
**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ПРИБОРОВ
И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МЕТОДИК**

УДК 543.426; 543.9

© Б. М. Мамиконян, С. А. Казарян, 2023

ИЗМЕРЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ КОМПЛЕКСНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ

Разработано микроконтроллерное устройство цифрового измерения составляющих комплексного сопротивления взаимной индукции магнитно-связанных катушек для случая, когда из-за эффектов "емкости" и "вихревых токов" в ЭДС взаимной индукции возникают "примесь" и "фазовый дефект". При этом в комплексном сопротивлении взаимной индукции появляется активная составляющая. Для инвариантного измерения составляющих этого сопротивления использован фазовый метод в сочетании с временным разделением канала измерения. Измерительная цепь (ИЦ) питается током управляемого генератора синусоидальных сигналов. Информативным параметром выходного сигнала ИЦ является угол фазового сдвига между двумя напряжениями. Эти напряжения поступают на аналоговые входы программируемого микроконтроллера (МК). В процессе измерения МК устанавливает частоту генератора, управляет переключением канала измерения, измеряет угол фазового сдвига между выходными напряжениями ИЦ и по заданным алгоритмам вычисляет составляющие комплексного сопротивления взаимной индукции. Изложены теория метода, методика расчета параметров элементов ИЦ, оценка чувствительности преобразования, анализ погрешностей измерения.

Кл. сл.: взаимная индукция, комплексное сопротивление, измерение, фазовый метод, угол сдвига фаз, погрешность измерения

Обозначения

В тексте электротехнические комплексные величины обозначаются латинскими буквами с точкой сверху, как, например, \dot{E} .

строенные на базе датчика взаимной индуктивности. Широкое применение ВИ обуславливает требование постоянного совершенствования методов и средств измерения ее параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление взаимной индукции (ВИ) является одним из наиболее важных параметров электрических цепей, который необходимо определять для систем катушек, применяемых в различных областях, включая трансформаторы, электрические машины и аппараты, электромагнитные устройства автоматики и измерительной техники, технологии связи, производство и передачу электроэнергии. Помимо этих традиционных применений, появляются новые. Индуктивно-связанные катушки являются важными узлами систем беспроводной передачи энергии, которые уже нашли применение в бытовой электронике, промышленном производстве и медицинских имплантатах, активно изучаются возможности их применения для зарядки электромобилей. Другой развивающейся отраслью промышленности является робототехника. Здесь нужны системы точного измерения перемещений механизмов, способных работать в условиях загрязненных сред. Таким требованиям наилучшим образом удовлетворяют системы, по-

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В индуктивно связанных катушках сопротивление ВИ обычно определяется размером и геометрией обмоток, относительным положением между первичной и вторичной обмотками и витками обмоток. На частотах, превышающих $f = 100$ Гц, усиливаются эффекты "емкости" и "вихревых токов" [1–3]. Межвитковые емкости, потери на вихревые токи в проводниках обмоток, утечки и диэлектрические потери в изоляции приводят к ситуации, когда угол сдвига фазы между ЭДС \dot{E}_2 , индуцируемой во вторичной обмотке, и током \dot{I}_1 в первичной обмотке отличается от 90° . Нарушается также простая пропорциональность ЭДС \dot{E}_2 частоте и значению геометрической (низкочастотной) индуктивности M_0 . Вместо идеального уравнения $\dot{E}_2 = j\omega M_0 \dot{I}_1$ появляется зависимость

$$\dot{E}_2 = [\sigma + j\omega(M_0 + \Delta M)] \dot{I}_1 = (\sigma + j\omega M) \dot{I}_1, \quad (1)$$

где σ и ΔM — корректирующие члены, называемые соответственно "примесью" и "частотной коррекцией" M_0 на частоте f . В комплексном сопротивлении ВИ $Z_M = \sigma + j\omega M$ увеличивается эффективная взаимная индуктивность $M = M_0 + \Delta M$, а малый угол $\delta = \arctg(\sigma/\omega M) \approx \sigma/\omega M$ отображает фазовый дефект ВИ.

Активное сопротивление σ зависит от частоты и некоторых других факторов. Наиболее подробно теория эффектов "емкости" и "вихревых токов" изложена в [1], теоретическая оценка дает приблизительно квадратичную зависимость σ от частоты f . Показано [1], что в случае, если первичная катушка должна пропускать большой ток, отклонение от квадратуры векторов \dot{E}_2 и \dot{I}_1 может стать значительным: рассмотрен пример, в котором даже при сравнительно низкой частоте $f = 60$ Гц дефект фазы составляет 75 мин. При применении ферромагнитных сердечников дефект фазы увеличивается и может достигать 10° [4].

В ряде случаев катушка ВИ используется для высокоточного установления сдвига фазы между током и напряжением на 90° , как, например, в прямоуглольно-координатных потенциометрах, в стандартах высокочастотной мощности переменного тока и др. В [2] построена эквивалентная схема замещения катушек с индуктивной связью с учетом всех паразитных емкостей и получены математические зависимости σ и ΔM от этих емкостей. При разработке стандартов высокочастотной мощности необходимо очень точно знать фазовую погрешность шунтов переменного тока [5, 6]. Погрешность фазового угла сильноточных шунтов калибруется по шунту с известным фазовым углом. Сопротивления сильноточных шунтов обычно находятся на уровне МОм, а реактивное сопротивление шунтов, которое генерируется эквивалентной индуктивностью, является доминирующей частью на высокой частоте. Измерения дефекта фазы взаимной индуктивности на частотах от 20 кГц до 200 кГц произведены в [2].

Для инвариантного измерения составляющих комплексных сопротивлений широко применяются мосты переменного тока в режиме уравнивания [7, 8]. Для уравнивания моста две его составляющие должны быть регулируемы и градуированными, обычно применяются переменные образцовые сопротивления или емкости [3, 9]. С применением моста УМРТ-2 были измерены угловые погрешности катушек взаимной индуктивности типов KV-1 и KV1-5 ($M = 0.01$ Гн и $M = 0.001$ Гн) в диапазоне частот от 400 до 2500 Гц [3].

Мосты переменного тока работают обычно на низких частотах — до 1000 Гц; при работе на повышенных частотах погрешность измерения резко возрастает [10]. Мостовые методы измерения имеют общий недостаток: в них не обеспечивается выходной сигнал с единственным информативным параметром для передачи на расстояние или сопряжения со средствами вычислительной техники с целью автоматизации процесса измерения и обработки результатов измерений.

СУЩНОСТЬ РАЗВИВАЕМОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ

Как показано в настоящем исследовании, указанный недостаток мостовых методов можно устранить, если использовать фазовый метод измерения составляющих Z_M [11]. Сущность метода поясняется с помощью рис. 1.

В измерительной цепи (ИЦ) с первичной обмоткой ВИ последовательно соединены два образцовых резистора: опорный резистор R_1 и дополнительный резистор R_2 . В ИЦ измеряемые параметры σ и M преобразуются в угол фазового сдвига φ между выходными напряжениями u_S и u_N , которые поступают на аналоговые входы микроконтроллера (МК), при этом вторичная обмотка ВИ работает в режиме холостого хода.

В первом (а) и втором (б) положениях переключателя имеем соответственно

$$\begin{aligned} \dot{U}_{S1} &= \dot{I}(R_1 + \sigma + j\omega M), \\ \dot{U}_{S2} &= \dot{I}(R_1 + R_2 + \sigma + j\omega M), \end{aligned}$$

а опорное напряжение $\dot{U}_N = \dot{I}R_1$, где I — измерительный ток. Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \omega M / (\sigma + R_1), \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \omega M / (\sigma + R_1 + R_2), \end{aligned} \quad (2)$$

преобразованием которых получаем

$$M = \frac{R_2}{\omega(\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1)}, \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{(R_1 + R_2)\operatorname{ctg} \varphi_1 - R_1 \operatorname{ctg} \varphi_2}{\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1}. \quad (4)$$

Видно, что обеспечивается независимое друг от друга (инвариантное) определение M и σ , при этом необходимо измерить только угол φ в двух положениях переключателя, а результат измерения не зависит от стабильности измерительного тока.

