ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2021, том 31, № 1, с. 107–123

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 517.956.255; 621.319.7

© С. И. Шевченко, 2020

О РАСЧЕТЕ АБЕРРАЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЗЕРКАЛА

Для цилиндрического зеркала выведены аберрационные коэффициенты до четвертого порядка. Разработан метод вычисления аберрационных коэффициентов по результатам расчета нескольких траекторий. Аналитический и численный методы вычисления аберрационных коэффициентов дают результаты, совпадающие с высокой точностью.

Кл. сл.: энергоанализатор, цилиндрическое зеркало, кольцо эмиссии, выходная диафрагма

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением работ [1–3], посвященных изучению свойств электростатического энергоанализатора типа цилиндрическое зеркало (ЦЗ) (цилиндрический конденсатор) при учете заряженных частиц (в нашем случае это электроны), имеющих азимутальную компоненту скорости.

Ранее подобная тематика рассматривалась в ряде работ [4–7]. В этих работах изучались траектории электронов в цилиндрической системе координат. Наиболее близкой к представленной статье является работа [4]. Нами использовались ее основные обозначения.

Можно выделить три области прохождения траекторий: первое пролетное (дрейфовое) пространство, дисперсионное пространство, второе пролетное пространство. Основную трудность представляет вычисление траекторий в дисперсионном пространстве.

Уравнение движения заряженных частиц (электронов) в дисперсионном пространстве, записанное в цилиндрической системе координат, допускает упрощение, в результате которого получается зависимость времени от радиальной координаты в виде интеграла (в обозначениях работы [3])

$$T = \frac{2}{V_0} \times$$

$$\times \int_{r_1}^{r_m} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}}, \qquad (1)$$

где r_m — величина наибольшего удаления электронов от внутреннего цилиндра, являющаяся корнем функции, стоящей в (1) под знаком радикала

$$\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right) = 0. \qquad (2)$$

Начальные условия для уравнений движения: r_0 — радиус точки вылета электронов из источника; V_0 — скорость электронов до входа в дисперсионное пространство; (ϑ, φ) — углы в локальной сферической системе координат, привязанной к точке эмиссии r_0; ϑ — угол между нормалью к плоскости XY (осью Z) и вектором скорости; φ — азимутальный угол, отсчитываемый вокруг точки r_0, между осью Y и проекцией вектора скорости на плоскость XY (V_{xy}); ось Y локальной сферической системы координат совпадает с прямой линией, проведенной из точки пересечения оси Z с плоскостью XY до точки вылета электронов из источника; $k = -(E/U)\ln(r_2/r_1)$; E — кинетическая энергия электронов до влета в дисперсное пространство; r_1, r_2 — радиусы внутреннего и внешнего электродов ЦЗ; U — потенциал на внешнем электроде ЦЗ; на внутреннем электроде ЦЗ установлен потенциал, равный нулю.

Решение уравнения движения в его преобразованном виде (1) требует решения двух задач: нахождение корня уравнения (2) и собственно решение (интегрирование) уравнения (1). В [3] приведено выражение для наибольшего удаления r_m от внутреннего цилиндра:

$$r_m = r_{m0} \times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{LambertW}\left(-2\sin^2\vartheta\cdot\sin^2\varphi\cdot\frac{r_0^2}{r_{m0}^2}\right)\right\}, \quad (3)$$

где $r_{m0}=r_1\cdot e^{k\cdot\sin^2\vartheta}$ — наибольшее удаление электронов от внутреннего цилиндра при $\varphi=0$, т.е. без азимутальной компоненты скорости, $\mathrm{LambertW}(x)$ — функция Ламберта [8].

Уравнение движения может быть решено разложением редуцированного к виду (1) уравнения движения в ряд Тэйлора. В работе [4] расчет правой части (1) был выполнен с точностью до малой величины порядка $\mathrm{tg}^2(\gamma)$, где γ — угол, пропорциональный азимутальному углу. С одной стороны, в этом случае нельзя требовать изотропности начального распределения электронов по этому углу. С другой стороны, остается вопрос, достаточно ли разложение до членов порядка $\mathrm{tg}^2(\gamma)$ для получения приличных по точности результатов. Результаты работы [3] показывают, что в ряде случаев этого приближения может быть недостаточно.

В работе [3] проведено разложение правой части уравнения (1) в ряд Маклорена по переменной $x=\sin^2(\varphi)$ до четвертого порядка. Показано, что вплоть до величины угла φ в 20° этот подход дает решение уравнения (1) с весьма хорошей точностью. При этом в каждой точке эмиссии рассматривалась (местная) сферическая система координат (СК). Поэтому для этого случая изотропное распределение эмитируемых электронов является обоснованным.

Можно выражение в правой части (1) разложить в двойной ряд (Тэйлора по углу ϑ и Маклорена по углу φ). Коэффициенты в этом ряду являются аберрационными коэффициентами (АК). До настоящего времени считалось невозможным аналитически получить аберрационные коэффициенты для цилиндрического зеркала. Хотя в нескольких работах приведены аналитические выражения для некоторых АК. Так, в [9] приведены выражения для АК по углу ϑ до второго порядка и приведено численное выражение для АК по углу ϑ третьего порядка. В [4] рассмотрен более общий случай с азимутальными траекториями в приближении малости некоторого угла, который при стремлении к нулю сходится к углу φ.

Все вычисления в данной работе проведены для ЦЗ с радиусом внутреннего цилиндра $r_1=2$ см, радиусом внешнего цилиндра $r_2=5$ см, на внутреннем цилиндре установлено напряжение, равное нулю, на внешнем цилиндре — $U=-100$ В.

Ниже все расстояния будем выражать в мм.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВКЛАДА В АБЕРРАЦИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТ ДРЕЙФОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В каждом из дрейфовых пространств на заряженную частицу не действует никакая сила, поэтому ее движение является прямолинейным. Описание такого движения является простым и подробно рассмотрено в [3]. Проекции траектории электрона в дрейфовых пространствах на ось Z приведены в [3].

Проекция на ось Z траектории электрона в первом дрейфовом пространстве:

$$L_1^{(P)}=\left(\sqrt{r_1^2-r_0^2\cdot\sin^2(\varphi)}-r_0\cdot\cos(\varphi)\right)\Big/\mathrm{tg}(\vartheta).$$

Проекция на ось Z траектории электрона во втором дрейфовом пространстве:

$$L_2^{(P)}=\left(\sqrt{r_1^2-r_0^2\cdot\sin^2(\varphi)}-r_0\cdot\cos(\varphi)-\right.$$
$$\left.-\sqrt{P_y^2-r_0^2\cdot\sin^2(\varphi)}\right)\Big/\mathrm{tg}(\vartheta),$$

где P_y — радиус цилиндра, содержащего выходную диафрагму.

Суммарный вклад в проекцию траектории электрона на ось Z от обоих дрейфовых пространств:

$$L^{(P)}=L_1^{(P)}+L_2^{(P)}=\left(2\cdot\sqrt{r_1^2-r_0^2\cdot\sin^2(\varphi)}-\right.$$
$$\left.-r_0\cdot\cos(\varphi)-\sqrt{P_y^2-r_0^2\cdot\sin^2(\varphi)}\right)\Big/\mathrm{tg}(\vartheta).$$

Введем обозначения $s=\sin(\vartheta_0)$, $c=\cos(\vartheta_0)$.

Суммарный вклад в проекцию траектории электрона на ось Z от обоих дрейфовых пространств будем искать в виде разложения в ряд

$$L^{(P)}=$$
$$=A_{0,0}^{(P)}+A_{1,0}^{(P)}\cdot\Delta\varphi+A_{0,1}^{(P)}\cdot\Delta\vartheta+A_{1,1}^{(P)}\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta\vartheta+\ldots \quad (4)$$

Член разложения правой части выражения (1) порядка (i_φ, j_ϑ) (с точностью до константы этот член равен производной этого порядка) обозначен как $A_{i,j}^{(P)}$.

$$A_{0,0}^{(P)}=(2\cdot r_1-r_0-P_y)\cdot c/s.$$

$$A_{2,0}^{(P)}=$$
$$=-r_0\cdot(2\cdot r_0\cdot P_y-r_0\cdot r_1-r_1\cdot P_y)\cdot c\big/(2\cdot r_1\cdot P_y\cdot s).$$

$$A_{2,1}^{(P)}=r_0\cdot(2\cdot r_0\cdot P_y-r_0\cdot r_1-r_1\cdot P_y)/(2\cdot s^2\cdot r_1\cdot P_y).$$

$A_{2,2}^{(P)} =$
$= -r_0 \cdot (2 \cdot r_0 \cdot P_y - r_0 \cdot r_1 - r_1 \cdot P_y) \cdot c \big/ (2 \cdot s^3 \cdot r_1 \cdot P_y).$
$A_{4,0}^{(P)} = -r_0 \cdot (6 \cdot P_y^3 \cdot r_0^3 - 8 \cdot P_y^3 \cdot r_0 \cdot r_1^2 +$
$+ 4 \cdot P_y^2 \cdot r_0 \cdot r_1^3 - 3 \cdot r_0^3 \cdot r_1^3 + r_1^3 \cdot P_y^3) \cdot c \big/ (24 \cdot s \cdot r_1^3 \cdot P_y^3).$

$A_{0,1}^{(P)} = -(2 \cdot r_1 - P_y - r_0) / s^2.$

$A_{0,2}^{(P)} = (2 \cdot r_1 - r_0 - P_y) \cdot c / s^3.$

$A_{0,3}^{(P)} = -(2 \cdot r_1 - P_y - r_0) \cdot (1 + 2 \cdot c^2) / (3 \cdot s^4).$

$A_{0,4}^{(P)} = c \cdot (2 \cdot r_1 - P_y - r_0) \cdot (2 + c^2) / (3 \cdot s^5).$

Отметим, что в силу того, что разложение правой части выражения (1) по переменной φ реализуется в окрестности точки $\varphi_0 = 0$, по отношению к которой $L^{(P)}$ симметрична, все нечетные по переменной φ вклады в АК равны нулю.

ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ ВКЛАДА В АБЕРРАЦИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТ ДИСПЕРСИОННОГО ПРОСТРАНСТВА

В основе метода лежит возможность вычислять значения $L^{(D)}$ проекции траектории электрона в дисперсионном пространстве на ось Z (см. работу [3]). Фиксируем некоторое значение угла $\vartheta = \vartheta_0$, для угла φ_0 выбираем $2 \cdot N_\varphi + 1$ равноотстоящих значений $\varphi_i = \varphi_0 + i \cdot \Delta\varphi$, $i \in (-N_\varphi, N_\varphi)$, $\Delta\varphi = 1°$ и вычисляем на множестве φ_i значения $L_i^{(D)}$. Далее строим интерполяционный полином по переменной φ в окрестности точки φ_0, проходящий через эти точки:

$$L^{(D)}(\varphi, \vartheta_0) = \sum_{n=0}^{N_n} A_{n,0} \cdot (\varphi - \varphi_0)^n .$$

Коэффициенты этого полинома равны вкладу в соответствующие аберрационные коэффициенты $A_{n,0}$ от дисперсионного пространства в окрестности угла φ_0 и при $\vartheta = \vartheta_0$.

Аналогично проводим вычисление проекции траекторий электрона для фиксированного угла $\varphi = \varphi_0$ и $2 \cdot N_\vartheta + 1$ равноотстоящих значений угла $\vartheta_j = \vartheta_0 + j \cdot \Delta\vartheta$, $\Delta\vartheta = 1°$. Строим интерполяционный полином, проходящий через все точки $L^{(D)}(\varphi_0, \vartheta_j)$:

$$L^{(D)}(\varphi_0, \vartheta) = \sum_{m=0}^{N_\vartheta} A_{0,m} \cdot (\vartheta - \vartheta_0)^m .$$

И получаем значения вклада в соответствующие аберрационные коэффициенты $A_{0,m}$ от дисперсионного пространства в окрестности угла ϑ_0 и при $\varphi = \varphi_0$.

Несколько более сложно обстоит ситуация с вычислением "смешанных" аберрационных коэффициентов (вычисление смешанных производных). Для этого вычисляем величину $L^{(D)}$ на прямоугольном массиве точек $(i_\varphi, j_\vartheta) = (-N_\varphi \div N_\varphi) \times (-N_\vartheta \div N_\vartheta)$, равноотстоящих по углам φ и ϑ соответственно, $\varphi_i = \varphi_0 + i \cdot \Delta\varphi$, $\vartheta_j = \vartheta_0 + j \cdot \Delta\vartheta$, $\Delta\varphi = 1°$, $\Delta\vartheta = 1°$.

Нам необходимо вычислить $A_{n,m} = \dfrac{1}{n! \cdot m!} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^{n \cdot m} L^{(D)}(\varphi, \vartheta)}{\mathrm{d}\varphi^n \cdot \mathrm{d}\vartheta^m}$. Т.к. частную производную от нескольких переменных можно вычислять последовательным дифференцированием в произвольном порядке, то справедливо равенство

$$A_{n,m} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\varphi^n} \left(\frac{1}{m!} \frac{\mathrm{d}^m L^{(D)}(\varphi, \vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta^m} \right) =$$
$$= \frac{1}{m!} \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\vartheta^m} \left(\frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n L^{(D)}(\varphi, \vartheta)}{\mathrm{d}\varphi^n} \right).$$

Поэтому для вычисления АК порядка $(n \cdot m)$ можно сперва для всех возможных углов φ_n вычислить производную $\dfrac{\mathrm{d}^m L^{(D)}(\varphi_n, \vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta^m}$. Т.е. для каждого $\varphi = \varphi_n$ строим интерполяционный полином в окрестности точки ϑ_0, коэффициент которого с номером n с точностью до $\dfrac{1}{m!}$ равен этой производной. Далее для вычисления производной от полученной величины по переменной φ используем ранее описанную методику. Точно такое же действие можно проделать, поменяв порядок нахождения производных.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ НАХОЖДЕНИЕ ВКЛАДА В АБЕРРАЦИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТ ДИСПЕРСИОННОГО ПРОСТРАНСТВА

Основную трудность представляет вычисление вклада в аберрационные коэффициенты от дисперсионного пространства.

Проводим разложение правой части формулы (1) в ряд Тэйлора по углу ϑ и Маклорена по углу φ и выделяем коэффициенты этого разложения. Эти коэффициенты и будут искомыми АК. Ниже будем использовать обозначения:

$$L^{(D)} =$$
$$= A_{0,0}^{(D)} + A_{1,0}^{(D)} \cdot \Delta\varphi + A_{0,1}^{(D)} \cdot \Delta\vartheta + A_{1,1}^{(D)} \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\vartheta + \ldots, \quad (5)$$

где $L^{(D)}$ определено выше.

Для члена $A_{0,0}^{(D)}$:

$$A_{0,0}^{(D)} = 2 \cdot \cos(\vartheta_0) \cdot \int_{r_1}^{r_{m1}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\vartheta_0) - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}} \mathrm{d}r.$$

Проведя в интеграле замену переменной $y^2 = k\sin^2(\vartheta_0) - \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$, легко получить

$$A_{0,0}^{(D)} = 2\sqrt{k} \cdot \cos(\vartheta_0) \cdot r_{m0} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(p),$$

где $p = k \cdot \sin^2(\vartheta_0)$, $r_{m0} = r_1 \cdot e^{k \cdot \sin^2(\vartheta_0)}$.

Это выражение практически совпадает с тем, что получено в [4]. Отличие только в определении функции $\mathrm{erf}(p)$. Мы пользовались определением справочника [10].

Для АК $A_{0,1}^{(D)}$ имеем:

$$A_{0,1}^{(D)} = -2\sin(\vartheta_0) \cdot \int_{r_1}^{r_{m1}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\vartheta_0) - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}} \mathrm{d}r +$$
$$+ 2\cos(\vartheta_0) \cdot \int_{r_1}^{r_{m1}} \frac{\sin(\vartheta_0) \cdot \cos(\vartheta_0)}{\left(\sin^2(\vartheta_0) - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)^{3/2}} \mathrm{d}r +$$
$$+ \frac{2\cos(\vartheta_0) \cdot r_{m01}}{\sqrt{\sin^2(\vartheta_0) - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}},$$

где $r_{m01} = \frac{\mathrm{d}r_{m1}}{\mathrm{d}\vartheta}$.

