

УДК 537.533, 535.31

© И. Ф. Спивак-Лавров, О. А. Байсанов, С. У. Шарипов, Б. О. Сарсембаев, 2023

## ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ДВУМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ ПРИЗМАХ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ КРАЕВЫХ ПОЛЕЙ

Для скалярного магнитного потенциала двумерной магнитной призмы с магнитными экранами используются аналитические выражения, полученные для потенциала электростатического поля дефлекторных пластин с заземленными экранами. Определяя индукцию магнитного поля призмы как градиент скалярного магнитного потенциала, мы одновременно описываем аналитически краевые поля магнита. В этом случае для расчета траекторий заряженных частиц в двумерной магнитной призме удобно использовать безразмерные уравнения Ньютона, позволяющие учесть влияние краевых полей магнита на свойства призм. Рассчитаны корпускулярно-оптические характеристики двумерных магнитных призм с магнитными экранами в телескопическом режиме фокусировки с учетом влияния краевых полей магнита.

*Кл. сл.:* двумерная магнитная призма, краевые поля магнита, безразмерные уравнения Ньютона, телескопический режим фокусировки

### ВВЕДЕНИЕ

Двумерные магнитные призмы могут использоваться в качестве отклоняющих призмённых систем в призмённых магнитных масс- и бета-спектрометрах. Такие спектрометры по своей схеме аналогичны призмённым светооптическим спектрометрам. Они снабжаются коллиматорной и фокусирующей линзами [1–5]. Угловые дисперсии магнитной призмы по массе и энергии одинаковы и равны  $D'$ , при этом линейная дисперсия прибора определяется формулой:

$$D = D'f_2, \quad (1)$$

где  $f_2$  — фокусное расстояние фокусирующей линзы. Поэтому линейная дисперсия призмённого прибора может быть увеличена без увеличения линейных размеров призмы за счет увеличения фокусного расстояния  $f_2$ .

Двумерные магнитные призмы обладают средней плоскостью, являющейся плоскостью антисимметрии магнитного поля. На рис. 1 схематически показана двумерная магнитная призма, магнитные полюса которой значительно вытянуты вдоль оси  $z$ . Поэтому в области движения пучка заряженных частиц, который входит в призму под углом  $\alpha$ , магнитное поле призмы зависит только от двух других декартовых координат. Параллельный плоский однородный пучок заряженных частиц, движущийся в средней плоскости призмы, отклоняется призмой и выходит из нее также па-

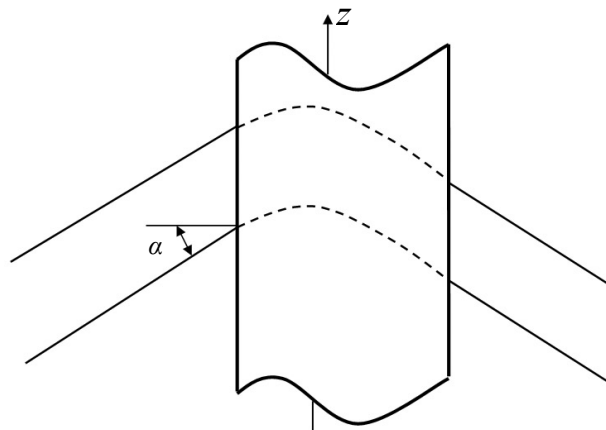


Рис. 1. Двумерная магнитная призма

раллельно вследствие идентичности траекторий частиц. Таким образом, в магнитных призмах сохраняется параллельность плоских параллельных однородных пучков заряженных частиц, движущихся в средней плоскости. Сохранение параллельности объемных пучков при этом обеспечивается благодаря выполнению условия телескопичности [1–5].

Двумерные магнитные призмы рассмотрены во многих работах (см., например, [1–6]). Во всех этих работах магнитное поле двумерной магнитной призмы описывается с использованием векторного потенциала. Однако такое описание маг-

нитного поля не является единственно возможным. В области, где отсутствуют электрические токи проводимости, ротор вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  равен нулю:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0. \quad (2)$$

Это позволяет определить индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}$  призмы как градиент скалярного магнитного потенциала  $\omega$ :

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \omega \equiv -\nabla \omega. \quad (3)$$

### РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИЗМЫ

В работе [7] были получены аналитические выражения для скалярного потенциала дефлекторных пластин с двумя заземленными экранами. Аналогичные выражения можно использовать и для скалярного магнитного потенциала  $\omega(x, y)$  двумерной магнитной призмы с магнитными экранами:

$$\omega(x, y) = \frac{C}{2\pi} \left( \text{arctg} \frac{(a^2 - 1) \cos \frac{\pi y}{d}}{2a \text{ch} \frac{\pi x}{d} - (a^2 + 1) \sin \frac{\pi y}{d}} - \text{arctg} \frac{(a^2 - 1) \cos \frac{\pi y}{d}}{2a \text{ch} \frac{\pi x}{d} + (a^2 + 1) \sin \frac{\pi y}{d}} \right). \quad (4)$$

Здесь  $\pm \frac{C}{2}$  — потенциал магнитных полюсов,  $d$  — расстояние между магнитными полюсами, а параметр  $a$  равен

$$a = \exp \left( \frac{\pi l}{2d} \right), \quad (5)$$

где  $l$  — ширина магнитных полюсов в направлении оси  $x$ , предполагается, что в направлении оси  $z$  полюса достаточно протяженные, что и обеспечивает двумерность поля в области движения заряженных частиц. Двумерная магнитная призма с экранами и сопутствующая декартова система координат схематически изображены на рис. 2.

На рисунке магнитные экраны с потенциалом  $C_0 = 0$  изображены тонкими линиями, а магнитные полюса — толстыми линиями.