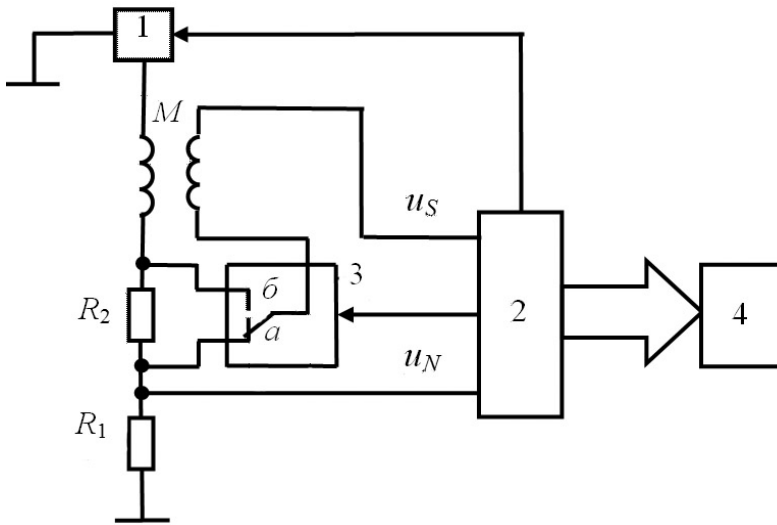


Рис. 1. Упрощенная функциональная схема измерителя.

1 — генератор синусоидального напряжения с программируемой частотой, 2 — микроконтроллер, 3 — электронный переключатель, 4 — цифровое табло

В экспериментальном образце измерителя использованы микросхема генератора AD9833 [12] и МК типа PIC32MX695F512H [13]. Аналоговые входы МК снабжены компараторами, где угол φ преобразуется во временной интервал τ , который измеряется в МК методом дискретного счета. При каждом измерении МК устанавливает требуемую частоту ω генератора, управляет положением переключателя, измеряет углы φ_1 и φ_2 , вычисляет значения M и σ по алгоритмам (3) и (4) и выводит результаты измерения на цифровое табло.

ВЫБОР ДИАПАЗОНА ШКАЛЫ И АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Анализ показывает, что из-за особенностей тангенсных и котангенсных функций чувствительность преобразования $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ максимальна в середине шкалы $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ угла и падает по краям этого диапазона, поэтому шкала угла φ выбрана в диапазоне $15^\circ \leq \varphi \leq 75^\circ$, что реализуется выбором сопротивлений R_1 и R_2 с учетом диапазонов измерения M и σ . При этом, поскольку $\varphi_1 > \varphi_2$, то верхний предел шкалы устанавливается значением сопротивления R_1 , а нижний — значением сопротивления R_2 .

Выполним расчет этих сопротивлений для случая частоты измерительного тока $f = 1000$ Гц

и диапазонов измерения $\sigma = 1-10$ Ом, $\omega M = 100-1000$ Ом. Исключив из двух выражений (2) сумму $(\sigma + R_1)$, получаем

$$R_2 = \omega(M_{\min} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_{2\min} - M_{\max} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_{1\max}).$$

С учетом значений $\operatorname{ctg} 15^\circ = 3.732$ и $\operatorname{ctg} 75^\circ = 0.268$ получаем для шкалы M значение $R_2 \approx 105$ Ом, а также $\sigma + R_1 = 1000 / 3.732 \approx 268$ Ом, $\sigma + R_1 + R_2 = 100 / 0.268 \approx 373$ Ом. При этих значениях находим также углы $\varphi_{1\min}$ и $\varphi_{2\max}$:

$$\operatorname{tg} \varphi_{1\min} = \frac{\omega M_{\min}}{\sigma + R_1} = \frac{100}{268} \approx 0.373, \quad \varphi_{1\min} \approx 20.45^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{2\max} = \frac{\omega M_{\max}}{\sigma + R_1 + R_2} = \frac{1000}{373} \approx 2.681, \quad \varphi_{2\max} = 69.55^\circ.$$

По результатам расчета чувствительности преобразования на рис. 2 построена кривая зависимости $\Delta\varphi = f(\varphi)$.

Для выбора шкалы σ следует учесть, что с увеличением σ угол φ уменьшается, как видно из (2). Поэтому целесообразно измерить вместо σ добротность вторичной обмотки ВИ $Q = \omega M / \sigma$, поскольку, имея значения ωM и Q , МК вычислит значения σ .

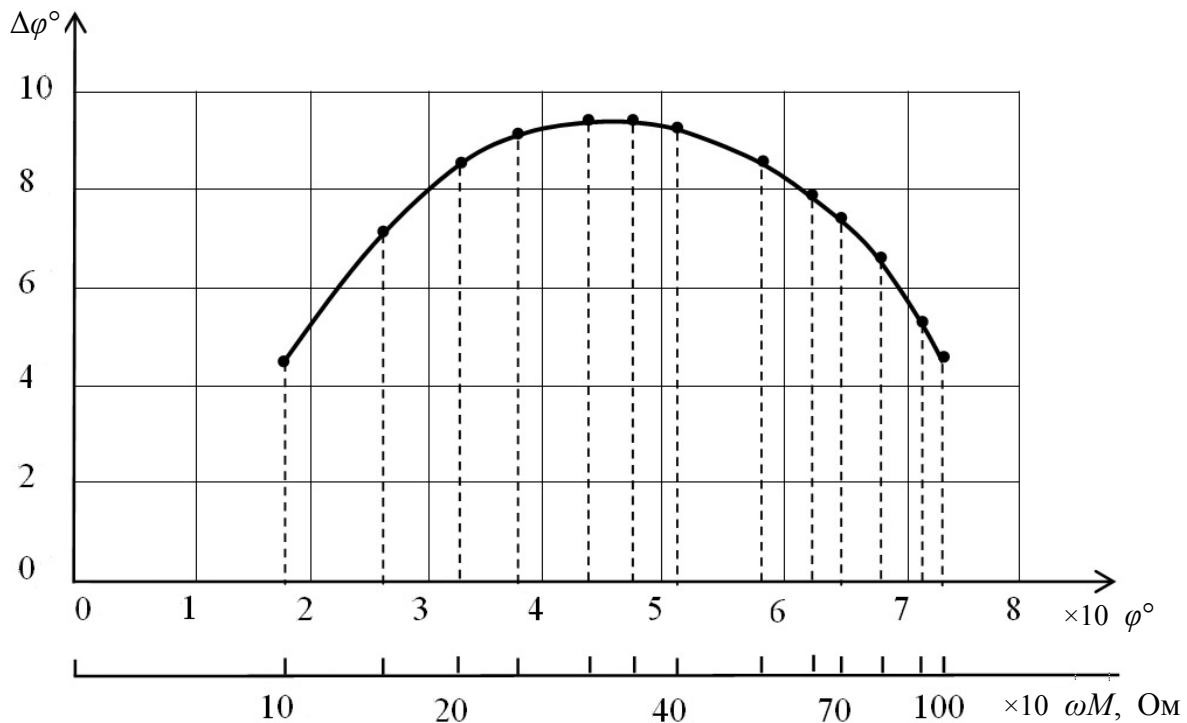


Рис. 2. График зависимости чувствительности преобразования $\Delta\varphi = f(\varphi)$ вдоль шкалы угла φ

Из (3) и (4) следует, что

$$Q = \frac{R_2}{(R_1 + R_2) \operatorname{ctg} \varphi_1 - R_1 \operatorname{ctg} \varphi_2}, \quad (5)$$

а диапазон измерения Q , определяемый диапазоном измерения ωM и σ , будет $Q = 100\text{--}1000$. Представим формулы (2) в виде:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{Q}{1 + R_1/\sigma}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{Q}{1 + (R_1 + R_2)/\sigma}. \quad (7)$$

Для шкалы Q целесообразно сохранить значение сопротивления $R_2 = 105$ Ом, которым устанавливается чувствительность преобразования. Для отметки $\varphi_{1\max}$ шкалы из (6) определяем

$$1 + R_1/\sigma = Q_{\max}/\operatorname{tg} \varphi_{1\max} \quad (8)$$

и подставляем в формулу (7), представленную для начальной отметки шкалы:

$$\operatorname{tg} \varphi_{2\min} = \frac{Q_{\min}}{Q_{\max}/\operatorname{tg} \varphi_{1\max} + R_2/\sigma},$$

откуда находим отношение

$$R_2/\sigma = Q_{\min}/\operatorname{tg} \varphi_{2\min} - Q_{\max}/\operatorname{tg} \varphi_{1\max} \approx 105.$$

Следовательно, $\sigma = R_2/105 = 1.0$ для всей шкалы, с учетом чего из (8) находим $R_1 = 267$ Ом. Таким образом, для M и Q получаем единую шкалу угла φ .