Особенности вычисления АК разберем подробно на примере $A_{0,1}^{(D)}$ в Приложении 1.

$$A_{0,1}^{(D)} = 2 \cdot s \cdot \sqrt{k} \cdot r_{m0} \times$$
$$\times (2 \cdot e^{-p^2} / p + \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(p) \cdot (-1 + 2 \cdot c^2 \cdot k)).$$

$$A_{0,2}^{(D)} = \sqrt{k} \cdot c \cdot r_{m0} \times$$
$$\times (4 \cdot k^2 \cdot c^2 \cdot s^2 - 6 \cdot k \cdot s^2 + 2 \cdot k \cdot c^2 - 1) \cdot \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(p) +$$
$$+ 2 \cdot k^{3/2} \cdot c \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} \cdot (2 \cdot k \cdot c^2 \cdot s^2 - 3 \cdot s^2 + c^2) / p -$$
$$- 2 \cdot k^{5/2} \cdot c^3 \cdot s^2 \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} / p^3.$$

$$A_{0,3}^{(D)} = \sqrt{k} \cdot s \cdot r_{m0} \cdot (1 - 20 \cdot c^2 \cdot k -$$
$$- 24 \cdot s^2 \cdot c^2 \cdot k^2 + 6 \cdot k \cdot s^2 + 8 \cdot k^3 \cdot s^2 \cdot c^4 +$$
$$+ 12 \cdot c^4 \cdot k^2) \cdot \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(p) / 3 +$$
$$+ k^{3/2} \cdot s \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} \cdot (-20 \cdot c^2 - 24 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 +$$
$$+ 6 \cdot s^2 + 8 \cdot k^2 \cdot s^2 \cdot c^4 + 12 \cdot k \cdot c^4) / (3 \cdot p) +$$
$$+ k^{5/2} \cdot s \cdot c^2 \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} \cdot (12 \cdot s^2 -$$
$$- 4 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 - 6c^2) / (3 \cdot p) +$$
$$+ 2k^{7/2} \cdot s^3 \cdot c^4 \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} \big/ p^5.$$

Введем для удобства величины L_{1-5}:

$$L_1 = c \cdot \sqrt{k} \cdot r_{m0} \cdot (16 \cdot c^4 \cdot k^4 \cdot s^4 + 48 \cdot c^4 \cdot k^3 \cdot s^2 -$$
$$- 80 \cdot c^2 \cdot k^3 \cdot s^4 + 12 \cdot c^4 \cdot k^2 - 160 \cdot c^2 \cdot k^2 \cdot s^2 +$$
$$+ 60 \cdot k^2 \cdot s^4 - 20 \cdot c^2 \cdot k + 60 \cdot k \cdot s^2 +$$
$$+ 1) \cdot \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(p) / 6.$$

$$L_2 = c \cdot k^{3/2} \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} (4 \cdot c^4 \cdot k^3 \cdot s^4 +$$
$$+ 12 \cdot c^4 \cdot k^2 \cdot s^2 - 20 \cdot c^2 \cdot k^2 \cdot s^4 +$$
$$+ 3 \cdot c^4 \cdot k - 40 \cdot c^2 \cdot k \cdot s^2 + 15 \cdot k \cdot s^4 -$$
$$- 5 \cdot c^2 + 15 \cdot s^2) / (3 \cdot p).$$

$$L_3 = -k^{5/2} \cdot c \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} \cdot (4 \cdot c^4 \cdot k^2 \cdot s^4 +$$
$$+ 12 \cdot c^4 \cdot k \cdot s^2 - 20 \cdot c^2 \cdot k \cdot s^4 + 3 \cdot c^4 -$$
$$- 40 \cdot c^2 \cdot s^2 + 15 \cdot s^4) / (6 \cdot p^3).$$

$$L_4 = k^{7/2} \cdot r_{m0} \cdot s^2 \cdot c^3 \cdot e^{-p^2} \cdot ((k \cdot s^2 + 3) \cdot c^2 - 5 \cdot s^2) / p^5,$$

$$L_5 = -15 \cdot k^{9/2} \cdot s^4 \cdot c^5 \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} / (6 \cdot p^7).$$

Тогда:

$$A_{0,4}^{(D)} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5.$$

$$A_{2,0}^{(D)} = -2 \cdot k^{3/2} \cdot s^2 \cdot c \cdot r_0^2 \cdot \left(e^{p^2} / p + \mathrm{i} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\mathrm{i} \cdot p) \right) / r_{m0}.$$

$$A_{2,1}^{(D)} = -2 \cdot k^{3/2} \cdot s \cdot r_o^2 \cdot (s^2 + 2 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 - 2 \cdot c^2) \cdot \mathrm{i} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\mathrm{i} \cdot p) / r_{m0} + 2 \cdot k^{3/2} \cdot s \cdot r_o^2 \cdot e^{p^2} \times (s^2 + 2 \cdot s^2 \cdot c^2 \cdot k - 2 \cdot c^2) / (p \cdot r_{m0}) + 2 \cdot k^{5/2} \cdot s^3 \cdot r_o^2 \cdot c^2 \cdot e^{p^2} / (r_{m0} \cdot p^3).$$

$$A_{2,2}^{(D)} = -2 \cdot k^{3/2} \cdot c \cdot r_0^2 \cdot (-7 \cdot s^2 + 4 \cdot k \cdot s^4 + 4 \cdot k^2 \cdot s^4 \cdot c^2 - 8 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 - 2 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 + 2 \cdot k \cdot s^4 + 2 \cdot c^2) \times \mathrm{i} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\mathrm{i} \cdot p) + k^{3/2} \cdot c \cdot r_0^2 \cdot e^{p^2} \cdot (7 \cdot s^2 - 4 \cdot k \cdot s^4 - 4 \cdot k^2 \cdot s^4 \cdot c^2 + 8 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 + 2 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 - 2 \cdot k \cdot s^4 - 2 \cdot c^2) / (r_{m0} \cdot p) + k^{5/2} \cdot s^2 \cdot c \cdot r_0^2 \cdot e^{p^2} \cdot (-2 \cdot s^2 - 2 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 + 5 \cdot c^2 - s^2) / (r_{m0} \cdot p^3) - 3 \cdot k^{7/2} \cdot s^4 \cdot r_0^2 \cdot c^3 \cdot e^{p^2} / (r_{m0} \cdot p^5).$$

$$A_{4,0}^{(D)} = -3 \cdot k^{5/2} \cdot s^4 \cdot c \cdot r_0^4 \cdot \sqrt{3} \cdot \mathrm{i} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\mathrm{i} \cdot \sqrt{3} \cdot p) / r_{m0}^3 - 2 \cdot k^{3/2} \cdot s^2 \cdot c \cdot r_0^2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\mathrm{i} \cdot p) / (3 \cdot r_{m0}) - 3 \cdot k^{5/2} \cdot s^4 \cdot c \cdot r_0^4 \cdot e^{3 \cdot p^2} / (p \cdot r_{m0}^3) + 2 \cdot k^{3/2} \cdot s^2 \cdot c \cdot r_0^2 \cdot e^{p^2} / (3 \cdot r_{m0} \cdot p) - k^{5/2} \cdot s^4 \cdot c \cdot r_0^4 \cdot e^{3 \cdot p^2} / (2 \cdot r_{m0}^3 \cdot p^3).$$

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ АБЕРРАЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Выше были получены вклады в аберрационные коэффициенты от двух дрейфовых и дисперсионного пространства численным и аналитическим методами. Сравним полные аберрационные коэффициенты (сумму вкладов от двух дрейфовых и дисперсионного пространств) для цилиндрического зеркала. Сравниваемые данные сведены в 9 таблиц, приведенных в Приложении 2: табл.1, 4, 7 — результаты вычисления аберрационных коэффициентов ЦЗ, табл. 2, 3, 5, 6, 8, 9 — результаты вычисления проекции траекторий на ось Z.

Сравнение результатов вычисления аберрационных коэффициентов цилиндрического зеркала, полученных аналитическим и численным методами при разных значениях r_0 и P_y (см. Приложение 2, табл. 1, 4, 7), показывает хорошее совпадение результатов. Из этого можно сделать вывод, что и аналитический, и численный методы вычисления аберрационных коэффициентов цилиндрического зеркала работают.

В Приложении 2, табл. 2, 3, 5, 6, 8, 9, приведено сравнение результатов вычисления проекции траекторий на ось Z при тех же параметрах, что и в табл. 1, 4, 7, соответственно, в окрестности точек (φ_0, ϑ_0). Причем в табл. 2, 5, 8 проекции вычислялись при изменении $\varphi = (0 \div 20°)$ и $\vartheta = \vartheta_0 = \mathrm{const}$, а в табл. 3, 6, 9 — при $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$ и изменении $\vartheta = (-10° \div 10°)$. Видно, что и в том, и в другом случае величины проекций траекторий на ось Z, полученные подстановкой аналитических или численных значений аберрационных коэффициентов в формулу (5), совпадают с очень высокой точностью. Проекции траекторий на ось Z, получаемые прямым интегрированием правой части выражения (1), совпадают с хорошей точностью с результатами использования выражения (5) вдоль линии $\vartheta = \vartheta_0 = \mathrm{const}$ вплоть до $\varphi = 20°$, а вдоль линии $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$ — только до значений угла ϑ, меньших 10°.

ВЫВОДЫ

Данные, приведенные в Приложении 2, табл. 1–9, показывают, что аналитические формулы и численный метод вычисления АК дают совпадающие с высокой точностью результаты.

Вычисления по аналитическим формулам осуществляются несколько быстрее, чем численным методом.

То, что в качестве центра разложения по углу φ было использовано значение φ_0=0, с одной стороны, значительно упрощает процесс выведения формул и сами формулы, а, с другой стороны, относительно точки φ_0=0 такие функции, как $L^{(P)}$, являются симметричными. Это приводит к тому, что все нечетные по переменной φ АК равны нулю.