Дифференцируя (4), найдем компоненты вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}(x, y) = -\nabla \omega$ :

$$B_x = -\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{C}{2d} \left[ \frac{\Psi}{\Theta^-} - \frac{\Psi}{\Theta^+} \right], \quad (6)$$

$$B_y = -\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{C}{2d} \left[ \frac{\Xi - (a^4 - 1)}{\Theta^-} - \frac{\Xi + (a^4 - 1)}{\Theta^+} \right], \quad (7)$$

где

$$\Psi = 2a(a^2 - 1) \cos \left( \frac{\pi y}{d} \right) \text{sh} \left( \frac{\pi x}{d} \right),$$

$$\Theta^- = 4a^2 \text{ch}^2 \frac{\pi x}{d} -$$

$$-4a(a^2 + 1) \text{ch} \left( \frac{\pi x}{d} \right) \sin \left( \frac{\pi y}{d} \right) - 2a^2 \cos \frac{2\pi y}{d} + a^4 + 1,$$

$$\Theta^+ = 4a^2 \text{ch}^2 \frac{\pi x}{d} +$$

$$+4a(a^2 + 1) \text{ch} \left( \frac{\pi x}{d} \right) \sin \left( \frac{\pi y}{d} \right) - 2a^2 \cos \frac{2\pi y}{d} + a^4 + 1,$$

$$\Xi = 2a(a^2 - 1) \text{ch} \left( \frac{\pi x}{d} \right) \sin \left( \frac{\pi y}{d} \right).$$

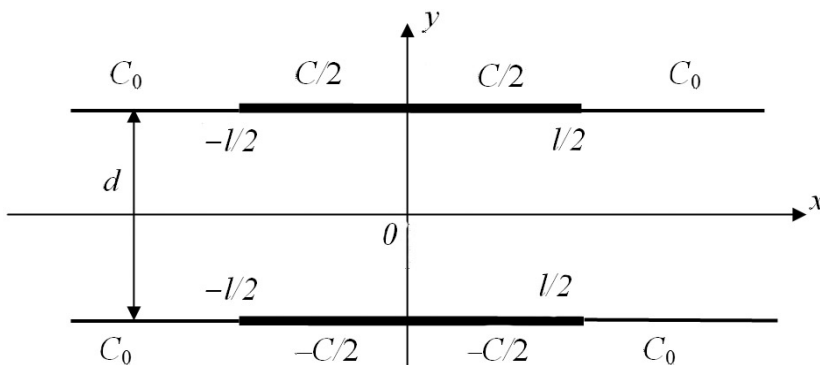


Рис. 2. Схематическое изображение двумерной магнитной призмы с магнитными экранами

Распределение магнитной индукции в средней плоскости призмы определяется выражением:

$$B_y(x, 0) = B_y(-x, 0) = -\frac{C}{d} \frac{(a^4 - 1)}{4a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{d} x + (a^2 - 1)^2}. \quad (8)$$

Пусть  $B_0$  — характерное значение величины индукции магнитного поля. Это может быть значение индукции в центре магнита при  $x=0$  и  $y=0$ , которое можно измерить, например, датчиком Холла. Согласно (8), получим:

$$|B_y(0, 0)| = B_0 = \frac{C}{d} \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}. \quad (9)$$

Тогда выражение  $-\frac{\nabla \omega}{B_0} = \mathbf{B}_l$  определяет безразмерную индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}_l$ . На рис. 3 приведено распределение безразмерной индукции магнитного поля в средней плоскости двумерной магнитной призмы для призмы с  $l/d = 6$ , вычисленное по формуле (8), по оси ординат отложена величина  $B_{ly}(x, 0)$ .

### БЕЗРАЗМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЬЮТОНА

В нерелятивистском приближении движение заряженной частицы с электрическим зарядом  $e$  и массой  $m$  можно описать следующим дифференциальным уравнением Ньютона:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частицы,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{B}$  — индукция магнитного поля,  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  — обозначает векторное произведение скорости частицы  $\mathbf{v}$  на индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}$ .

Запишем уравнение (10) в безразмерных переменных, ориентируясь в дальнейшем на рассмотрение пучков заряженных частиц с разбросом по массам и энергиям. Представим массу частицы в виде:

$$m = m_c(1 + \gamma), \quad (11)$$

а энергию частицы на входе в систему в виде:

$$W_0 = -(1 + \varepsilon)eV_0. \quad (12)$$

В последних выражениях:  $m_c$  — масса "центральной" частицы, движущейся по осевой траектории,  $\gamma$  — безразмерный параметр, определяющий относительный разброс частиц по массе,  $\varepsilon$  — безразмерный параметр, определяющий относительный разброс частиц по энергии на входе в корпускулярно-оптическую систему (КОС), причем для "центральной" частицы  $\gamma = \varepsilon = 0$ . Отметим, что величина  $(-eV_0 > 0)$  всегда положительная (положительные ионы вытягиваются отрицательным потенциалом). Электростатический потенциал  $\varphi$  нормирован таким образом, что он равен нулю там, где равна нулю скорость частиц, причем

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (13)$$

Однако отрицательные потенциалы неудобно использовать при численных расчетах, поэтому потенциал  $\varphi$  мы будем везде считать положительным, при этом кинетическая энергия частиц будет равна  $|e|\varphi$ .