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ

Произведена теоретическая оценка погрешностей определения M и Q по формулам (3) и (5). Нестабильность частоты ω не вызывает погрешности в (3), поскольку при вычислении угла φ по формуле $\varphi = (\tau/T) \cdot 360^\circ$ МК измеряет также период $T = 1/f$ измерительного тока. Поэтому относительная погрешность определения M будет

$$\begin{aligned}\gamma(M) &= \frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta(\operatorname{ctg} \varphi_1) - \Delta(\operatorname{ctg} \varphi_2)}{\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1} = \\ &= \gamma_R(M) + \gamma_\varphi(M),\end{aligned}\quad (9)$$

где обозначены частные погрешности:

$$\gamma_R(M) = \Delta R_2 / R_2 = \gamma(R_2), \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\gamma_\varphi(M) &= \frac{\Delta(\operatorname{ctg} \varphi_1) - \Delta(\operatorname{ctg} \varphi_2)}{\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi_1 \cdot \gamma(\operatorname{ctg} \varphi_1) - \operatorname{ctg} \varphi_2 \cdot \gamma(\operatorname{ctg} \varphi_2)}{\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1}.\end{aligned}\quad (11)$$

Аналогичным образом получаем из выражения (5):

$$\gamma(Q) = \gamma_R(Q) + \gamma_\varphi(Q),$$

$$\begin{aligned}\gamma_R(Q) &= \frac{\Delta_R(Q)}{Q} = \\ &= \frac{R_1(\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1)[\gamma(R_1) - \gamma(R_2)]}{(R_1 + R_2)\operatorname{ctg} \varphi_1 - R_1 \operatorname{ctg} \varphi_2},\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\gamma_\varphi(Q) &= \frac{\Delta_\varphi(Q)}{Q} = \\ &= \frac{R_1 \cdot \operatorname{ctg} \varphi_2 \cdot \gamma(\operatorname{ctg} \varphi_2) - (R_1 + R_2)\operatorname{ctg} \varphi_1 \cdot \gamma(\operatorname{ctg} \varphi_1)}{(R_1 + R_2)\operatorname{ctg} \varphi_1 - R_1 \operatorname{ctg} \varphi_2}.\end{aligned}\quad (13)$$

Анализ показывает, что фазовый метод измерения параметров ВИ чрезмерно критичен к стабильности сопротивлений резисторов R_1 и R_2 , поэтому выбраны наиболее высокоточные металлофольговые резисторы типа С5-61 [14]. С учетом значений допуска $\pm 0.005\%$ от номинального сопротивления R_N и ТКС

$\alpha_t = \pm 10 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ абсолютное изменение сопротивления резистора в нормальных условиях эксплуатации (при температуре $20 \pm 5 \text{ }^\circ\text{C}$) будет

$$\Delta R_\Sigma = 0.00005 R_N + \Delta R_t = \pm 1.5 \cdot 10^{-4} R_N,$$

где $\Delta R_t = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot R_N = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10 R_N = \pm 10^{-4} R_N$ — температурное изменение сопротивления резистора. Следовательно, частная относительная погрешность измерения M от изменения сопротивления резистора R_2 с учетом (10) будет

$$\gamma_R(M) = \gamma(R) = \Delta R_\Sigma / R_N = 1.5 \cdot 10^{-4}.$$

Можно считать, что погрешности резисторов R_1 и R_2 являются некоррелированными случайными величинами с нормальными законами распределения, поэтому для среднеквадратических отклонений $\sigma[\gamma(R)]$ их сопротивлений можно принять с доверительной вероятностью 0.95 [15]

$$\begin{aligned}\sigma[\gamma(R_1)] &= \sigma[\gamma(R_2)] = \sigma[\gamma(R)] = 0.5 \Delta R_\Sigma = \\ &= 0.75 \cdot 10^{-4},\end{aligned}$$

с учетом чего получаем

$$\begin{aligned}\sigma[\gamma(R_1) - \gamma(R_2)] &= \sqrt{2\sigma^2[\gamma(R)]} = \\ &= 1.41\sigma[\gamma(R)] = 1.41 \cdot 0.75 \cdot 10^{-4} \approx 1.06 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Подставляя в (12)

$$[\gamma(R_1) - \gamma(R_2)] = 2 \cdot \sigma[\gamma(R_1) - \gamma(R_2)] \approx 2.1 \cdot 10^{-4}$$

и значения сопротивлений R_1 и R_2 , получаем

$$\gamma_R(Q) = \frac{2.1 \cdot 10^{-4} \cdot (\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1)}{1.4 \cdot \operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_2}.\quad (14)$$

В табл. 1 представлены результаты расчета $\gamma_R(Q)$ по формуле (14), где принято обозначение $A = \operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1$.

Табл. 1. Расчетные значения погрешности $\gamma_R(Q)$ при $R_1 = 267 \text{ Ом}$, $R_2 = 105 \text{ Ом}$

Функция	Q									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\operatorname{ctg} \varphi_1$	2.680	1.340	0.893	0.670	0.536	0.446	0.383	0.335	0.298	0.268
$\operatorname{ctg} \varphi_2$	3.730	1.865	1.243	0.933	0.746	0.621	0.533	0.466	0.415	0.373
A	1.050	0.525	0.350	0.263	0.210	0.175	0.150	0.131	0.117	0.105
$\gamma_R(Q), \%$	1.00	1.002	1.021	1.105	1.002	1.081	0.984	0.917	1.112	1.002

Расчеты показывают, что частная погрешность определения Q от изменения сопротивлений резисторов R_1 и R_2 с доверительной вероятностью 0.95 не превышает значения $\gamma_R(Q) = 1.2\%$. Для уменьшения этой погрешности можно перед монтажом резисторов определить точные значения их сопротивлений.

Частные погрешности $\gamma_\varphi(M)$ по формуле (11) и $\gamma_\varphi(Q)$ по формуле (13) зависят от точности измерения фазовых углов φ_1 и φ_2 . Относительная погрешность измерения фазового сдвига φ имеет две составляющие: погрешность $\gamma(\tau)$ преобразования угла φ во временной интервал τ и погрешность $\gamma(\varphi) = \Delta\varphi/\varphi$ измерения длительности импульсно-го сигнала — $\gamma_\Sigma(\varphi) = \gamma(\tau) + \gamma(\varphi)$. Погрешность $\gamma(\tau)$ зависит от напряжений смещения нуля входных компараторов МК; практически ее можно устранить, используя способ биполярного измерения, при котором τ определяется по четырем моментам перехода через нулевые значения синусоиды в обоих направлениях (в течение одного периода входного напряжения получаются два временных интервала τ) [16]. Следовательно, относительная погрешность определения $\text{ctg}\varphi$ будет зависеть только от точности измерения фазового сдвига φ и может быть вычислена по выражению

$$\begin{aligned} \gamma(\text{ctg}\varphi) &= \frac{\Delta(\text{ctg}\varphi)}{\text{ctg}\varphi} = \frac{1}{\text{ctg}\varphi} \cdot \frac{\partial(\text{ctg}\varphi)}{\partial\varphi} \cdot \Delta\varphi = \\ &= -\frac{\varphi}{\text{ctg}\varphi \cdot \sin^2\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\varphi} = -\frac{2\varphi \cdot \gamma(\varphi)}{\sin 2\varphi}, \end{aligned}$$

или

$$\gamma(\text{ctg}\varphi) = -\frac{2\pi\varphi \cdot \gamma(\varphi)}{180 \cdot \sin 2\varphi} = -\frac{0.035\varphi \cdot \gamma(\varphi)}{\sin 2\varphi} = \beta \cdot \gamma(\varphi),$$

где $\beta = -\frac{0.035\varphi}{\sin 2\varphi}$, а угол φ выражен в радианах.