В случае аналитических формул переход к большим порядкам АК ведет сперва к большой, а потом и к очень большой громоздкости формул. В то время как в случае численного метода вычисления АК для перехода к большим порядкам АК следует просто в программе поставить большие порядки интерполяции и увеличить точность вычисления базовых траекторий, по которым осуществляется упомянутая выше интерполяция.

Еще одним фактором, влияющим на точность конечных результатов (АК или проекция траектории на ось Z), является то, что с увеличением $\varphi-\varphi_0$ и $\vartheta-\vartheta_0$ точность как аналитических формул, так и численных результатов уменьшается (как у всякой полиномиальной интерполяции при удалении от центра интерполяции). Поэтому в этом численный метод, для которого центр интерполяции может изменяться, выгодно отличается от аналитического метода.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Преобразование АК $A_{0,1}$ начнем с замены переменной $y^2 = k\sin^2(\vartheta_0) - \ln\left(\dfrac{r}{r_1}\right)$, $r = r_1 \times \exp(k\sin^2(\vartheta_0) - y^2)$, $\mathrm{d}r = -2\cdot r_{m0}\cdot y\cdot e^{-y^2}\mathrm{d}y$.

При этом пределы интегрирования преобразуются следующим образом:

$r = r_1 \to y = p$; $r = r_{m1} \to y = 0$.

Подставляем все это в АК $A_{0,1}$:

$$A_{0,1} = -2\sin(\vartheta_0)\cdot\int_0^p \frac{k^{1/2}}{y} 2\cdot r_{m0}\cdot y\cdot e^{-y^2}\mathrm{d}y + 2\cos(\vartheta_0)\times$$
$$\times\left(\int_0^p \frac{\sin(\vartheta_0)\cdot\cos(\vartheta_0)\cdot 2\cdot r_{m0}\cdot y\cdot e^{-y^2}\mathrm{d}y}{y^3} + \frac{k^{1/2}\cdot r_{m01}}{y\to 0}\right).$$

Видно, что при $y \to 0$ у одного из интегралов в подынтегральной функции содержится сингулярность. Это наблюдается у всех АК. В действительности все сингулярности взаимно сокращаются. Чтобы продемонстрировать это, все промежуточные преобразования будем проводить при условии, что $r = r_{m1} \to y = \varepsilon$. А в конечном выражении, если какие-то члены, содержащие ε, еще останутся, подставим предел $\varepsilon = 0$.

$$A_{0,1}^{(D)} = -2\cdot\sin(t_0)\cdot k^{1/2}\cdot r_{m0}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\mathrm{erf}(p) +$$
$$+2\cdot\cos(t_0)\cdot(-2\cdot\sin(t_0)\cdot\cos(t_0)\cdot k^{3/2}\cdot r_{m0}\cdot i_{02} +$$
$$+\ 2\cdot r_{m0}\cdot\sin(t_0)\cdot\cos(t_0)\cdot k^{3/2})/\varepsilon),$$

где $i_{02} = \displaystyle\int_0^p \frac{e^{-y^2}\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{e^{-p^2}}{p} - \mathrm{i}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\mathrm{erf}(\mathrm{i}\cdot p)$.

Видно, что члены с $1/\varepsilon$ (стоят в круглых скобках) в АК $A_{0,1}$ сокращаются. Аналогично происходит и во всех остальных АК.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Табл. 1. Сравнение аберрационных коэффициентов для цилиндрического зеркала, полученных аналитическим (строка А) и численным (строка Ч) методами, при r_0 = 5 мм, P_y =1.818182 мм, E = 157.46272 эВ, $\vartheta_0 = 43.5°$

Метод	$A_{2,0}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{4,0}$
А	0.0083561879	–0.0151914388	0.0166378967	0.0115541034
Ч	0.0083561879	–0.0151914388	0.0166378967	0.0115541021

Метод	$A_{0,1}$	$A_{0,2}$	$A_{0,3}$	$A_{0,4}$
А	0.0363159922	–0.0388008040	–0.3284181963	–0.0096111739
Ч	0.0363159922	–0.0388008040	–0.3284181961	–0.0096111742

Табл. 2. Сравнение проекции траектории на ось Z при r_0 = 5 мм, P_y = 1.818182 мм, E = 157.462 эВ, $\vartheta_0 = 43.5°$ для цилиндрического зеркала, полученной расчетом этой проекции по методу работы [3] (строка L_zT), подстановкой найденных аналитическим методов аберрационных коэффициентов в формулу (5) (строка $L_z$an) и численным (строка $L_z$nu) методом. В верхней строке показаны последовательно $\varphi = \varphi_0 = 0°$, $\varphi = \varphi_0 + 5°$, $\varphi = \varphi_0 + 10°$, $\varphi = \varphi_0 + 15°$, $\varphi = \varphi_0 + 20°$

Метод	$\varphi = \varphi_0 = 0°$	$\varphi = \varphi_0 + 5°$	$\varphi = \varphi_0 + 10°$	$\varphi = \varphi_0 + 15°$	$\varphi = \varphi_0 + 20°$
L_zT	0.1276964045	0.1277028591	0.1277223066	0.1277550057	0.1278014140
$L_z$an	0.1276964045	0.1277028591	0.1277223066	0.1277549908	0.1278013284
$L_z$nu	0.1276964045	0.1277028591	0.1277223066	0.1277549908	0.1278013284

Табл. 3. Сравнение проекции траектории на ось Z при r_0 = 5 мм, P_y = 1.818182 мм, E = 157.462720 эВ, $\vartheta_0 = 43.5°$ для цилиндрического зеркала, полученной расчетом этой проекции по методу работы [3] (строка L_zT), подстановкой найденных аналитическим методов аберрационных коэффициентов в формулу (5) (строка $L_z$an) и подстановкой найденных численным методом аберрационных коэффициентов в формулу (5) (строка $L_z$nu). В верхней строке показаны последовательно $\vartheta = \vartheta_0 - 10°$, $\vartheta = \vartheta_0 - 5°$, $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 + 5°$, $\vartheta = \vartheta_0 + 10°$

Метод	$\vartheta = \vartheta_0 - 10°$	$\vartheta = \vartheta_0 - 5°$	$\vartheta = \vartheta_0$	$\vartheta = \vartheta_0 + 5°$	$\vartheta = \vartheta_0 + 10°$
L_zT	0.1256153747	0.1266647232	0.1276964045	0.1286681971	0.1295377643
$L_z$an	0.1256153154	0.1266647215	0.1276964045	0.1286681983	0.1295377994
$L_z$nu	0.1256153154	0.1266647215	0.1276964045	0.1286681983	0.1295377994

Табл. 4. Сравнение аберрационных коэффициентов для цилиндрического зеркала, полученных аналитическим (строка А) и численным (строка Ч) методами, при r_0 = 10 мм, P_y = 7.272727 мм, E = 127.478 эВ, $\vartheta_0 = 41.04°$

Метод	$A_{2,0}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{4,0}$
А	0.0063261255	–0.0097267032	0.0186543141	0.0025918275
Ч	0.0063261255	–0.0097267032	0.0186543144	0.0025918276

Метод	$A_{0,1}$	$A_{0,2}$	$A_{0,3}$	$A_{0,4}$
А	0.0191871238	–0.0224070994	–0.2176317766	0.0521608189
Ч	0.0191871238	–0.0224070994	–0.2176317764	0.0521608189

Табл. 5. Сравнение проекции траектории на ось Z при r_0 = 10 мм, P_y = 7.272727 мм, E = 127.478 эВ, $\vartheta_0 = 41.04°$ для цилиндрического зеркала, полученной расчетом этой проекции по методу работы [3] (строка L_zT), подстановкой найденных аналитическим методов аберрационных коэффициентов в формулу (5) (строка $L_z$an) и численным методом (строка $L_z$nu). В верхней строке показаны последовательно $\varphi = \varphi_0 = 0°$, $\varphi = \varphi_0 + 5°$, $\varphi = \varphi_0 + 10°$, $\varphi = \varphi_0 + 15°$, $\varphi = \varphi_0 + 20°$

Метод	$\varphi = \varphi_0 = 0°$	$\varphi = \varphi_0 + 5°$	$\varphi = \varphi_0 + 10°$	$\varphi = \varphi_0 + 15°$	$\varphi = \varphi_0 + 20°$
L_zT	0.0915553589	0.0915602417	0.0915749087	0.0915994157	0.0916338568
$L_z$an	0.0915553589	0.0915602417	0.0915749086	0.0915994153	0.0916338542
$L_z$nu	0.0915553589	0.0915602417	0.0915749086	0.0915994153	0.0916338542

Табл. 6. Сравнение проекции траектории на ось Z при r_0 = 15 мм, P_y = 12.727273 мм, E = 87.32 эВ, $\vartheta_0 = 37.35°$ для цилиндрического зеркала, полученной расчетом этой проекции по методу работы [3] (строка L_zT), подстановкой найденных аналитическим методов аберрационных коэффициентов в формулу (5) (строка $L_z$an) и подстановкой найденных численным методом аберрационных коэффициентов в формулу (5) (строка $L_z$nu). В верхней строке показаны последовательно $\vartheta = \vartheta_0 - 10°$, $\vartheta = \vartheta_0 - 5°$, $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 + 5°$, $\vartheta = \vartheta_0 + 10°$