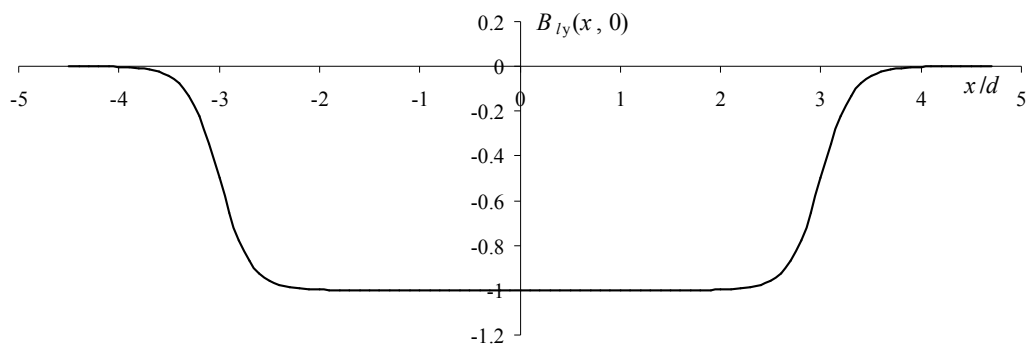


Рис. 3. Распределение безразмерной индукции магнитного поля в средней плоскости двумерной магнитной призмы с  $l/d = 6$

Возьмем в качестве единицы длины  $d$  — характерный линейный размер КОС,  $V_0$  — характерный электростатический потенциал КОС,  $B_0$  — характерное значение величины индукции магнитного поля. Введем также безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{\tau_0}. \quad (14)$$

Теперь перепишем уравнение (10) в виде:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = - \frac{eV_0(1+\varepsilon)}{m_c(1+\gamma)d} \frac{\nabla\varphi}{V_0(1+\varepsilon)} - \frac{eB_0d}{m_c(1+\gamma)\tau_0} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \times \frac{\nabla\omega}{B_0}. \quad (15)$$

В этом уравнении компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r}$  измеряются в единицах  $d$ . Если теперь  $\tau_0$  выбрать равным

$$\tau_0 = d \sqrt{\frac{m_c(1+\gamma)}{eV_0(1+\varepsilon)}}, \quad (16)$$

придем к уравнению

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \frac{\nabla\Phi}{1+\varepsilon} + \tau_0 \frac{eB_0}{m_c(1+\gamma)} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \times \mathbf{B}_l. \quad (17)$$

Здесь  $\nabla\Phi$  — безразмерный градиент безразмерного потенциала

$$\Phi = \frac{\varphi}{V_0}. \quad (18)$$

В дальнейшем при расчетах будем считать потенциал  $\varphi$  и электрический заряд  $e$  положительными величинами. При этом кинетическая энергия заряженных частиц будет равна  $e\varphi$ . Подставляя в (17) формулу (16) для  $\tau_0$ , получим:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \frac{\nabla\Phi}{1+\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+\gamma)}} \frac{\sqrt{2}d}{R_0} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \times \mathbf{B}_l. \quad (19)$$

Здесь

$$R_0 = \frac{\sqrt{2m_c \cdot |eV_0|}}{|e| \cdot B_0}. \quad (20)$$

Эта величина определяет радиус кривизны траектории в точке, где индукция магнитного поля равна  $B_0$ , а величина энергии частицы равна

$|eV_0|$ , причем  $R_0/d$  — безразмерный радиус кривизны траектории, измеренный в единицах  $d$ . Ранее мы использовали несколько иную запись безразмерных уравнений Ньютона, приведенную в [8, 9].

Отметим, что уравнение (19) имеет глубокое физическое содержание. В частности, из этого уравнения следует, что постоянное электрическое поле пространственно разделяет частицы только по энергии. В то время как постоянное магнитное поле разделяет частицы и по энергии, и по массе, причем одинаковым образом в силу идентичной зависимости от  $\varepsilon$  и  $\gamma$ . При этом, в силу (16), наличие разброса по энергии  $\varepsilon$  и массе  $\gamma$  приводит лишь к изменению времени движения частиц.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Для расчета траекторий заряженных частиц в двумерных магнитных призмах воспользуемся следующими безразмерными уравнениями Ньютона, которые получаются из (19) при отсутствии электрического поля:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= - \frac{K \dot{z} B_{ly}}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+\gamma)}}, \\ \ddot{y} &= \frac{K \dot{z} B_{lx}}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+\gamma)}}, \\ \ddot{z} &= \frac{K(\dot{x} B_{ly} - \dot{y} B_{lx})}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+\gamma)}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь точки обозначают производные безразмерных координат по безразмерному времени  $\tau$ ,  $K$  — безразмерная постоянная, численное значение которой подбирается в процессе расчета. Ограничимся рассмотрением призм с симметричной осевой траекторией. Для этого положим, что в центре магнита, где  $y=0$  и  $x=0$ , значения  $\dot{y}=\dot{z}=0$ , а  $\dot{x}=\sqrt{2}$ . Тогда значение постоянной  $K$ , согласно (19), будет определяться выражением

$$K = \frac{\sqrt{2}d}{R_0}. \quad (22)$$

Действительно, осевая траектория пучка с  $\gamma = \varepsilon = 0$  при этом будет плоской кривой, лежащей в плоскости  $xz$  призмы, для радиуса кривизны которой можно записать следующую известную формулу:

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z}|}. \quad (23)$$

Подставляя в эту формулу  $\dot{y} = \dot{z} = 0$ , получим:

$$R_0 = \frac{\dot{x}^2}{\ddot{z}}. \quad (24)$$

Используя третье уравнение (21) и учитывая, что в центре магнита  $B_{ly}(0,0) = 1$ , запишем:

$$\ddot{z} = \dot{x}K. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24) и  $\dot{x} = \sqrt{2}$ , получим в безразмерных единицах

$$\frac{R_0}{d} = \frac{\dot{x}}{K} = \frac{\sqrt{2}}{K}. \quad (26)$$

Отметим, что при движении заряженной частицы в постоянном магнитном поле модуль скорости не будет изменяться, поэтому выполняется соотношение

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{2}. \quad (27)$$

При этом скорость "центральной" частицы в середине магнита определяется формулой, которая согласуется с законом сохранения энергии:

$$v_0 = \sqrt{2} \frac{d}{\tau_0} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_c}}. \quad (28)$$

Результаты численного расчета траекторий частиц для призмы с  $l/d = 6$  представлены на рис. 4 и 5.