Следовательно,

$$\gamma(\text{ctg}\varphi_1) = \beta_1 \cdot \gamma(\varphi_1), \quad \gamma(\text{ctg}\varphi_2) = \beta_2 \cdot \gamma(\varphi_2).$$

Погрешности $\gamma(\text{ctg}\varphi_1)$ и $\gamma(\text{ctg}\varphi_2)$ являются случайными и независимыми, поэтому с доверительной вероятностью 0.95 можно принять, что $\gamma(\text{ctg}\varphi_1) = 2\sigma_{\gamma(\text{ctg}\varphi_1)}$, $\gamma(\text{ctg}\varphi_2) = 2\sigma_{\gamma(\text{ctg}\varphi_2)}$, следовательно, с учетом выражения (11) получаем:

$$\gamma_\varphi(M) =$$

$$= \frac{\sqrt{\beta_1^2 \cdot \gamma^2(\varphi_1) \cdot \text{ctg}^2\varphi_1 + \beta_2^2 \cdot \gamma^2(\varphi_2) \cdot \text{ctg}^2\varphi_2}}{\text{ctg}\varphi_2 - \text{ctg}\varphi_1}.$$

Т.к. углы φ_1 и φ_2 измеряются одними и теми же аппаратными средствами практически одновременно, то можно принять, что $\gamma(\varphi_1) \approx \gamma(\varphi_2) = \gamma(\varphi)$, следовательно,

$$\gamma_\varphi(M) = \frac{\gamma(\varphi) \sqrt{\beta_1^2 \cdot \text{ctg}^2\varphi_1 + \beta_2^2 \cdot \text{ctg}^2\varphi_2}}{\text{ctg}\varphi_2 - \text{ctg}\varphi_1}.$$

С учетом выражения β получаем:

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi(M) &= \\ &= \frac{0.0175 \cdot \gamma(\varphi)}{\text{ctg}\varphi_2 - \text{ctg}\varphi_1} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varphi_1}{\sin^2\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2}{\sin^2\varphi_2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Произведя аналогичные действия с выражением (13), получаем:

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi(Q) &= \frac{0.0175 \cdot \gamma(\varphi)}{(1 + R_2/R_1) \text{ctg}\varphi_1 - \text{ctg}\varphi_2} \times \\ &\times \sqrt{\left(\frac{\varphi_2}{\sin^2\varphi_2}\right)^2 + (1 + R_2/R_1)^2 \cdot \left(\frac{\varphi_1}{\sin^2\varphi_1}\right)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для вычисления погрешностей по выражениям (15) и (16) необходимо найти значение $\gamma(\varphi)$. Измерение фазового сдвига φ выполняется в МК по формуле $\varphi = (\tau/T) \cdot 360^\circ$ путем заполнения временных интервалов τ и T импульсами образцовой частоты $f_0 = 80$ МГц тактового генератора. Показание таймер-счетчика будет

$$\varphi = \frac{nf_0}{Nf_0} \cdot 360^\circ = \frac{n}{N} \cdot 360^\circ,$$

где n и N — количества импульсов, поступивших на таймер-счетчик за время τ и T соответственно.

Абсолютная погрешность измерения угла φ будет

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Delta n + \frac{\partial\varphi}{\partial N} \Delta N = \left(\frac{\Delta n}{N} - \frac{n}{N^2} \Delta N\right) 360^\circ,$$

а относительная погрешность:

$$\gamma(\varphi) = \frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta n}{n} - \frac{\Delta N}{N}.$$

Табл. 2. Расчетные значения погрешности $\gamma_\varphi(M)$ при $R_1 = 267$ Ом, $R_2 = 105$ Ом, $f = 1.0$ кГц, $f_0 = 80$ МГц

Функция	$\omega M, \text{ Ом}$									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
A	1.050	0.525	0.350	0.263	0.210	0.175	0.150	0.131	0.117	0.105
$\varphi_1, \text{ град.}$	20.455	36.723	48.214	56.168	61.800	65.923	69.043	71.473	73.412	75.000
$\varphi_2, \text{ град.}$	15.000	28.191	38.799	46.990	53.267	58.123	61.940	64.995	67.481	69.538
B	4.878	2.857	2.293	2.090	2.004	1.970	1.958	1.959	1.962	1.969
$\gamma(\varphi) \cdot 10^5$	31.250	17.238	12.848	10.827	9.698	8.992	8.515	8.174	7.919	7.721
$\gamma_\varphi(M) \cdot 10^3\%$	2.547	1.642	1.473	1.506	1.620	1.772	1.945	2.136	2.324	2.534

Погрешность $\gamma(\varphi)$ определяется случайной погрешностью дискретности, т.е. возможностью потери в числах n и N по одному счетному импульсу. Наихудший случай имеет место, когда $\Delta n = 1$, $\Delta N = -1$:

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{N} = \frac{T_0}{nT_0} + \frac{T_0}{NT_0} = T_0 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T} \right) = \\ &= \frac{f}{f_0} \left(1 + \frac{360^\circ}{\varphi} \right). \end{aligned}$$

При имеющихся значениях $f = 1.0$ кГц, $f_0 = 80$ МГц получаем

$$\gamma(\varphi) = \pm 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot \left(1 + \frac{360^\circ}{\varphi} \right). \quad (17)$$

В табл. 2 представлены результаты расчета погрешности $\gamma_\varphi(M)$, вычисленные по формулам (15) и (17), где приняты обозначения

$$A = \text{ctg } \varphi_2 - \text{ctg } \varphi_1,$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{\varphi_1}{\sin^2 \varphi_1} \right)^2 + \left(\frac{\varphi_2}{\sin^2 \varphi_2} \right)^2},$$

а в формуле (17) подставлены значения $\varphi = \varphi_2$, поскольку всегда $\varphi_2 < \varphi_1$, а нас интересует предел допускаемой погрешности измерения. Из табл. 2 видно, что погрешность $\gamma_\varphi(M)$ минимальна в средней части шкалы угла φ , при $\varphi = 45^\circ$ $\gamma_\varphi(M) \approx 1.46 \cdot 10^{-3}\%$, и увеличивается по краям шкалы. Максимальное значение этой погрешности равно $2.547 \cdot 10^{-3}\%$.

Аналогичный расчет по формулам (16) и (17) погрешности $\gamma_\varphi(Q)$ показал, что она также минимальна в середине шкалы, где $\gamma_\varphi(Q) \approx 0.57\%$ при $\varphi = 45^\circ$, и принимает максимальное значение $\gamma_\varphi(Q) = 1.16\%$ в начале шкалы при $Q = 100$. Видно, что $\gamma_\varphi(Q)$ существенно больше $\gamma_\varphi(M)$.

Частные погрешности $\gamma_R(M)$ и $\gamma_\varphi(M)$, $\gamma_R(Q)$ и $\gamma_\varphi(Q)$ случайны и независимы, поэтому пределы допускаемых полных основных относительных погрешностей определения M и Q с доверительной вероятностью 0.95 будут

$$\begin{aligned} \gamma(M) &= \sqrt{[\gamma_R(M)]^2 + [\gamma_\varphi(M)]^2} = \\ &= 10^{-4} \cdot \sqrt{1.5^2 + 0.255^2} \approx 0.016\%, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(Q) &= \sqrt{[\gamma_R(Q)]^2 + [\gamma_\varphi(Q)]^2} = \\ &= 10^{-2} \cdot \sqrt{1.2^2 + 1.16^2} \approx 1.67\% \end{aligned}$$

соответственно, с учетом соотношения $\sigma = \omega M/Q$ получаем

$$\begin{aligned} \gamma(\sigma) &= \sqrt{[\gamma(M)]^2 + [\gamma(Q)]^2} = \\ &= \sqrt{0.016^2 + 1.67^2} \approx 1.68\%. \end{aligned}$$

ВЫВОДЫ

В фазовом методе не используются аналоговые сигналы. Во многом благодаря этому метод позволяет сравнительно просто автоматизировать процесс измерения, реализовать инвариантное цифровое измерение активной и реактивной составляющих комплексного сопротивления ВИ магнитно-

