S_{max} with larger numbers are always located below the lines with smaller numbers. Starting with line number 4, which intersects line number 3 at approximately $P_y = 0.8 \cdot r_1$, all subsequent lines S_{max} intersect all previous lines. A condensation point is observed, at which lines with numbers from 5 to 9 intersect.

Line 6 intersects line 1 at large values P_y . That is, the total signal at $r_0 > 0.5 \cdot r_1$ and $P_y > 0.85$ increases in relation to the magnitude of the signal from the site near the axis by the ratio of emission areas.

Much more interesting are the graphs S_{max} with numbers seven to nine, the lines on which go beyond the upper border of the picture. We will consider this mode in the next work.

**APPENDIX 1.
CALCULATING INTERSECTION POINTS OF
LINES $\varphi(x)$ AND AXIS X -**

Calculating the intersection points means finding the zeros of the function $\varphi(x, L = L[i_L])$.

The first stage of solving the equation

$$\varphi(x, L = L[i_L]) = 0 \quad (\text{II1})$$

consists in finding the interval x in which the function $\varphi(x, L = L[i_L])$ changes sign. To do this, we divide the entire interval of change x into N_x equal parts. At the division points, we find the value of the function $\varphi(x, L[i_L])$ and sequentially check all segments of the axis x for the fulfillment of one of the inequalities:

$$\varphi(x[n]) < 0 < \varphi(x[n+1]) \quad (\text{II2})$$

or

$$\varphi(x[n+1]) < 0 < \varphi(x[n]). \quad (\text{II3})$$

With this, we localized the position of one of the roots of equation (II1).

At the second stage, we calculate a more accurate value of the desired root using the halving method (shooting method). For convenience, we introduce the notation $x[n] = x_1$, $x[n+1] = x_2$, $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$. As noted above, y_1 and y_2 have different signs. Take a point $x_m = 0.5 \cdot (x_1 + x_2)$ and calculate $y_m = \varphi(x_m)$. at it

Let's check if the signs match:

if $y_1 \cdot y_m < 0$ (i.e., they have a different sign), then we carry out the replacement $x_2 = x_m$, $y_2 = y_m$, and then take the midpoint x_m and calculate $y_m = \varphi(x_m)$, etc.

If $y_1 \cdot y_m > 0$ (same sign), then we make the replacement $x_1 = x_m$, $y_1 = y_m$, take the midpoint x_m and calculate $y_m = \varphi(x_m)$, etc.

We repeat this procedure until the absolute value y_m becomes less 10^{-8} . This means that the root has been found with this accuracy.

We enter the parameter $xCr[0] = x_m$ — the x -coordinate of the first point of intersection of the line $\varphi(x)$ and the axis x .

We have found the first root. Next, we check the following intervals $x \in (x[n+1], x[n+2])$ for the presence of a root on them. Let's introduce an integer nCr — a sign indicating how many intersections the line $\varphi(x, L[i_L])$ has with the axis x .

If inequality (II2) or (II3) is satisfied on one of the following segments of x , then in the section under

consideration there is another intersection of the line $\varphi(x)$ with the axis x , which we obtain after applying the halving method. We assign $nCr = 2$ and $xCr[1] = x_m$.

According to Fig. 2, if there is a second intersection of the line $\varphi(x)$ with the axis x , then there is a third one. Finding this intersection is quite similar: $nCr = 3$ and $xCr[2] = x_m$.

**APPENDIX 2
CALCULATION OF SOLID ANGLE**

Fig. II1. A solid angle is formed by a pair of adjacent lines $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ and $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$, for which $nCr = 1$. There is only the main region in the solid angle, and the additional region is absent. B — bottom line $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ intersects axis x at point "a"; E — the top line $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$ intersects the axis x at point "b"; 1 — region of integration over variable x , in which it is necessary to calculate φ_B and φ_E ; 2 — region of integration over variable x , in which it is necessary to calculate only φ_E ; 3 — region of integration over variable φ , in which it is necessary to calculate $x_L(\varphi[i_g])$ and $x_R(\varphi[i_g])$

Fig. II2. A solid angle is formed by a pair of adjacent lines $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ and $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$, for both $\varphi_B nCr = 1$ and $\varphi_E nCr = 2$. The left side of the solid angle is the main part and is formed by the lines B (line φ_B), which intersects the axis x at point "a", and E (line φ_E), which intersects the axis x at point "b". The right side of the solid angle is the complementary part and is formed only by line E, which intersects the axis x at points "c" and "d". The designations in the figure are the same as in Fig. II1, and additionally: 4 — area of integration over the variable φ in which it is necessary to calculate x_B ; 5 — region of integration over the variable x , in which it is necessary to calculate only φ_E ; 6 — the region of integration over the variable φ in which it is necessary to calculate x_E

Fig. II3. A solid angle is formed by a pair of adjacent lines $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ and $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$, for which $nCR = 2$.

The left side of the solid angle is the main part and is formed by lines B, which intersects the axis x at point "a", and E, which intersects the axis x at point "b". The right side of the solid angle is the complementary part and formed by lines B, which intersects the axis x at points "d" and "e", and E, which intersects the axis x at points "c" and "f".

The designations below are the same as in Fig. II1, and additionally: 4, 8 — areas of integration over variable φ , in which it is necessary to calculate $x_L(\varphi[i_g])$ and $x_R(\varphi[i_g])$; 5, 7 — areas of integration over the variable x , in which it is necessary to calculate only φ_E ; 6 — the region of integration over variable x , in which it is necessary to calculate φ_B and φ_E .

Fig. II4. A solid angle is formed by a pair of adjacent lines $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ and $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$, for φ_B $nCR = 3$ and for φ_E $nCR = 1$.

The solid angle consists only of the main part, which is formed by lines B (intersects the axis x at points "a", "b" and "c") and E (intersects the axis x at point "d").

The designations below are the same as in Fig. II1, and additionally: 4, 6, 8 — areas of integration over variable x , in which it is necessary to calculate only $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$; 5 — region of integration over the variable φ in which it is necessary to calculate $x_B = x(\varphi, L[i_L])$; 7 — area of integration over the variable x in which it is necessary to calculate φ_B and φ_E ; 9 — area of integration over the variable φ , in which it is necessary to calculate x_B and x_E .

Fig. II5. A solid angle is formed by a pair of adjacent lines $\varphi_B = \varphi(x, L[i_L])$ and $\varphi_E = \varphi(x, L[i_L + 1])$, for which $nCR = 1$, i.e., only the main area is present. The designations in the figure are the same as in Fig. II1.