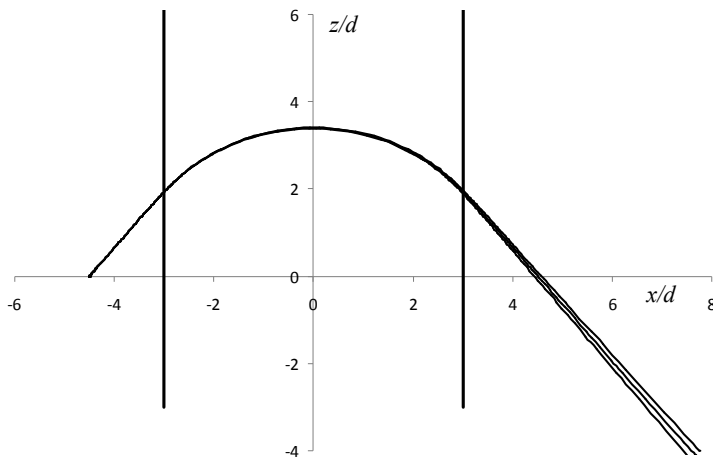


Рис. 4. Проекция траекторий частиц на среднюю плоскость призмы с  $l/d = 6$

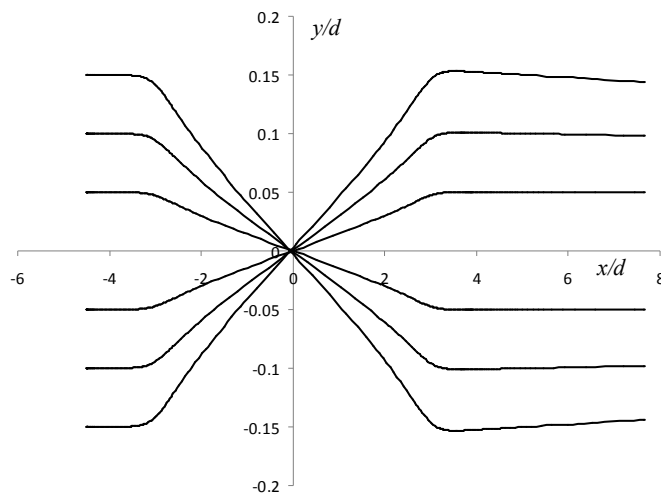


Рис. 5. Проекция траекторий частиц на плоскость  $xu$  для призмы с  $l/d = 6$

На рис. 4 показаны границы магнитных полюсов, а также проекции траекторий частиц на среднюю плоскость призмы для трех масс с  $\gamma=0$  и  $\gamma=\pm 0.01$ . Угол падения частиц на границу магнитных полюсов равен  $\alpha=52.502^\circ$ . Радиус кривизны траектории в центре магнита в единицах  $d$  равен 3.7813, что обеспечивает телескопичность призмы.

Проекция траекторий частиц на плоскость  $xu$  представлена на рис. 5. Здесь при наклонном входе частиц в призму частицы фокусируются к средней плоскости, образуя линейный фокус в центре магнита. При этом обеспечивается телескопичность призмы, а параллельный объемный пучок, входящий в призму, будет оставаться параллельным и на выходе из нее. Из рисунка видно, что условие телескопичности достаточно хорошо выполняется даже при отклонениях частиц от средней плоскости  $\pm 0.15d$ .

Угловая дисперсия призмы по массе  $D'_m \cong \text{tg} \alpha = 1.3$ , что хорошо согласуется с результатами расчета и данными монографии [4]. При относительной разнице в массах  $\gamma = \pm 0.01$  угловая расходимость частиц

$$\Delta \alpha = D'_m \gamma = \pm 0.013 \text{ рад}, \quad (29)$$

т.е. чуть меньше одного градуса, что можно наблюдать на рис. 4.

Результаты расчета двумерных магнитных призм с различными отношениями  $l/d$  представлены в таблице, помещенной ниже. Из приведенных данных видно, что угловая дисперсия двумерных магнитных призм по массе и энергии примерно одинакова и почти не зависит от отношения  $l/d$ .

Продемонстрируем теперь универсальность полученных результатов. Основным результатом является вычисленный радиус кривизны осевой траектории в центре магнита. Для призмы с  $l/d=6$  отношение  $R_0/d \cong 3.7813$ . Из формулы (20) следует, что величина анализируемой массы определяется выражением:

$$m_c = \frac{(eB_0)^2 \left(\frac{R_0}{d}\right)^2 d^2}{2eV_0}. \quad (30)$$

Проведем вычисление анализируемой массы, используя формулу (30). Полагая, например,  $B_0 = 1$  Тл,  $eV_0 = 1$  кэВ, величину межполюсного зазора  $d = 0.01$  м и используя атомную единицу массы  $m_0 = 1.6605 \cdot 10^{-27}$  кг, получим:

$$\frac{m_c}{m_0} = \frac{(1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1)^2 \cdot (3.7813)^2 \cdot 0.01^2}{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3 \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27}} = 68.97. \quad (31)$$

**Табл.** Результаты расчета двумерных магнитных призм

$l/d$	$K$	$R_0/d$	$\alpha$ (рад)	$\alpha$ (град)	$D'$
4	0.5700	2.4811	0.9375	53.717	1.362
6	0.3740	3.7813	0.9163	52.502	1.303
8	0.2780	5.0871	0.9048	51.841	1.273
10	0.2214	6.3876	0.8991	51.515	1.268
12	0.1830	7.7279	0.8889	50.932	1.232
16	0.1364	10.3681	0.8813	50.497	1.213
20	0.1088	12.9983	0.8778	50.294	1.204
30	0.0722	19.5875	0.8723	49.978	1.191

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Физические и приборные характеристики двумерных магнитных призм рассчитаны с использованием безразмерных уравнений Ньютона и аналитических выражений, описывающих магнитное поле призмы. При этом индукция магнитного поля призмы вычисляется как градиент скалярного потенциала. Использование безразмерных дифференциальных уравнений для описания движения заряженных частиц в электромагнитных полях упрощает проведение численных расчетов и делает полученные результаты расчетов более универсальными, позволяя исключить несущественные параметры. Рассчитаны корпускулярно-оптические свойства двумерных магнитных призм с магнитными экранами в телескопическом режиме фокусировки с учетом влияния краевых полей магнита.