связанных катушек и обеспечить достаточную для практики точность. Результаты исследования показывают, что в разработанном микроконтроллерном устройстве погрешности определения активного сопротивления σ и индуктивности M комплексного сопротивления ВИ можно обеспечить не более $\gamma(\sigma)=1.68\%$ и $\gamma(M)=0.016\%$ с доверительной вероятностью 0.95. При этом можно уменьшить погрешности измерения сужением по краям шкалы угла φ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Silsbee F.B.* A study of the inductance of four-terminal resistance standards. London: Forgotten Books Publisher, 2016. 54 p.
2. *Zhang J., Lui W., Pan X. et al.* Design and measurement of the nH level mutual inductor // 19th IMEKO TC-4 Symposium and 17th IWADC Workshop Advances Instrumentation and Sensors Interoperability, 18–19.07.2013. Barcelona, Spain. P. 389–390. URL: <https://www.imeko.org/publications/tc4-2013/IMEKO-TC4-2013-096.pdf>
3. *Veksler A.Z.* Measurement of angle errors of mutual inductance coils by means of an alternating current bridge // Measurement Techniques. 1959. Vol. 2, is. 6. P. 445–447. DOI: 10.1007/BF00975983
4. P5017 магазин комплексной взаимной индуктивности. <https://ross.com.ru/magazin-kompleksnoi-vzaimnoi-induktivnosti-r-5017>
5. *Budovsky I.* Measurement of phase angle errors of precision current shunts in the frequency range from 40 Hz to 200 kHz // IEEE Trans. Instrum. Meas. 2007. Vol. 56, no. 2. P. 284–288. DOI: 10.1109/TIM.2007.891117
6. *Pan X., Zhang J., Ma X., et al.* A Coaxial time constant standard for determination of phase error of current shunts up to 200 kHz // IEEE Trans. Instrum. Meas. 2013. Vol. 62, no. 1. P. 199–204. DOI: 10.1109/TIM.2012.2212595
7. *Нефедов В.И., Сигов А.С., Битюков В.К., Самохина Е.В.* Электрорадиоизмерения. Учебник. М.: ФОРУМ, ИНФРА-М, 2018. 383 с.
8. *Лушин Е.В., Долгов А.Н.* Способы измерения индуктивности // Приволжский научный вестник. 2013. № 12, ч. 2. С. 36–40. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21072153>
9. *Марченко А.Л., Опадчий Ю.Ф.* Электротехника и электроника. Учебник. М.: ИНФРА-М, 2022. 391 с.
10. *Дивин А.Г., Пономарев С.В.* Методы и средства измерений, испытаний и контроля. Учебное пособие. Ч. 1. Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2011. 104 с.
11. *Мамиконян Б.М., Мамиконян Х.Б.* Методы и средства раздельного измерения параметров катушек индуктивности на переменном токе // Вестник НПУА: Электротехника, энергетика. 2014, № 2. С. 9–24. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35061218>
12. AD9833 Programmable Waveform Generator. <https://static.chipdip.ru/lib/691/DOC011691452.pdf>
13. PIC32MX695F512H. Высокопроизводительный 32-разрядный микроконтроллер с интерфейсами USB и Ethernet. http://www.triatron.ru/upload/catalog_photo/elements/pdf/035343.pdf
14. Резисторы постоянные металлофольговые C5-61. <http://amb-lab.narod.ru/References/ES/0004-3-1992/016.pdf>
15. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 248 с.
16. *Орнатский П.П.* Автоматические измерения и приборы. Киев: Вища школа, 1986. 504 с.

Национальный политехнический университет Армении, Гюмрийский филиал, г. Гюмри, Республика Армения

Контакты: *Мамиконян Борис Мамиконович*, bomam@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 08.05.2023

MEASUREMENT OF THE COMPONENTS OF THE COMPLEX RESISTANCE OF MUTUAL INDUCTION

B. M. Mamikonyan, S. A. Ghazaryan

National polytechnic university of Armenia, Gyumri Branch, Gyumri city, Republic of Armenia

A microcontroller device for digital measurement of the components of the complex resistance of mutual induction of magnetically coupled coils has been developed for the case, when due to the effects of "capacitance" and "eddy currents", an "impurity" and a "phase defect" arise in the EMF of mutual induction. An active component appears in the complex resistance of mutual induction. For invariant measurement of the components of this resistance, a phase method was used in combination with a timing separation of the measurement channel. The measuring circuit (MC) is powered by the current of a controlled generator for sinusoidal signals. An informative parameter of the MC output signal is the angle of the phase shift between two voltages. These voltages are supplied to the analog inputs of the programmable microcontroller (MCU). During the measurement, the MCU sets the generator frequency, controls the switching of the measurement channel, measures the phase shift angle between the MC output voltages, and calculates the components of the complex mutual induction resistance according to the given algorithms. The theory of the method, the technique for calculating the parameters of the MC elements, the evaluation of the sensitivity of the conversion, and the analysis of measurement errors are presented.

Keywords: mutual induction, complex resistance, measurement, phase method, phase shift angle, measurement error

Designations

In the text, electrical complex quantities are denoted by Latin letters with a dot above, as, for example, \dot{E} .

INTRODUCTION

Mutual induction (MI) resistance is one of the most important parameters of electrical circuits that must be determined for coil systems used in various fields, including transformers, electrical machines and apparatus, electromagnetic devices of automation and measuring technology, communication technology, and the production and transmission of electricity. In addition to these traditional applications, new ones are emerging. Inductively coupled coils are important nodes in wireless power transmission systems, which have already found applications in consumer electronics, industrial manufacturing, and medical implants and are actively studied for their application for charging electric vehicles. Another growing industry is robotics. Here, we need systems for accurately measuring the movements of mechanisms capable of operating in contaminated environments. These requirements are best met by systems based on mutual inductance sensor. The widespread use of MI makes it necessary to constantly improve the methods and means of measuring its parameters.

RESEARCH TECHNIQUES

In inductively coupled coils, the MI resistance is usually determined by the size and geometry of the windings, the relative position between the primary and secondary windings, and the turns of the windings. At frequencies exceeding $f = 100$ Hz, the effects of "capacitance" and "eddy currents" are enhanced [1–3]. Turn-to-turn capacitances, eddy current losses in winding conductors, leaks, and dielectric losses in insulation lead to the fact that the phase shift angle between EMF \dot{E}_2 induced in the secondary winding, and the current \dot{I}_1 in the primary winding is different from 90° . The simple proportionality of the EMF \dot{E}_2 to frequency and the value of the geometric (low-frequency) inductance M_0 is also violated. Instead of the ideal equation $\dot{E}_2 = j\omega M_0 \dot{I}_1$ the dependency appears

$$\dot{E}_2 = [\sigma + j\omega(M_0 + \Delta M)] \dot{I}_1 = (\sigma + j\omega M) \dot{I}_1, \quad (1)$$

where σ and ΔM are correction terms, called "impurity" and "frequency correction" M_0 at frequency f , respectively. In the complex resistance of the MI $Z_M = \sigma + j\omega M$ the effective mutual inductance $M = M_0 + \Delta M$ increases, and a small angle $\delta = \arctg(\sigma/\omega M) \approx \sigma/\omega M$ represents the phase defect of the MI.

Active σ resistance depends on frequency and some other factors. The theory of the effects of "capacitance" and "eddy currents" is described in most detail in [1]. The theoretical estimate gives an approximately quadratic dependence of the σ on the frequency f . It is shown [1] that if the primary coil must pass a large current, the deviation from the quadrature of the vectors \dot{E}_2 and \dot{I}_1 can become significant: an example is considered in which, even at a relatively low $f = 60$ Hz frequency, the phase defect is 75 min. When ferromagnetic cores are used, the phase defect increases and can reach 10° [4].

In some cases, the MI coil is used to establish a high-precision phase shift between the current and the voltage by 90° , such as in rectangular-coordinate potentiometers, in the standards of high-frequency alternating current power, etc. In [2], an equivalent circuit for replacing coils with inductive coupling is built taking into account all parasitic capacitances, and mathematical dependencies σ and ΔM on these capacitances are obtained. When developing high-frequency power standards, it is necessary to know the phase error of AC shunts [5, 6] very accurately. The phase angle error of high current shunts is calibrated against a shunt with a known phase angle. The high-current shunt resistances are typically at $M\Omega$ level, and the reactance of the shunts, which is generated by the equivalent inductance, is the dominant part at high frequency. The measurements of the phase defect of the mutual inductance at frequencies from 20 to 200 kHz are performed in [2].