Метод	$\vartheta = \vartheta_0 - 10°$	$\vartheta = \vartheta_0 - 5°$	$\vartheta = \vartheta_0$	$\vartheta = \vartheta_0 + 5°$	$\vartheta = \vartheta_0 + 10°$
L_zT	0.0904581366	0.0910097916	0.0915553589	0.0920664097	0.0925152784
$L_z$an	0.0904580635	0.0910097894	0.0915553589	0.0920664115	0.0925153325
$L_z$nu	0.0904580635	0.0910097894	0.0915553589	0.0920664115	0.0925153325

Табл. 7. Сравнение аберрационных коэффициентов для цилиндрического зеркала, полученных аналитическим (строка А) и численным (строка Ч) методами, при r_0 = 15 мм, P_y = 12.727273 мм, E = 87.32 эВ, $\vartheta_0 = 37.35°$

Метод	$A_{2,0}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{4,0}$
А	0.0022050038	–0.0072969510	0.0295819374	0.0295819371
Ч	0.0022050038	–0.0072969510	0.0295819371	0.0024862935

Метод	$A_{0,1}$	$A_{0,2}$	$A_{0,3}$	$A_{0,4}$
А	0.0074284139	–0.0088784501	–0.1244928874	0.0852010019
Ч	.0074284139	–0.0088784501	–0.1244928870	0.0852010012

Табл. 8. Сравнение проекции траектории на ось Z при r_0 = 15 мм, P_y = 12.727273 мм, E = 87.32 эВ, $\vartheta_0 = 37.35°$ для цилиндрического зеркала, полученной расчетом этой проекции по методу работы [3] (строка L_zT), подстановкой найденных аналитическим методом аберрационных коэффициентов в формулу (5) (строка $L_z$an) и численным методом (строка $L_z$nu). В верхней строке показаны последовательно $\varphi = \varphi_0 = 0°$, $\varphi = \varphi_0 + 5°$, $\varphi = \varphi_0 + 10°$, $\varphi = \varphi_0 + 15°$, $\varphi = \varphi_0 + 20°$

Метод	$\varphi = \varphi_0 = 0°$	$\varphi = \varphi_0 + 5°$	$\varphi = \varphi_0 + 10°$	$\varphi = \varphi_0 + 15°$	$\varphi = \varphi_0 + 20°$
L_zT	0.0537897179	0.0537914208	0.0537965472	0.0538051507	0.0538173209
$L_z$an	0.0537897179	0.0537914208	0.0537965472	0.0538051503	0.0538173191
$L_z$nu	0.0537897179	0.0537914208	0.0537965472	0.0538051503	0.0538173191

Табл. 9. Сравнение проекции траектории на ось Z при r_0 = 15 мм, P_y = 12.727273 мм, E = 87.32 эВ, $\vartheta_0 = 37.35°$ для цилиндрического зеркала, полученной расчетом этой проекции по методу работы [3] (строка L_zT), подстановкой найденных аналитическим методов аберрационных коэффициентов в формулу (5) (трока $L_z$an) и подстановкой найденных численным методом аберрационных коэффициентов в формулу (5) (строка $L_z$nu). В верхней строке показаны последовательно $\vartheta = \vartheta_0 - 10°$, $\vartheta = \vartheta_0 - 5°$, $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 + 5°$, $\vartheta = \vartheta_0 + 10°$

Метод	$\vartheta = \vartheta_0 - 10°$	$\vartheta = \vartheta_0 - 5°$	$\vartheta = \vartheta_0$	$\vartheta = \vartheta_0 + 5°$	$\vartheta = \vartheta_0 + 10°$
L_zT	0.0533718658	0.0535792439	0.0537897179	0.0539865923	0.0541544042
$L_z$an	0.0533717838	0.0535792415	0.0537897179	0.0539865945	0.0541544701
$L_z$nu	0.0533717838	0.0535792415	0.0537897179	0.0539865945	0.0541544701

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шевченко С.И.* О свойствах цилиндрического зеркала при учете электронов, имеющих азимутальную компоненту скорости. Распределение электронов вблизи выходной диафрагмы // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 1. С. 90–101. URL: http://iairas.ru/mag/2017/abst1.php#abst15
2. *Шевченко С.И.* О свойствах цилиндрического зеркала при учете электронов, имеющих азимутальную компоненту скорости. Фокусировка и линия фокусов // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 3. С. 81–89. URL: http://iairas.ru/mag/2017/abst3.php#abst10
3. *Шевченко С.И.* Об аналитическом решении уравнения движения электронов в цилиндрическом зеркале при учете электронов, имеющих азимутальную компоненту скорости // Научное приборостроение. 2019. Т. 29, № 2. С. 109–117. URL: http://iairas.ru/mag/2019/abst2.php#abst14
4. *Зашквара В.В., Корсунский М.И., Лавров В.П., Редькин В.С.* О влиянии конечного размера источника на фокусировку пучка заряженных частиц в электростатическом спектрометре с цилиндрическим полем // ЖТФ. 1971. Т. 41, № 1. С. 187–192.
5. *Сар-Эль Х.З.* Анализатор типа цилиндрического зеркала с входной и выходной щелями на поверхности электрода. I. Нерелятивистский случай // Приборы для научных исследований. 1971. Т. 42, № 11. С. 43–48 (первоисточник англ.). DOI: 10.1063/1.1684948
6. *Аксела С.* Аппаратная функция цилиндрического анализатора энергий электронов // Приборы для научных исследований. 1972. Т. 43, № 9. С. 122–128 (первоисточник англ.). DOI: 10.1063/1.1685923
7. *Дрейпер Д.Е., Ли Ч.-И.* Характеристики анализатора типа цилиндрического зеркала с геометрией "кольцо-ось", "ось-ось" и n = 1.5 при конечных размерах источника и щели для углов средней траектории 30°…65° // Приборы для научных исследований. 1977. Т. 48, № 7. С. 138–154 (первоисточник англ.). DOI: 10.1063/1.1135170
8. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Учеб. пособие для вузов. Саров: ФГУП, "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2006. 160 с.
9. *Зашквара В.В., Корсунский М.И., Космачев О.С.* Фокусирующие свойства электростатического зеркала с цилиндрическим полем // ЖТФ, 1966, т. 36, вып. 1. С. 132–137.
10. *Абрамовиц В.А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Контакты: *Шевченко Сергей Иванович*, nyro2@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 30.12.2020

ISSN 0868–5886 NAUCHNOE PRIBOROSTROENIE, 2021, Vol. 31, No. 1, pp. 107–123

CALCULATION OF ABERRATION COEFFICIENTS FOR A CYLINDRICAL MIRROR

S. I. Shevchenko

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg, Russia

Angular aberration coefficients for a cylindrical mirror up to the fourth order in the vicinity of the azimuthal angle $\varphi_0 = 0$ and in the vicinity of an arbitrary angle ϑ_0 value are analytically obtained. A method is developed for calculating aberration coefficients of arbitrary order and in the vicinity of an arbitrary point based on the results of calculating several trajectories. Analytical and numerical methods for calculating aberration coefficients up to the fourth order are productive in the vicinity of the point ($\varphi_0 = 0$, ϑ_0) that coincide with high accuracy.

Keywords: energy analyzer, cylindrical mirror, emission ring, output aperture

INTRODUCTION

This work is a continuation of works [1–3] devoted to the study of the properties of an electrostatic energy analyzer the shape of cylindrical mirror (CM, cylindrical capacitor) taking into account charged particles (in our case, these are electrons) with an azimuthal velocity component.

Previously, this topic was considered in a number of works [4–7]. In these works, the trajectories of electrons in a cylindrical coordinate system were studied. The closest to the presented article is work [4]. We used its basic designations.

Three areas of trajectory passage can be distinguished: the first drift space, dispersion space, and the second drift space. The main difficulty is the calculation of trajectories in the dispersion space.

The equation of motion of charged particles (electrons) in dispersion space, written in a cylindrical coordinate system, can be simplified to obtain the dependence of time on radial coordinate as an integral (in the notation of [3])

$$T = \frac{2}{V_0} \times \int_{r_1}^{r_m} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}}, \quad (1)$$

where r_m is the maximum distance of electrons from the inner cylinder, which is the root of the function put in (1) under the radical sign

$$\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right) = 0. \quad (2$$

Initial conditions for the equations of motion: r_0 — radius of the point of electron departure from the source; V_0 — the velocity of electrons before entering the dispersion space; (ϑ,φ) — angles in the local spherical coordinate system, anchored to the point of emission r_0; ϑ — the angle between the normal to the XY plane (Z axis) and the velocity vector; φ — azimuth angle, measured around a point r_0, between the Y axis and the projection of the velocity vector on the XY plane (V_{xy}); the Y axis of the local spherical coordinate system coincides with a straight line drawn from the point of intersection of the Z axis with the XY plane up to the point of electron departure from the source; $k = -(E/U)\ln(r_2/r_1)$; E — the kinetic energy of electrons before entering the dispersion space; r_1, r_2 — the radii of the inner and outer electrodes of CM; U — potential at the external electrode of CM; potential equal to zero is set on the internal electrode of CM.