*Работа выполнена в рамках проекта с грантовым финансированием Комитета науки МОН РК (ИРН AP09258546).*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кельман В.М., Якушев Е.М. Оптические свойства отклоняющих электронных систем // ЖТФ. 1967. Т. 37, № 12. С. 2121–2136.
2. Кельман В.М., Назаренко Л.М., Якушев Е.М. Теория симметричного призмного масс-спектрометра // ЖТФ. 1972. Т. 42, № 5. С. 963–968.
3. Якушев Е.М. Симметричный призмный масс-спектрометр с высоким разрешением // ЖТФ. 1976. Т. 46, № 8. С. 1700–1706.
4. Кельман В.М., Каретская С.П., Федулina Л.В., Якушев Е.М. Электронно-оптические элементы призмных спектрометров заряженных частиц. Алма-Ата: Наука КазССР, 1979. 232 с.
5. Кельман В.М., Родникова И.Р., Секунова Л.С. Статические масс-спектрометры. Алма-Ата: Наука КазССР, 1983. 264 с.
6. Gall L.N., Antonov A.S., Gall N.R., Yakushev E.M., Nazarenko L.M., Semenov A.A. A prism mass-spectrometer for isotope analysis of hydrogen–helium mixtures // Technical physics letters. 2018. Vol. 44, no 7. P. 646–649. DOI: 10.1134/S1063785018070209
7. Spivak-Lavrov I.F., Sharipov S.U., Sarsembaev B.O. Fringe fields of deflector plates with two earthed screens // Nuclear Inst. and Methods in Physics Research A. 2023. Vol. 1051. Id. 168161. DOI: 10.1016/j.nima.2023.168161
8. Спивак-Лавров И.Ф., Нурмуханова А.А., Шугаева Т.Ж. Призмный масс-спектрограф с конусообразной ахроматической призмой и трансаксиальными линзами // Научное приборостроение. 2019. Т. 29, № 1. С. 116–125. URL: <http://iairas.ru/mag/2019/abst1.php#abst18>
9. Spivak-Lavrov I.F., Shugaeva T.Zh., Kalimatov T.S. Mass analyzer with conic achromatic prism and transaxial lenses // International Journal of Mass Spectrometry. 2019. Vol. 444. Id. 116180. DOI: 10.1016/j.ijms.2019.116180.

*Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, Актюбе, Казахстан*

Контакты: Спивак-Лавров Игорь Феликсович, [spivakif@ Rambler.ru](mailto:spivakif@ Rambler.ru)

Материал поступил в редакцию 09.08.2023

## DYNAMICS OF CHARGED PARTICLES IN TWO-DIMENSIONAL MAGNETIC PRISMS WITH ACCOUNT OF THE INFLUENCE OF FRINGE FIELDS

**I. F. Spivak-Lavrov, O. A. Baysanov, S. U. Sharipov, B. O. Sarsembaev**

*Aktobe Regional University named after. K. Zhubanova, Aktobe, Kazakhstan*

The analytical formulas developed for the potential of the electrostatic field of deflector plates with grounded screens are applied to the scalar magnetic potential of a two-dimensional magnetic prism with magnetic screens. By defining the induction of the magnetic field of the prism as the gradient of the scalar magnetic potential, we simultaneously analytically describe the fringe fields of the magnet. In this case, to calculate the trajectories of charged particles in a two-dimensional magnetic prism, it is convenient to use Newton's dimensionless equations, which make it possible to take into account the influence of the fringe fields of a magnet on the properties of prisms. The corpuscular-optical characteristics of two-dimensional magnetic prisms with magnetic screens in the telescopic focusing mode are calculated taking into account the influence of the fringe fields of the magnet.

*Keywords:* two-dimensional magnetic prisma, magnet fringe fields, Newton's dimensionless equations, telescopic focusing mode

### REFERENCES

1. Kel'man V.M., Yakushev E.M. [Optical properties of deflecting electronic systems]. *ZhTF* [Journal of Applied Physics], 1967, vol. 37, no. 12, pp. 2121–2136. (In Russ.).
2. Kel'man V.M., Nazarenko L.M., Yakushev E.M. [Symmetric prism mass spectrometer theory]. *ZhTF* [Journal of Applied Physics], 1972, vol. 42, no. 5, pp. 963–968. (In Russ.).
3. Yakushev E.M. [High resolution symmetrical prism mass spectrometer]. *ZhTF* [Journal of Applied Physics], 1976, vol. 46, no. 8, pp. 1700–1706. (In Russ.).
4. Kel'man V.M., Karetskaya S.P., Fedulina L.V., Yakushev E.M. *Ehlektronno-opticheskie ehlementy prizmennykh spektrometrov zaryazhennykh chastits* [Electron-optical elements of prism spectrometers of charged particles]. Alma-Ata, Nauka KazSSR, 1979. 232 p. (In Russ.).
5. Kel'man V.M., Rodnikova I.R., Sekunova L.S. *Sticheskie mass-spektrometry* [Static mass spectrometers]. Alma-Ata, Nauka KazSSR, 1983. 264 p. (In Russ.).
6. Gall L.N., Antonov A.S., Gall N.R., Yakushev E.M., Nazarenko L.M., Semenov A.A. A prism mass-spectrometer for isotope analysis of hydrogen–helium mixtures. *Technical physics letters*, 2018, vol. 44, no 7, pp. 646–649. DOI: 10.1134/S1063785018070209
7. Spivak-Lavrov I.F., Sharipov S.U., Sarsembaev B.O. Fringe fields of deflector plates with two earthed screens. *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research A*, 2023, vol. 1051, Id. 168161. DOI: 10.1016/j.nima.2023.168161
8. Spivak-Lavrov I.F., Nurmukhanov A.A., Shukaeva T.Zh. [Prismatic mass spectrograph with a conical achromatic prism and transaxial lenses]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2019, vol. 29, no. 1, pp. 116–125. DOI: 10.18358/np-29-1-i116125 (In Russ.).
9. Spivak-Lavrov I.F., Shugaeva T.Zh., Kalimatov T.S. Mass analyzer with conic achromatic prism and transaxial lenses. *International Journal of Mass Spectrometry*, 2019, vol. 444, id. 116180. DOI: 10.1016/j.ijms.2019.116180