AC bridges in balancing mode are widely used for the invariant measurement of the components of complex resistances [7, 8]. To balance the bridge, two of its components must be adjustable and graduated, usually variable reference resistances or capacitances are used [3, 9]. Using the UMPT-2 bridge, the angular errors of the coils of mutual inductance of types KV-1 and KVI-5 were measured ($M = 0.01$ Gn and $M = 0.001$ Gn) in the frequency range from 400 up to 2500 Hz [3].

AC bridges work normally at low frequencies — up to 1000 Hz; during operation at increased frequencies, measurement error increases sharply [10]. Bridge measurement methods have a common drawback: they do not provide an output signal with a single informative parameter for transmission over distance or interfacing with computer equipment in order to automate the measurement process and process measurement results.

ESSENCE OF THE MEASUREMENT METHOD UNDER DEVELOPMENT

As shown in the present study, this drawback of bridge techniques can be eliminated using a phase me-

thod for measuring constituents [11]. The essence of the method is explained in Fig. 1.

Fig. 1. Simplified functional diagram of the meter. 1 — sinusoidal voltage generator with programmable frequency, 2 — microcontroller, 3 — electronic switch, 4 — digital display

Two reference resistors, R1 and an additional resistor R2, are connected in series in the measuring circuit (MC) with the MI primary winding. In the MC, the measured parameters σ and M are converted into the phase shift angle φ between the output voltages u_s and u_N , which are supplied to the analog inputs of the microcontroller (MCU), while the secondary winding of the MI operates in idle mode.

In the first (a) and second (б) positions of the switch, we have, respectively

$$\begin{aligned} \dot{U}_{S1} &= \dot{I}(R_1 + \sigma + j\omega M), \\ \dot{U}_{S2} &= \dot{I}(R_1 + R_2 + \sigma + j\omega M), \end{aligned}$$

and the reference voltage $\dot{U}_N = \dot{I}R_1$, where I is the measuring current. Therefore, we have

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \omega M / (\sigma + R_1), \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \omega M / (\sigma + R_1 + R_2), \end{aligned} \tag{2}$$

after transformation of which we obtain

$$M = \frac{R_2}{\omega(\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1)}, \tag{3}$$

$$\sigma = \frac{(R_1 + R_2)\operatorname{ctg} \varphi_1 - R_1 \operatorname{ctg} \varphi_2}{\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1}. \tag{4}$$

It can be seen that a mutually independent (invariant) determination of M and σ is provided, while it is necessary to measure only the angle φ in two positions of the switch, and the measurement result does not depend on the stability of the measuring current.

The experimental sample of the meter uses the AD9833 generator microcircuit [12] and an MCU of PIC32MX695F512H type [13]. The MCU analog inputs are equipped with comparators, where the φ angle is converted into the τ time interval, which is measured by the discrete counting method in the MCU. At each measurement, the MCU sets the required generator ω frequency, controls the switch position, measures φ_1 and φ_2 angles, calculates M and σ values according to algorithms (3) and (4) and outputs measurement results to a digital display.

SCALE RANGE SELECTION AND SENSITIVITY ANALYSIS

The analysis shows that due to the features of tangent and cotangent functions, the sensitivity of the conversion $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ is maximum in the middle of the angle scale $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ and drops along the edges of this range, so the φ angle scale is selected in the range $15^\circ \leq \varphi \leq 75^\circ$, which means the selection of the corresponding resistances R_1 and R_2 taking into account the measurement ranges M and σ . Since $\varphi_1 > \varphi_2$, the upper limit of the scale is set by the resistance value R_1 , and the lower limit is set by the resistance value R_2 .

We calculate these resistances for the case of measuring current frequency $f = 1000$ Hz and measurement ranges $\sigma = 1-10 \Omega$, $\omega M = 100-1000 \Omega$. Eliminating the sum $(\sigma + R_1)$ from two expressions (2), we obtain

$$R_2 = \omega(M_{\min} \cdot \text{ctg} \varphi_{2\min} - M_{\max} \cdot \text{ctg} \varphi_{1\max}).$$

Taking into account the values $\text{ctg} 15^\circ = 3.732$ and $\text{ctg} 75^\circ = 0.268$, we get for the scale M the value of $R_2 \approx 105 \Omega$, as well as $\sigma + R_1 = 1000 / 3.732 \approx 268 \Omega$, $\sigma + R_1 + R_2 = 100 / 0.268 \approx 373 \Omega$. With these values, we determine angles $\varphi_{1\min}$ and $\varphi_{2\max}$:

$$\text{tg} \varphi_{1\min} = \frac{\omega M_{\min}}{\sigma + R_1} = \frac{100}{268} \approx 0.373, \quad \varphi_{1\min} \approx 20.45^\circ;$$

$$\text{tg} \varphi_{2\max} = \frac{\omega M_{\max}}{\sigma + R_1 + R_2} = \frac{1000}{373} \approx 2.681, \quad \varphi_{2\max} = 69.55^\circ.$$

Based on the results of the conversion sensitivity calculation, a dependence curve was built $\Delta\varphi = f(\varphi)$ in Fig. 2.

Fig. 2. Plot of transformation sensitivity $\Delta\varphi = f(\varphi)$ along the angle φ scale

To select the σ scale, note that as the σ increases, the φ angle decreases, as seen in (2). Therefore, it is advisable to measure the Q-factor of the MI secondary winding $Q = \omega M / \sigma$, instead of σ , since, having the values ωM and Q , the MCU will calculate the σ values.

It follows from (3) and (4) that

$$Q = \frac{R_2}{(R_1 + R_2) \text{ctg} \varphi_1 - R_1 \text{ctg} \varphi_2}, \quad (5)$$

and the measurement range Q determined by the measurement ranges ωM and σ is $Q = 100-1000$. We present the formulae (2) as:

$$\text{tg} \varphi_1 = \frac{Q}{1 + R_1 / \sigma}, \quad (6)$$

$$\text{tg} \varphi_2 = \frac{Q}{1 + (R_1 + R_2) / \sigma}. \quad (7)$$

For the Q scale, it is advisable to maintain the resistance value $R_2 = 105 \Omega$, which sets the conversion sensitivity. For the scale mark $\varphi_{1\max}$ from (6) we determine

$$1 + R_1 / \sigma = Q_{\max} / \text{tg} \varphi_{1\max} \quad (8)$$

and substitute into formula (7) presented for the initial scale mark:

$$\text{tg} \varphi_{2\min} = \frac{Q_{\min}}{Q_{\max} / \text{tg} \varphi_{1\max} + R_2 / \sigma},$$

then we find the relation

$$R_2 / \sigma = Q_{\min} / \text{tg} \varphi_{2\min} - Q_{\max} / \text{tg} \varphi_{1\max} \approx 105.$$

Therefore, $\sigma = R_2 / 105 = 1.0$ for the whole scale, taking this into account we determine (8) $R_1 = 267 \Omega$. Thus, for M and Q , we get a single φ angle scale.

STUDY OF MEASUREMENT ERRORS

A theoretical estimate of the errors in determining M and Q by formulas (3) and (5) was performed. The instability of the ω frequency does not cause an error in (3) since when calculating the angle φ according to the formula $\varphi = (\tau / T) \cdot 360^\circ$ MCU also measures the period $T = 1 / f$ of the measuring current. Therefore, the relative error of determination M will be

$$\begin{aligned} \gamma(M) &= \frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta(\text{ctg} \varphi_1) - \Delta(\text{ctg} \varphi_2)}{\text{ctg} \varphi_2 - \text{ctg} \varphi_1} = \\ &= \gamma_R(M) + \gamma_\varphi(M), \end{aligned} \quad (9)$$

where partial errors are indicated:

$$\gamma_R(M) = \Delta R_2 / R_2 = \gamma(R_2), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi(M) &= \frac{\Delta(\operatorname{ctg} \varphi_1) - \Delta(\operatorname{ctg} \varphi_2)}{\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi_1 \cdot \gamma(\operatorname{ctg} \varphi_1) - \operatorname{ctg} \varphi_2 \cdot \gamma(\operatorname{ctg} \varphi_2)}{\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Similarly, we get from the expression (5):