Solving the equation of motion in its transformed form (1) requires solving two problems: finding the root of equation (2) and actually solving (integrating) equation (1). In [3], an expression for the maximum distance r_m from the inner cylinder is given:

$$r_m = r_{m0} \times \exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{LambertW}\left(-2\sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi \cdot \frac{r_0^2}{r_{m0}^2}\right)\right\}, \quad (3)$$

where $r_{m0} = r_1 \cdot e^{k\cdot\sin^2\vartheta}$ is the greatest distance of electrons from the inner cylinder at $\varphi = 0$, i.e. without the azimuthal velocity component, LambertW(x) is the Lambert function [8].

The equation of motion can be solved by expanding the equation of motion reduced to form (1) in a Taylor series. In [4], the calculation of the right-hand side of (1) was carried out with an accuracy of up to a small value of the order $\text{tg}^2(\gamma)$, where γ — is the angle proportional to the azimuthal angle. On the one hand, in this case it is impossible to require the isotropy of the initial distribution of electrons over this angle. On the other hand, t he question remains whether the expansion to terms of order $\text{tg}^2(\gamma)$ is sufficient to obtain results of decent accuracy. The results of [3] show that in some cases this approximation may not be enough.

In [3], the expansion of the right-hand side of Eq. (1) in the Maclaurin series in variable $x = \sin^2(\varphi)$ up to the fourth order was carried out. It is shown that up to an angle φ of 20 °, this approach gives a solution to Eq. (1) with very good accuracy. In this case, a (local) spherical coordinate system (SC) was considered at each emission point. Therefore, for this case, the isotropic distribution of emitted electrons is justified.

One can expand the expression on the right-hand side (1) in the double series (Taylor for the angle ϑ and Maclaurin for the angle φ). The coefficients in this series are aberration coefficients (AC). Until now, it was considered impossible to analytically obtain aberration coefficients for a cylindrical mirror. Although in several works analytical expressions are given for some AC. Thus, in [9], expressions for AC for angle ϑ up to the second order are given and a numerical expression for the AC for the angle ϑ of the third order is given. In [4], a more general case with azimuthal trajectories was considered in the approximation of smallness of a certain angle, which converges to the angle φ when tending to zero.

All calculations in this work were carried out for the CM with the radius of the inner cylinder $r_1 = 2$ см, and the radius of the outer cylinder $r_2 = 5$ см, the voltage is set to zero on the inner cylinder, $U = -100$ В — on the outer cylinder

CALCULATION OF THE CONTRIBUTION OF DRIFT SPACES TO ABERRATION COEFFICIENTS

In each of the drift spaces, no force affects a charged particle, therefore its motion is rectilinear. The description of such a movement is simple and considered in detail in [3]. The projections of the trajectory of an electron in drift spaces onto the Z axis are given in [3].

Projection of electron trajectory on the Z axis in the first drift space:

$$L_1^{(P)} = \left(\sqrt{r_1^2 - r_0^2 \cdot \sin^2(\varphi)} - r_0 \cdot \cos(\varphi)\right) \Big/ \text{tg}(\vartheta).$$

Projection of electron trajectory on the Z axis in the second drift space:

$$L_2^{(P)} = \left(\sqrt{r_1^2 - r_0^2 \cdot \sin^2(\varphi)} - r_0 \cdot \cos(\varphi) - \right.$$
$$\left. - \sqrt{P_y^2 - r_0^2 \cdot \sin^2(\varphi)}\right) \Big/ \text{tg}(\vartheta),$$

where P_y is the radius of the cylinder containing the output aperture.

The total contribution of both drift spaces to the projection of the electron trajectory on the Z axis:

$$L^{(P)} = L_1^{(P)} + L_2^{(P)} = \left(2 \cdot \sqrt{r_1^2 - r_0^2 \cdot \sin^2(\varphi)} - \right.$$
$$\left. - r_0 \cdot \cos(\varphi) - \sqrt{P_y^2 - r_0^2 \cdot \sin^2(\varphi)}\right) \Big/ \text{tg}(\vartheta).$$

Let us introduce the notation $s = \sin(\vartheta_0)$, $c = \cos(\vartheta_0)$.

The total contribution of both drift spaces to the projection of the electron trajectory onto the Z axis will be sought in the form of a series expansion (4)

$$L^{(P)} =$$
$$= A_{0,0}^{(P)} + A_{1,0}^{(P)} \cdot \Delta\varphi + A_{0,1}^{(P)} \cdot \Delta\vartheta + A_{1,1}^{(P)} \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\vartheta + \ldots \quad (4)$$

The expansion term of the right-hand side of expression (1) of order (i_φ, j_ϑ) (up to a constant, this term is equal to the derivative of this order) is denoted as $A_{i,j}^{(P)}$.

$$A_{0,0}^{(P)} = (2 \cdot r_1 - r_0 - P_y) \cdot c / s.$$

$$A_{2,0}^{(P)} =$$
$$= -r_0 \cdot (2 \cdot r_0 \cdot P_y - r_0 \cdot r_1 - r_1 \cdot P_y) \cdot c \big/ (2 \cdot r_1 \cdot P_y \cdot s).$$

$$A_{2,1}^{(P)} = r_0 \cdot (2 \cdot r_0 \cdot P_y - r_0 \cdot r_1 - r_1 \cdot P_y) / (2 \cdot s^2 \cdot r_1 \cdot P_y).$$

$$A_{2,2}^{(P)} =$$
$$= -r_0 \cdot (2 \cdot r_0 \cdot P_y - r_0 \cdot r_1 - r_1 \cdot P_y) \cdot c \big/ (2 \cdot s^3 \cdot r_1 \cdot P_y).$$

$$A_{4,0}^{(P)} = -r_0 \cdot (6 \cdot P_y^3 \cdot r_0^3 - 8 \cdot P_y^3 \cdot r_0 \cdot r_1^2 +$$
$$+ 4 \cdot P_y^2 \cdot r_0 \cdot r_1^3 - 3 \cdot r_0^3 \cdot r_1^3 + r_1^3 \cdot P_y^3) \cdot c \big/ (24 \cdot s \cdot r_1^3 \cdot P_y^3).$$

$$A_{0,1}^{(P)} = -(2 \cdot r_1 - P_y - r_0) / s^2.$$

$$A_{0,2}^{(P)} = (2 \cdot r_1 - r_0 - P_y) \cdot c / s^3.$$

$$A_{0,3}^{(P)} = -(2 \cdot r_1 - P_y - r_0) \cdot (1 + 2 \cdot c^2) / (3 \cdot s^4).$$

$$A_{0,4}^{(P)} = c \cdot (2 \cdot r_1 - P_y - r_0) \cdot (2 + c^2) / (3 \cdot s^5).$$

Note that due to the fact that the expansion of the right-hand side of expression (1) in variable is carried out in the vicinity of the point $\varphi_0 = 0$ with respect to which $L^{(P)}$ is symmetric, all contributions to AC, odd in the variable, are equal to zero.

NUMERICAL FINDING OF THE CONTRIBUTION OF DISPERSION SPACE IN ABERRATION COEFFICIENTS

The method is based on the ability to calculate the values $L^{(D)}$ of the projection of the electron trajectory in the dispersion space on the Z axis (see [3]). We fix a certain value of the angle $\vartheta = \vartheta_0$ and for the angle φ_0 we choose $2 \cdot N_\varphi + 1$ equidistant values $\varphi_i = \varphi_0 + i \cdot \Delta\varphi,\ i \in (-N_\varphi, N_\varphi),\ \Delta\varphi = 1°$ and calculate values $L_i^{(D)}$ on a set φ_i. Next, we construct an interpolation polynomial in a variable φ in the vicinity of the point φ_0, passing through these points:

$$L^{(D)}(\varphi, \vartheta_0) = \sum_{n=0}^{N_n} A_{n,0} \cdot (\varphi - \varphi_0)^n.$$

The coefficients of this polynomial are equal to the contribution of the dispersion space into the corresponding aberration coefficients $A_{n,0}$ n the vicinity of the angle φ_0 and at $\vartheta = \vartheta_0$.