Contacts: *Spivak-Lavrov Igor' Feliksovich*,  
spivakif@rambler.ru

Article received by the editorial office on 09.08.2023



## INTRODUCTION

Two-dimensional magnetic prisms can be used as deflecting prism systems in prism magnetic mass spectrometers and beta spectrometers. Such spectrometers are similar in design to prism light-optical spectrometers. They are equipped with collimator and focusing lenses [1–5]. The angular dispersions of the magnetic prism by mass and energy are the same and equal to  $D'$ , while the linear dispersion of the device is determined by the formula:

$$D = D'f_2, \quad (1)$$

where  $f_2$  is the focal length of the focusing lens. Therefore, the linear dispersion of a prism device can be increased without increasing the linear dimensions of the prism by increasing the focal length  $f_2$ .

A two-dimensional magnetic prism has a middle plane, which is the plane of antisymmetry of the magnetic field. Fig. 1 schematically shows a two-dimensional magnetic prism, the magnetic poles of which are significantly elongated along the axis  $z$ . Therefore, in the region of motion of a beam of charged particles entering the prism at an angle  $\alpha$ , the magnetic field of the prism depends only on two other Cartesian coordinates. A parallel flat homogeneous beam of charged particles moving in the middle plane of the prism is deflected by the prism and leaves it also in parallel due to the identity of the particle trajectories. Thus, the parallelism of flat parallel homogeneous beams of charged particles moving in the middle plane is preserved in magnetic prisms. Maintaining the parallelism of volumetric beams is ensured by telescopicity [1–5].

**Fig. 1.** Two-dimensional magnetic prism

Two-dimensional magnetic prisms are considered in many works (see, for example, [1–6]). In all these works, the magnetic field of a two-dimensional magnetic prism is described using a vector potential. However, such a description of the magnetic field is not the only possible one. In the region where there are no electric conduction currents, the rotor of the magnetic induction vector is equal to zero:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0. \quad (2)$$

This allows us to determine the induction of the magnetic field  $\mathbf{B}$  of the prism as the gradient of the scalar magnetic potential  $\omega$ :

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \omega \equiv -\nabla \omega. \quad (3)$$

## CALCULATION OF PRISM MAGNETIC FIELD

In [7], analytical expressions were obtained for the scalar potential of deflector plates with two grounded screens. Similar expressions can be used for the scalar magnetic potential  $\omega(x, y)$  of a two-dimensional magnetic prism with magnetic screens:

$$\omega(x, y) = \frac{C}{2\pi} \left( \text{arctg} \frac{(a^2 - 1) \cos \frac{\pi y}{d}}{2a \text{ch} \frac{\pi x}{d} - (a^2 + 1) \sin \frac{\pi y}{d}} - \text{arctg} \frac{(a^2 - 1) \cos \frac{\pi y}{d}}{2a \text{ch} \frac{\pi x}{d} + (a^2 + 1) \sin \frac{\pi y}{d}} \right). \quad (4)$$

Here  $\pm \frac{C}{2}$  is the potential of the magnetic poles,  $d$  is the distance between the magnetic poles, and the parameter  $a$  is equal

$$a = \exp \left( \frac{\pi l}{2d} \right), \quad (5)$$

where  $l$  is the width of the magnetic poles in the direction of the axis  $x$ ; it is assumed that the poles are quite extended in the direction of the axis  $z$  to ensure the two-dimensionality of the field in the region of motion of charged particles. A two-dimensional magnetic prism with screens and the corresponding Cartesian coordinate system are schematically depicted in Fig. 2.

**Fig. 2.** Schematic representation of a two-dimensional magnetic prism with magnetic screens

In the figure, magnetic screens with potential  $C_0 = 0$  are depicted with thin lines, and magnetic poles with thick lines.