$$\gamma(Q) = \gamma_R(Q) + \gamma_\varphi(Q),$$

$$\begin{aligned} \gamma_R(Q) &= \frac{\Delta_R(Q)}{Q} = \\ &= \frac{R_1(\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1)[\gamma(R_1) - \gamma(R_2)]}{(R_1 + R_2)\operatorname{ctg} \varphi_1 - R_1 \operatorname{ctg} \varphi_2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi(Q) &= \frac{\Delta_\varphi(Q)}{Q} = \\ &= \frac{R_1 \cdot \operatorname{ctg} \varphi_2 \cdot \gamma(\operatorname{ctg} \varphi_2) - (R_1 + R_2)\operatorname{ctg} \varphi_1 \cdot \gamma(\operatorname{ctg} \varphi_1)}{(R_1 + R_2)\operatorname{ctg} \varphi_1 - R_1 \operatorname{ctg} \varphi_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Analysis shows that the phase method of measurement of VI parameters is excessively critical to the resistance stability of resistors R_1 and R_2 , therefore the most high-precision metal-fiber resistors of the S5-61 type are selected [14]. Taking into account the tolerance values $\pm 0.005\%$ from the rated resistance R_N and TCS $\alpha_t = \pm 10 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ absolute change in resistor resistance under normal operating conditions (at $20 \pm 5^\circ \text{C}$) will be

$$\Delta R_\Sigma = 0.00005 R_N + \Delta R_t = \pm 1.5 \cdot 10^{-4} R_N,$$

where $\Delta R_t = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot R_N = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10 R_N = \pm 10^{-4} R_N$ — temperature change of resistor resistance. Therefore, the partial relative measurement error M from the resistance change of the resistor R_2 considering (10) will be

$$\gamma_R(M) = \gamma(R) = \Delta R_\Sigma / R_N = 1.5 \cdot 10^{-4}.$$

It can be considered that the errors of resistors R_1 and R_2 are uncorrelated random variables with normal distribution laws, therefore for RMS deviations of their resistances $\sigma[\gamma(R)]$ can be taken with confidence probability 0.95 [15]

$$\begin{aligned} \sigma[\gamma(R_1)] &= \sigma[\gamma(R_2)] = \sigma[\gamma(R)] = 0.5 \Delta R_\Sigma = \\ &= 0.75 \cdot 10^{-4}, \end{aligned}$$

taking into account what we get

$$\begin{aligned} \sigma[\gamma(R_1) - \gamma(R_2)] &= \sqrt{2\sigma^2[\gamma(R)]} = \\ &= 1.41\sigma[\gamma(R)] = 1.41 \cdot 0.75 \cdot 10^{-4} \approx 1.06 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Substituting in (12)

$$[\gamma(R_1) - \gamma(R_2)] = 2 \cdot \sigma[\gamma(R_1) - \gamma(R_2)] \approx 2.1 \cdot 10^{-4}$$

and resistance values R_1 and R_2 , we obtain

$$\gamma_R(Q) = \frac{2.1 \cdot 10^{-4} \cdot (\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1)}{1.4 \cdot \operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_2}. \quad (14)$$

Tab. 1 shows the calculation results $\gamma_R(Q)$ according to formula (14), where the designation is taken $A = \operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1$.

<p>Tab. 1. Design error values $\gamma_R(Q)$ at $R_1 = 267 \Omega$, $R_2 = 105 \Omega$</p>
--

Calculations show that the partial error of determining Q from the change in resistors R_1 and R_2 with a confidence probability of 0.95 does not exceed the value $\gamma_R(Q) = 1.2\%$. To reduce this error, you can determine the exact values of their resistances before installing the resistors.

Partial errors $\gamma_\varphi(M)$ as per formula (11) and $\gamma_\varphi(Q)$ as per formula (13) depend on accuracy of measurement of phase angles of φ_1 and φ_2 . The relative error of φ phase shift measurement has two components: error $\gamma(\tau)$ of φ angle conversion to time interval τ and error $\gamma(\varphi) = \Delta\varphi/\varphi$ of pulse signal duration measurement — $\gamma_\Sigma(\varphi) = \gamma(\tau) + \gamma(\varphi)$. The error $\gamma(\tau)$ depends on the zero displacement voltages of the MK input comparators; practically it can be eliminated using a bipolar measurement method, in which the τ is determined from four moments of transition through zero values of the sinusoid in both directions (during one period of input voltage two time intervals of τ are obtained) [16]. Therefore, the relative error $\operatorname{ctg} \varphi$ of determination will depend only on the accuracy of the phase shift measurement φ and can be calculated from the expression

$$\begin{aligned} \gamma(\operatorname{ctg} \varphi) &= \frac{\Delta(\operatorname{ctg} \varphi)}{\operatorname{ctg} \varphi} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi} \cdot \frac{\partial(\operatorname{ctg} \varphi)}{\partial \varphi} \cdot \Delta \varphi = \\ &= -\frac{\varphi}{\operatorname{ctg} \varphi \cdot \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\varphi} = -\frac{2\varphi \cdot \gamma(\varphi)}{\sin 2\varphi}, \end{aligned}$$

or

$$\gamma(\text{ctg } \varphi) = -\frac{2\pi\varphi \cdot \gamma(\varphi)}{180 \cdot \sin 2\varphi} = -\frac{0.035\varphi \cdot \gamma(\varphi)}{\sin 2\varphi} = \beta \cdot \gamma(\varphi),$$

where $\beta = -\frac{0.035\varphi}{\sin 2\varphi}$, and the φ angle is expressed in radians. Therefore,

$$\gamma(\text{ctg } \varphi_1) = \beta_1 \cdot \gamma(\varphi_1), \quad \gamma(\text{ctg } \varphi_2) = \beta_2 \cdot \gamma(\varphi_2).$$

The errors $\gamma(\text{ctg } \varphi_1)$ and $\gamma(\text{ctg } \varphi_2)$ are random and independent, so with a confidence probability of 0.95 it can be assumed $\gamma(\text{ctg } \varphi_1) = 2\sigma_{\gamma(\text{ctg } \varphi_1)}$, $\gamma(\text{ctg } \varphi_2) = 2\sigma_{\gamma(\text{ctg } \varphi_2)}$, that therefore, taking into account the expression (11), we get:

$$\gamma_\varphi(M) = \frac{\sqrt{\beta_1^2 \cdot \gamma^2(\varphi_1) \cdot \text{ctg}^2 \varphi_1 + \beta_2^2 \cdot \gamma^2(\varphi_2) \cdot \text{ctg}^2 \varphi_2}}{\text{ctg } \varphi_2 - \text{ctg } \varphi_1}.$$

Since the angles of φ_1 and φ_2 are measured by the same hardware almost simultaneously, it can be assumed that $\gamma(\varphi_1) \approx \gamma(\varphi_2) = \gamma(\varphi)$, therefore,

$$\gamma_\varphi(M) = \frac{\gamma(\varphi) \sqrt{\beta_1^2 \cdot \text{ctg}^2 \varphi_1 + \beta_2^2 \cdot \text{ctg}^2 \varphi_2}}{\text{ctg } \varphi_2 - \text{ctg } \varphi_1}.$$

Taking into account the expression β , we get:

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi(M) &= \\ &= \frac{0.0175 \cdot \gamma(\varphi)}{\text{ctg } \varphi_2 - \text{ctg } \varphi_1} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varphi_1}{\sin^2 \varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2}{\sin^2 \varphi_2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

By performing similar actions with the expression (13), we obtain:

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi(Q) &= \frac{0.0175 \cdot \gamma(\varphi)}{(1 + R_2/R_1) \text{ctg } \varphi_1 - \text{ctg } \varphi_2} \times \\ &\times \sqrt{\left(\frac{\varphi_2}{\sin^2 \varphi_2}\right)^2 + (1 + R_2/R_1)^2 \cdot \left(\frac{\varphi_1}{\sin^2 \varphi_1}\right)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

To calculate errors from expressions (15) and (16), you need to find a value $\gamma(\varphi)$. The measurement of φ phase shift is performed in MC by formula $\varphi = (\tau/T) \cdot 360^\circ$ by filling time intervals τ and T with pulses of the reference frequency $f_0 = 80$ MHz of the clock generator. The timer count will be

$$\varphi = \frac{nf_0}{Nf_0} \cdot 360^\circ = \frac{n}{N} \cdot 360^\circ,$$

where n and N are the number of pulses received by the timer-counter during τ and T , respectively.