Similarly, we calculate the projection of the electron trajectories for a fixed angle $\varphi = \varphi_0$ and $2 \cdot N_\vartheta + 1$ equidistant values of the angle $\vartheta_j = \vartheta_0 + j \cdot \Delta\vartheta,\ \Delta\vartheta = 1°$. We build an interpolation polynomial passing through all points $L^{(D)}(\varphi_0, \vartheta_j)$:

$$L^{(D)}(\varphi_0, \vartheta) = \sum_{m=0}^{N_\vartheta} A_{0,m} \cdot (\vartheta - \vartheta_0)^m.$$

And we get the values of the contribution of the dispersion space to the corresponding aberration coefficients $A_{0,m}$ in the vicinity of the angle ϑ_0 and at $\varphi = \varphi_0$.

The situation is somewhat more complicated with the calculation of "mixed" aberration coefficients (calculation of mixed derivatives). To do this, we calculate the value $L^{(D)}$ on a rectangular array of points $(i_\varphi, j_\vartheta) = (-N_\varphi \div N_\varphi) \times (-N_\vartheta \div N_\vartheta)$, equidistant at the angles φ and ϑ, accordingly, $\varphi_i = \varphi_0 + i \cdot \Delta\varphi$, $\vartheta_j = \vartheta_0 + j \cdot \Delta\vartheta$, $\Delta\varphi = 1°$, $\Delta\vartheta = 1°$.

We need to calculate $A_{n,m} = \dfrac{1}{n!\, m!} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^{n \cdot m} L^{(D)}(\varphi, \vartheta)}{\mathrm{d}\varphi^n \cdot \mathrm{d}\vartheta^m}$. As the partial derivative of several variables can be calculated by successive differentiation in a random order, then the equality is fair

$$A_{n,m} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\varphi^n}\left(\frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^m L^{(D)}(\varphi, \vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta^m}\right) = \\ = \frac{1}{m!} \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\vartheta^m}\left(\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n L^{(D)}(\varphi, \vartheta)}{\mathrm{d}\varphi^n}\right).$$

Therefore, to calculate the AC of order $(n \cdot m)$, one can first calculate the derivative for all possible angles φ_n. So, for each $\varphi = \varphi_n$ we construct an interpolation polynomial in the vicinity of the point ϑ_0 which coefficient with number *n* accurate to $\dfrac{1}{m!}$ is equal to this derivative. Further, to calculate the derivative of the obtained value with respect to the variable φ, we use the previously described technique. Exactly the same action can be done by changing the order of finding the derivatives.

ANALYTICAL FINDING OF THE CONTRIBUTION OF DISPERSION SPACE IN ABERRATION COEFFICIENTS

The main difficulty is the calculation of the contribution of the dispersion space into the aberration coefficients. We carry out the expansion of the right side of formula (1) in the Taylor series in the angle ϑ and the Maclaurin series in the angle φ and select the coefficients of this expansion. These coefficients will be the required AC. Below we will use the notation:

$$L^{(D)} = \\ = A_{0,0}^{(D)} + A_{1,0}^{(D)} \cdot \Delta\varphi + A_{0,1}^{(D)} \cdot \Delta\vartheta + A_{1,1}^{(D)} \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\vartheta + \ldots, \quad (5)$$

where $L^{(D)}$ is defined above.

For a term $A_{0,0}^{(D)}$:

$$A_{0,0}^{(D)} = 2 \cdot \cos(\vartheta_0) \cdot \int_{r_1}^{r_{m1}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\vartheta_0) - \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{r}{r_1}\right)}}\,\mathrm{d}r.$$

By changing the variable $y^2 = k \sin^2(\vartheta_0) - \ln\left(\dfrac{r}{r_1}\right)$, in the integral, it is easy to obtain

$$A_{0,0}^{(D)} = 2\sqrt{k} \cdot \cos(\vartheta_0) \cdot r_{m0} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(p),$$

where $p = k \cdot \sin^2(\vartheta_0)$, $r_{m0} = r_1 \cdot e^{k \cdot \sin^2(\vartheta_0)}$.

This expression practically coincides with that obtained in [4]. The only difference is the definition of the function $\mathrm{erf}(p)$. We used the definition of the reference book [10].

For AC $A_{0,1}^{(D)}$ we have:

$$A_{0,1}^{(D)} = -2\sin(\vartheta_0) \cdot \int_{r_1}^{r_{m1}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\vartheta_0) - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}} \mathrm{d}r + 2\cos(\vartheta_0) \cdot \int_{r_1}^{r_{m1}} \frac{\sin(\vartheta_0)\cdot\cos(\vartheta_0)}{\left(\sin^2(\vartheta_0) - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)^{3/2}} \mathrm{d}r + \frac{2\cos(\vartheta_0)\cdot r_{m01}}{\sqrt{\sin^2(\vartheta_0) - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}},$$

where $r_{m01} = \dfrac{\mathrm{d}r_{m1}}{\mathrm{d}\vartheta}$.

We'll analyze the peculiarities of calculating the AC in detail using the example $A_{0,1}^{(D)}$ in Attachment 1.

$$A_{0,1}^{(D)} = 2\cdot s \cdot \sqrt{k} \cdot r_{m0} \times (2 \cdot e^{-p^2} / p + \sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erf}(p) \cdot (-1 + 2\cdot c^2 \cdot k)).$$

$$A_{0,2}^{(D)} = \sqrt{k} \cdot c \cdot r_{m0} \times (4\cdot k^2 \cdot c^2 \cdot s^2 - 6\cdot k \cdot s^2 + 2\cdot k \cdot c^2 - 1)\cdot\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erf}(p) + 2\cdot k^{3/2} \cdot c \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} \cdot (2\cdot k \cdot c^2 \cdot s^2 - 3\cdot s^2 + c^2)/p - 2\cdot k^{5/2} \cdot c^3 \cdot s^2 \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} / p^3.$$

$$A_{0,3}^{(D)} = \sqrt{k}\cdot s \cdot r_{m0} \cdot (1 - 20\cdot c^2 \cdot k - 24\cdot s^2 \cdot c^2 \cdot k^2 + 6 \cdot k \cdot s^2 + 8 \cdot k^3 \cdot s^2 \cdot c^4 + 12\cdot c^4 \cdot k^2)\cdot\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erf}(p)/3 + k^{3/2}\cdot s \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} \cdot (-20\cdot c^2 - 24 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 + 6 \cdot s^2 + 8 \cdot k^2 \cdot s^2 \cdot c^4 + 12 \cdot k \cdot c^4)/(3\cdot p) + k^{5/2} \cdot s \cdot c^2 \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} \cdot (12 \cdot s^2 - 4 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 - 6c^2)/(3\cdot p) + 2k^{7/2} \cdot s^3 \cdot c^4 \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} / p^5.$$

For convenience, we introduce the values L_{1-5}:

$$L_1 = c \cdot \sqrt{k} \cdot r_{m0} \cdot (16 \cdot c^4 \cdot k^4 \cdot s^4 + 48 \cdot c^4 \cdot k^3 \cdot s^2 - 80 \cdot c^2 \cdot k^3 \cdot s^4 + 12 \cdot c^4 \cdot k^2 - 160 \cdot c^2 \cdot k^2 \cdot s^2 + 60 \cdot k^2 \cdot s^4 - 20 \cdot c^2 \cdot k + 60 \cdot k \cdot s^2 + 1) \cdot \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(p)/6.$$

$$L_2 = c \cdot k^{3/2} \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} (4 \cdot c^4 \cdot k^3 \cdot s^4 + 12 \cdot c^4 \cdot k^2 \cdot s^2 - 20 \cdot c^2 \cdot k^2 \cdot s^4 + 3 \cdot c^4 \cdot k - 40 \cdot c^2 \cdot k \cdot s^2 + 15 \cdot k \cdot s^4 - 5 \cdot c^2 + 15 \cdot s^2)/(3\cdot p).$$

$$L_3 = -k^{5/2} \cdot c \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} \cdot (4 \cdot c^4 \cdot k^2 \cdot s^4 + 12 \cdot c^4 \cdot k \cdot s^2 - 20 \cdot c^2 \cdot k \cdot s^4 + 3 \cdot c^4 - 40 \cdot c^2 \cdot s^2 + 15 \cdot s^4)/(6 \cdot p^3).$$

$$L_4 = k^{7/2} \cdot r_{m0} \cdot s^2 \cdot c^3 \cdot e^{-p^2} \cdot ((k \cdot s^2 + 3) \cdot c^2 - 5 \cdot s^2)/p^5,$$

$$L_5 = -15 \cdot k^{9/2} \cdot s^4 \cdot c^5 \cdot r_{m0} \cdot e^{-p^2} / (6 \cdot p^7).$$