Differentiating (4), we find the components of the magnetic induction vector  $\mathbf{B}(x, y) = -\nabla \omega$ :

$$B_x = -\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{C}{2d} \left[ \frac{\Psi}{\Theta^-} - \frac{\Psi}{\Theta^+} \right], \quad (6)$$

$$B_y = -\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{C}{2d} \left[ \frac{\Xi - (a^4 - 1)}{\Theta^-} - \frac{\Xi + (a^4 - 1)}{\Theta^+} \right], \quad (7)$$

where

$$\Psi = 2a(a^2 - 1) \cos\left(\frac{\pi y}{d}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi x}{d}\right),$$

$$\Theta^- = 4a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{d} x -$$

$$-4a(a^2 + 1) \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{d} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d} y\right) - 2a^2 \cos \frac{2\pi}{d} y + a^4 + 1,$$

$$\Theta^+ = 4a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{d} x +$$

$$+4a(a^2 + 1) \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{d} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d} y\right) - 2a^2 \cos \frac{2\pi}{d} y + a^4 + 1,$$

$$\Xi = 2a(a^2 - 1) \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{d} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d} y\right).$$

The distribution of magnetic induction in the middle plane of the prism is determined by the expression:

$$B_y(x, 0) = B_y(-x, 0) = -\frac{C}{d} \frac{(a^4 - 1)}{4a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{d} x + (a^2 - 1)^2}. \quad (8)$$

Let  $B_0$  be the characteristic value of the magnetic field induction. This may be the induction value at the center of the magnet if  $x=0$  and  $y=0$ ; this value can be measured, for example, by a Hall sensor. According to (8), we get:

$$|B_y(0, 0)| = B_0 = \frac{C}{d} \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}. \quad (9)$$

Then the expression  $-\frac{\nabla \omega}{B_0} = \mathbf{B}_l$  determines the dimensionless magnetic field induction  $\mathbf{B}_l$ . Fig. 3 shows the distribution of the dimensionless magnetic field induction in the middle plane of a two-dimensional magnetic prism for a prism with  $l/d = 6$ , calculated using formula (8); the value  $B_{ly}(x, 0)$  is plotted along the ordinate axis.

**Fig. 3.** Distribution of dimensionless magnetic field induction in the middle plane of a two-dimensional magnetic prism with  $l/d = 6$

## NEWTON'S DIMENSIONLESS EQUATIONS

In the nonrelativistic approximation, the motion of a charged particle with an electric charge  $e$  and mass  $m$  can be described by the following Newton's differential equation:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (10)$$

Here  $\mathbf{r}$  is the radius vector of the particle,  $\mathbf{E}$  is the electric field intensity,  $\mathbf{B}$  is the magnetic field induction, and  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  denotes the vector product of the particle velocity  $\mathbf{v}$  and the magnetic field induction  $\mathbf{B}$ .

Let us write equation (10) in dimensionless variables, focusing further on the consideration of beams of charged particles with a spread by mass and energy. Let's imagine the mass of a particle in the form:

$$m = m_c(1 + \gamma), \quad (11)$$

and the energy of the particle at the entrance to the system in the form:

$$W_0 = -(1 + \varepsilon)eV_0. \quad (12)$$

In the last expressions:  $m_c$  is the mass of the "central" particle moving along the axial trajectory,  $\gamma$  is a dimensionless parameter that determines the relative spread of particles by mass,  $\varepsilon$  is a dimensionless parameter that determines the relative spread of particles by energy at the input into a corpuscular (charge particle)-optical system (COS) with  $\gamma = \varepsilon = 0$  for the "central" particle. Note that the value  $(-eV_0 > 0)$  is always positive (positive ions are drawn out by the negative potential). The electrostatic potential  $\varphi$  is normalized in such a way that it is equal to zero where the particle speed is equal to zero, and

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (13)$$

However, negative potentials are inconvenient to use in numerical calculations, so we will consider the potential  $\varphi$  to be positive everywhere, and the kinetic energy of the particles will be equal to  $|e|\varphi$ .

Let us take  $d$  — the characteristic linear size of the COS — as a unit of length, the characteristic electrostatic potential of the COS,  $B_0$  — characteristic value of the magnetic field induction value. Let us also introduce non-dimensional time

$$\tau = \frac{t}{\tau_0}. \quad (14)$$

Now we rewrite equation (10) in the form:

$$\frac{d}{\tau_0^2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = -\frac{eV_0(1+\varepsilon)}{m_c(1+\gamma)d} \frac{\nabla\varphi}{V_0(1+\varepsilon)} - \frac{eB_0d}{m_c(1+\gamma)\tau_0} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \times \frac{\nabla\omega}{B_0}. \quad (15)$$

In this equation, the components of the radius vector  $\mathbf{r}$  are measured in units  $d$ . If we now choose  $\tau_0$  equal

$$\tau_0 = d \sqrt{\frac{m_c(1+\gamma)}{eV_0(1+\varepsilon)}}, \quad (16)$$

we come to the equation

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \frac{\nabla\Phi}{1+\varepsilon} + \tau_0 \frac{eB_0}{m_c(1+\gamma)} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \times \mathbf{B}_l. \quad (17)$$

Here  $\nabla\Phi$  is the dimensionless gradient of the dimensionless potential

$$\Phi = \frac{\varphi}{V_0}. \quad (18)$$

In future calculations, we will consider the potential  $\varphi$  and electric charge  $e$  to be positive quantities. In this case, the kinetic energy of charged particles will be equal to  $e\varphi$ . Substituting formula (16) in (17) for  $\tau_0$ , we obtain:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \frac{\nabla\Phi}{1+\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+\gamma)}} \frac{\sqrt{2}d}{R_0} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \times \mathbf{B}_l. \quad (19)$$

Here

$$R_0 = \frac{\sqrt{2m_c \cdot |eV_0|}}{|e| \cdot B_0}. \quad (20)$$

This value determines the radius of curvature of the trajectory at the point where the magnetic field induction is equal to  $B_0$ , and the value of the particle energy is equal to  $|eV_0|$ , and  $R_0/d$  is the dimensionless radius of curvature of the trajectory, measured in units  $d$ . Previously, we used a slightly different representation of Newton's dimensionless equations given in [8, 9].

Note that equation (19) has profound physical significance. In particular, it follows from this equation that a constant electric field spatially separates particles only by energy but a constant magnetic field separates particles both by energy and mass similarly due to an identical dependence on  $\varepsilon$  and  $\gamma$ . Due to (16), the presence of a spread in energy  $\varepsilon$  and mass

$\gamma$  only leads to a change in the time of particle motion.