The absolute error of angle measurement will φ be

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Delta n + \frac{\partial\varphi}{\partial N} \Delta N = \left(\frac{\Delta n}{N} - \frac{n}{N^2} \Delta N\right) 360^\circ,$$

and relative error:

$$\gamma(\varphi) = \frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta n}{n} - \frac{\Delta N}{N}.$$

Error $\gamma(\varphi)$ is determined by random error of discreteness, i.e. possibility of loss in numbers n and N by one counting pulse. The worst case occurs when $\Delta n = 1$, $\Delta N = -1$:

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{N} = \frac{T_0}{nT_0} + \frac{T_0}{NT_0} = T_0 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T}\right) = \\ &= \frac{f}{f_0} \left(1 + \frac{360^\circ}{\varphi}\right). \end{aligned}$$

At the available values of $f = 1.0$ kHz, $f_0 = 80$ MHz we obtain

$$\gamma(\varphi) = \pm 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot \left(1 + \frac{360^\circ}{\varphi}\right). \quad (17)$$

Tab. 2 shows the error $\gamma_\varphi(M)$ calculation results calculated according to formulas (15) and (17), where designations are taken

$$A = \text{ctg } \varphi_2 - \text{ctg } \varphi_1,$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{\varphi_1}{\sin^2 \varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2}{\sin^2 \varphi_2}\right)^2},$$

and in formula (17) the values $\varphi = \varphi_2$ are substituted because $\varphi_2 < \varphi_1$, we are always interested in the limit of the permissible measurement error. Table 2 shows that the error $\gamma_\varphi(M)$ is minimal in the middle part of the scale of the angle φ . $\gamma_\varphi(M) \approx 1.46 \cdot 10^{-3}\%$ at $\varphi = 45^\circ$ and increases along the edges of the scale. The maximum value of this error is $2.547 \cdot 10^{-3}\%$.

Tab. 2. Design error values $\gamma_\varphi(M)$ at $R_1 = 267 \Omega$, $R_2 = 105 \Omega$, $f = 1.0$ kHz, $f_0 = 80$ MHz

A similar calculation according to formulas (16) and (17) of error $\gamma_\varphi(Q)$ showed that it is also minimal in the middle of the scale, where $\gamma_\varphi(Q) \approx 0.57\%$ at $\varphi = 45^\circ$, and takes the maximum value $\gamma_\varphi(Q) = 1.16\%$ at the beginning of the scale at $Q = 100$. It can be seen that $\gamma_\varphi(Q)$ significantly more $\gamma_\varphi(M)$.

Partial errors $\gamma_R(M)$ and $\gamma_\varphi(M)$, $\gamma_R(Q)$ and $\gamma_\varphi(Q)$ are random and independent, so the limits of the allowed total basic relative errors of determining M and Q with a confidence probability of 0.95 will be

$$\begin{aligned} \gamma(M) &= \sqrt{[\gamma_R(M)]^2 + [\gamma_\varphi(M)]^2} = \\ &= 10^{-4} \cdot \sqrt{1.5^2 + 0.255^2} \approx 0.016\%, \\ \gamma(Q) &= \sqrt{[\gamma_R(Q)]^2 + [\gamma_\varphi(Q)]^2} = \\ &= 10^{-2} \cdot \sqrt{1.2^2 + 1.16^2} \approx 1.67\% \end{aligned}$$

accordingly, taking into account the ratio $\sigma = \omega M/Q$ we obtain

$$\begin{aligned} \gamma(\sigma) &= \sqrt{[\gamma(M)]^2 + [\gamma(Q)]^2} = \\ &= \sqrt{0.016^2 + 1.67^2} \approx 1.68\%. \end{aligned}$$

CONCLUSIONS

The phase method does not use analog signals. Largely due to this, the method makes it relatively easy to automate the measurement process, implement an invariant digital measurement of the active and reactive components of the complex resistance of the VI magnetically coupled coils and provide sufficient accuracy for practice. The results of the study show that in the developed microcontroller device, errors in determining the active resistance of the σ and inductance M of the complex resistance of the VI can be provided no more than $\gamma(\sigma) = 1.68\%$ and $\gamma(M) = 0.016\%$ with a confidence probability of 0.95. It is possible to reduce measurement errors by narrowing along the edges of the φ angle scale.

REFERENCES

1. Silsbee F.B. *A study of the inductance of four-terminal resistance standards*. London, Forgotten Books Publisher, 2016. 54 p.
2. Zhang J., Lui W., Pan X. et al. Design and measurement of the nH level mutual inductor. *19th IMEKO TC-4 Symposium and 17th IWADC Workshop Advances Instrumentation and Sensors Interoperability*, 18–19.07.2013, Bar-

- celona, Spain, pp. 389–390. URL: <https://www.imeko.org/publications/tc4-2013/IMEKO-TC4-2013-096.pdf>
3. Veksler A.Z. Measurement of angle errors of mutual inductance coils by means of an alternating current bridge. *Measurement Techniques*, 1959, vol. 2, is. 6, pp. 445–447. DOI: 10.1007/BF00975983
4. *P5017 magazin kompleksnoy vzaimnoy induktivnosti* [P517 complex mutual inductance magazine]. <https://ross.com.ru/magazin-kompleksnoi-vzaimnoi-induktivnosti-r-5017>
5. Budovsky I. Measurement of phase angle errors of precision current shunts in the frequency range from 40 Hz to 200 kHz. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 2007, vol. 56, no. 2, pp. 284–288. DOI: 10.1109/TIM.2007.891117
6. Pan X., Zhang J., Ma X., et al. A Coaxial time constant standard for determination of phase error of current shunts up to 200 kHz. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 2013, vol. 62, no. 1, pp. 199–204. DOI: 10.1109/TIM.2012.2212595
7. Nefedov V.I., Sigov A.S., Bityukov V.K., Samochina E.V. *Elektroradioizmereniya. Uchebnik* [Electroradio-measurements. Textbook]. Moscow, FORUM, INFRA-M Publ., 2018. 383 p. (In Russ.).
8. Lushin E.V., Dolgov A.N. [Methods of inductance measurement]. *Privolzhskiy nauchnyy vestnik* [Volga Scientific Bulletin Publ.], 2013, no. 12, part. 2, pp. 36–40. (In Russ.). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21072153>
9. Marchenko A.L., Opadchiy Yu.F. *Elektrotehnika i elektronika. Uchebnik* [Electrical equipment and electronics. Textbook], Moscow, INFRA-M Publ., 2022. 391 p. (In Russ.).
10. Divin, A.G., Ponomarev S.V. *Metody i sredstva izmereniy, ispytaniy i kontrolya. Uchebnoe posobie. Ch. 1.* [Methods and means of measurement, testing and control. Tutorial. PART 1]. Tambov, Izd-vo GOU VPO TGTU Publ., 2011. 104 p. (In Russ.).
11. Mamikonyan B.M., Mamikonyan Ch.B. [Methods and means of separate measurement of parameters of AC inductors]. *Vestnik NPUA: Elektrotehnika, energetika* [NPUA Bulletin: Electrical Engineering, Power Engineering], 2014, no. 2, pp. 9–24. (In Russ.). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35061218>
12. *AD9833 Programmable Waveform Generator*. <https://static.chipdip.ru/lib/691/DOC011691452.pdf>
13. *PIC32MX695F512H. Vysokoproizvoditel'nyy 32-razryadnyy mikrokontrol'ler s interfeysami USB i Ethernet* [PIC32MX695F512H. High-performance 32-bit microcontroller with USB interfaces и Ethernet]. (In Russ.). http://www.triatron.ru/upload/catalog_photo/elements/pdf/035343.pdf
14. *Rezistory postoyannye metallofol'govye C5-61* [Permanent metal-fiber resistors C5-61]. (In Russ.). <http://amb-lab.narod.ru/References/ES/0004-3-1992/016.pdf>
15. Novizkiy P.V., Zograf I.A. *Ozenka pogreshnostey rezul'tatov izmereniy* [Evaluation of measurement results errors]. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1985. 248 p.
16. Ornatskiy P.P. *Avtomaticheskie izmereniya i pribory* [Automatic Measurements and Instruments]. Kiev, Vischa shkola Publ., 1986. 504 p.