## CALCULATION RESULTS

To calculate the trajectories of charged particles in two-dimensional magnetic prisms, we use the following dimensionless Newton's equations, which are obtained from (19) in the absence of an electric field:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{K \dot{z} B_{ly}}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+\gamma)}}, \\ \ddot{y} &= \frac{K \dot{z} B_{lx}}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+\gamma)}}, \\ \ddot{z} &= \frac{K(\dot{x} B_{ly} - \dot{y} B_{lx})}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+\gamma)}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Here the points denote the derivatives of dimensionless coordinates with respect to non-dimensional time  $\tau$ ,  $K$  is a dimensionless constant, the numerical value of which is selected during the calculation process. Let us limit ourselves to considering prisms with a symmetrical axial trajectory. To do this, let us assume values  $\dot{y} = \dot{z} = 0$  and  $\dot{x} = \sqrt{2}$ . at the center of the magnet, where  $y = 0$  and  $x = 0$ . Then, the value of the constant  $K$ , according to (19), is determined by the expression

$$K = \frac{\sqrt{2}d}{R_0}. \quad (22)$$

Indeed, the axial trajectory of the beam with  $\gamma = \varepsilon = 0$  is a flat curve lying in the plane of the  $xz$  prism, for the radius of curvature of which the following well-known formula can be written:

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x}|}. \quad (23)$$

Substituting  $\dot{y} = \dot{z} = 0$  into this formula, we get:

$$R_0 = \frac{\dot{x}^2}{\ddot{z}}. \quad (24)$$

Using the third equation (21) and taking into account that  $B_{ly}(0,0) = 1$  at the center of the magnet, we write:

$$\ddot{z} = \dot{x} K. \quad (25)$$

Substituting (25) into (24) and  $\dot{x} = \sqrt{2}$ , we obtain in dimensionless units

$$\frac{R_0}{d} = \frac{\dot{x}}{K} = \frac{\sqrt{2}}{K}. \quad (26)$$

Note that when a charged particle moves in a constant magnetic field, the velocity module does not change, so the relation is satisfied

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{2}. \quad (27)$$

The speed of the “central” particle in the middle of the magnet is determined by the formula, which is consistent with the law of conservation of energy:

$$v_0 = \sqrt{2} \frac{d}{\tau_0} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_c}}. \quad (28)$$

The results of numerical calculations of particle trajectories for prism with  $l/d=6$  are presented in Figs. 4 and 5.

**Fig. 4.** Projections of particle trajectories onto the middle plane of the prism with  $l/d=6$

Fig. 4 shows the boundaries of the magnetic poles as well as the projections of particle trajectories onto the middle plane of the prism for three masses with  $\gamma=0$  and  $\gamma=\pm 0.01$ . The angle of incidence of particles on the boundary of the magnetic poles is equal to  $\alpha=52.502^\circ$ . The radius of curvature of the trajectory at the center of the magnet in  $d$  units is equal to 3.7813, which ensures the telescopicity of the prism.

The projection of particle trajectories onto a plane  $xy$  is shown in Fig. 5.

**Fig. 5.** Projection of particle trajectories onto the  $xy$  plane for prism with  $l/d=6$

With an inclined entrance of particles into the prism, the particles are focused towards the middle plane, forming a linear focus in the center of the magnet. In this case, the telescopicity of the prism is ensured, and the parallel volumetric beam entering the prism remains parallel at the exit from it. It can be seen from the figure that the condition of the telescopicity is satisfied quite well even when the particles deviate from the average plane  $\pm 0.15d$ .

The angular dispersion of the prism by mass  $D'_m \cong \text{tg} \alpha = 1.3$  is in good agreement with the calculation

results and the data in the monograph [4]. With a relative difference in masses  $\gamma = \pm 0.01$ , the angular divergence of particles

$$\Delta \alpha = D'_m \gamma = \pm 0.013 \text{ rad}, \quad (29)$$

i.e., slightly less than one degree, which can be observed in Fig. 4.

The calculation results for two-dimensional magnetic prisms with various ratios  $l/d$  are presented in the table below. From the given data, it is clear that the angular dispersion of all two-dimensional magnetic prisms in terms of mass and energy is approximately the same and almost does not depend on the ratio  $l/d$ .

**Tab.** Results of calculation for two-dimensional magnetic prisms

Let us now demonstrate the universality of the results obtained. The main result is the calculated radius of curvature of the axial trajectory at the center of the magnet. For the prism with  $l/d=6$  we have an attitude  $R_0/d \cong 3.7813$ . From formula (20), it follows that the value of the analyzed mass is determined by the expression:

$$m_c = \frac{(eB_0)^2 \left(\frac{R_0}{d}\right)^2 d^2}{2eV_0}. \quad (30)$$

Let us calculate the analyzed mass using the formula (30). Assuming, for example  $B_0 = 1 \text{ T}$ ,  $eV_0 = 1 \text{ keV}$ , the value of the pole gap  $d = 0.01 \text{ m}$  and using the atomic mass unit  $m_0 = 1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , we obtain:

$$\frac{m_c}{m_0} = \frac{(1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1)^2 \cdot (3.7813)^2 \cdot 0.01^2}{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3 \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27}} = 68.97. \quad (31)$$

## CONCLUSION

The physical and instrumental characteristics of two-dimensional magnetic prisms are calculated using Newton's dimensionless equations and analytical expressions describing the magnetic field of the prism. The induction of the magnetic field of the prism is calculated as the gradient of the scalar potential. The use of dimensionless differential equations to describe the motion of charged particles in electromagnetic fields simplifies numerical calculations and makes the obtained calculation results more universal, allowing

one to exclude unimportant parameters. The corpuscular-optical properties of two-dimensional magnetic prisms with magnetic screens in a telescopic focusing

mode are calculated, taking into account the influence of the fringe fields of the magnet.