Then:

$$A_{0,4}^{(D)} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5.$$

$$A_{2,0}^{(D)} = -2 \cdot k^{3/2} \cdot s^2 \cdot c \cdot r_0^2 \cdot \left(e^{p^2} / p + \mathrm{i} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(\mathrm{i} \cdot p)\right) / r_{m0}.$$

$$A_{2,1}^{(D)} = -2 \cdot k^{3/2} \cdot s \cdot (s^2 + 2 \cdot k \cdot s^2 \cdot c^2 - 2 \cdot c^2) \cdot \mathrm{i} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(\mathrm{i} \cdot p) + 2 \cdot k^{3/2} \cdot s \cdot r_o^2 \cdot e^{p^2} \times (s^2 + 2 \cdot s^2 \cdot c^2 \cdot k - 2 \cdot c^2)/(p \cdot r_{m0}) + 2 \cdot k^{5/2} \cdot s^3 \cdot r_o^2 \cdot c^2 \cdot e^{p^2} / (r_{m0} \cdot p^3).$$

$$
\begin{aligned}
A_{2,2}^{(D)} = & -2\cdot k^{3/2}\cdot c\cdot r_0^2\cdot(-7\cdot s^2 + 4\cdot k\cdot s^4 + \\
& +4\cdot k^2\cdot s^4\cdot c^2 - 8\cdot k\cdot s^2\cdot c^2 - \\
& -2\cdot k\cdot s^2\cdot c^2 + 2\cdot k\cdot s^4 + 2\cdot c^2)\times \\
& \times \mathrm{i}\cdot\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erf}(\mathrm{i}\cdot p) + k^{3/2}\cdot c\cdot r_0^2\cdot e^{p^2}\cdot(7\cdot s^2 - \\
& -4\cdot k\cdot s^4 - 4\cdot k^2\cdot s^4\cdot c^2 + 8\cdot k\cdot s^2\cdot c^2 + \\
& + 2\cdot k\cdot s^2\cdot c^2 - 2\cdot k\cdot s^4 - 2\cdot c^2)/(r_{m0}\cdot p) + \\
& + k^{5/2}\cdot s^2\cdot c\cdot r_0^2\cdot e^{p^2}\cdot(-2\cdot s^2 - 2\cdot k\cdot s^2\cdot c^2 + \\
& +5\cdot c^2 - s^2)/(r_{m0}\cdot p^3) - \\
& -3\cdot k^{7/2}\cdot s^4\cdot r_0^2\cdot c^3\cdot e^{p^2}/(r_{m0}\cdot p^5).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& A_{4,0}^{(D)} = \\
& = -3\cdot k^{5/2}\cdot s^4\cdot c\cdot r_0^4\cdot\sqrt{3}\cdot \mathrm{i}\cdot\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erf}(\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}\cdot p)/r_{m0}^3 - \\
& -2\cdot k^{3/2}\cdot s^2\cdot c\cdot r_0^2\cdot \mathrm{i}\cdot\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erf}(\mathrm{i}\cdot p)/(3\cdot r_{m0}) - \\
& -3\cdot k^{5/2}\cdot s^4\cdot c\cdot r_0^4\cdot e^{3\cdot p^2}/(p\cdot r_{m0}^3) + \\
& +2\cdot k^{3/2}\cdot s^2\cdot c\cdot r_0^2\cdot e^{p^2}/(3\cdot r_{m0}\cdot p) - \\
& -k^{5/2}\cdot s^4\cdot c\cdot r_0^4\cdot e^{3\cdot p^2}/(2\cdot r_{m0}^3\cdot p^3).
\end{aligned}
$$

COMPARISON OF RESULTS OF ANALYTICAL AND NUMERICAL FINDINGS OF ABERRATION COEFFICIENTS

Above, we obtained contributions of two drift and dispersion spaces to the aberration coefficients by numerical and analytical methods. Let us compare the total aberration coefficients (the sum of contributions of two drift and dispersion spaces) for a cylindrical mirror. The compared data are summarized in 9 tables given in Attachment 2: Tab. 1, 4, 7 — the results of calculating the aberration coefficients of CM, Tab. 2, 3, 5, 6, 8, 9 — the results of calculating the projection of trajectories on the Z axis.

Comparison of the results of calculating the aberration coefficients of the cylindrical mirror, obtained by analytical and numerical methods at different values of r_0 and P_y (see Attachment 2, Tab. 1, 4, 7), shows good agreement of the results. One can conclude that both the analytical and numerical methods for calculating the aberration coefficients of a cylindrical mirror work.

Attachment 2, Tab. 2, 3, 5, 6, 8, 9 include a comparison of the results of calculating the projection of trajectories on the Z axis within the same parameters as in Tab. 1, 4, 7 respectively, in the vicinity of points (φ_0, ϑ_0). Moreover, in Tab. 2, 5, 8 projections were calculated changing $\varphi = (0 \div 20°)$ and $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, in Tab. 3, 6, 9 — with $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ and changing $\vartheta = (-10° \div 10°)$. It can be seen that in both-cases, the values of the projections of the trajectories on the Z axis, obtained by substituting the analytical or numerical values of the aberration coefficients in formula (5), coincide with a very high accuracy. The projections of the trajectories onto the Z axis, obtained by direct integration of the right-hand side of expression (1), coincide with good accuracy with the results of using expression (5) along the line $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$ up to $\varphi = 20°$, and along the line $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ — only up to angle ϑ values less than 10°.

CONCLUSIONS

The data given in Attachment 2, Tab. 1–9 show that analytical formulas and the numerical method for calculating the AC give results that coincide with high accuracy.

Calculations by analytical formulas are performed somewhat faster than by the numerical method.

The fact that the value $\varphi_0 = 0$ was used as the center of the expansion in angle φ, on the one hand, greatly simplifies the process of deriving formulas and the formulas themselves, and, on the other hand, such functions as $L^{(P)}$ are symmetric with respect to the point $\varphi_0 = 0$,. This leads to the fact that all ACs odd in the variable φ are equal to zero.

In the case of analytical formulas, the transition to large orders of AK leads first to large and then to very large cumbersome formulas. But in the case of the numerical method for calculating AC, to go to large orders of AC, one should simply put large orders of interpolation in the program and increase the accuracy of calculating the base trajectories along which the above interpolation is performed.

Another factor affecting the accuracy of the final results (AC or the projection of the trajectory on the Z axis) is that with an increase of $\varphi - \varphi_0$ and $\vartheta - \vartheta_0$, the accuracy of both analytical formulas and numerical results decreases (as of any polynomial interpolation when moving away from the interpolation center). Therefore in this case, the numerical method, for which the center of interpolation can vary, compares favorably with the analytical method.

ATTACHMENT 1

We begin the transformation of AC $A_{0,1}$ by changing the variable $y^2 = k\sin^2(\vartheta_0) - \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$, $r = r_1 \times \exp(k\sin^2(\vartheta_0) - y^2)$, $\mathrm{d}r = -2\cdot r_{m0}\cdot y\cdot e^{-y^2}\mathrm{d}y$.

In this case, the limits of integration are transforming as follows:

$$r = r_1 \to y = p;\quad r = r_{m1} \to y = 0.$$

We substitute all this in AC $A_{0,1}$:

$$A_{0,1} = -2\sin(\vartheta_0)\cdot\int_0^p \frac{k^{1/2}}{y} 2\cdot r_{m0}\cdot y\cdot e^{-y^2}\mathrm{d}y + 2\cos(\vartheta_0)\times$$
$$\times\left(\int_0^p \frac{\sin(\vartheta_0)\cdot\cos(\vartheta_0)\cdot 2\cdot r_{m0}\cdot y\cdot e^{-y^2}\mathrm{d}y}{y^3} + \frac{k^{1/2}\cdot r_{m01}}{y\to 0}\right).$$

It is seen that, for $y \to 0$, one of the integrals contains a singularity in the integrand. This is observed in all ACs. In reality, all singularities cancel each other out. To demonstrate this, we will carry out all intermediate transformations under the condition that $r = r_{m1} \to y = \varepsilon$. And in the final expression, if some terms containing ε still remain, we substitute the limit $\varepsilon = 0$.

$$A_{0,1}^{(D)} = -2\cdot\sin(t_0)\cdot k^{1/2}\cdot r_{m0}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\mathrm{erf}(p) +$$
$$+2\cdot\cos(t_0)\cdot(-2\cdot\sin(t_0)\cdot\cos(t_0)\cdot k^{3/2}\cdot r_{m0}\cdot i_{02} +$$
$$+\ 2\cdot r_{m0}\cdot\sin(t_0)\cdot\cos(t_0)\cdot k^{3/2})/\varepsilon),$$

where $i_{02} = \int_0^p \frac{e^{-y^2}\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{e^{-p^2}}{p} - \mathrm{i}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\mathrm{erf}(\mathrm{i}\cdot p).$

It can be seen that the terms with (in parentheses) in the AC $A_{0,1}$ are canceled. The same happens in all other ACs.

ATTACHMENT 2

Tab. 1. Comparison of the aberration coefficients for a cylindrical mirror obtained by the analytical (line A) and numerical (line N) methods at r_0 = 5 мм, P_y =1.818182 мм, E = 157.46272 eV, $\vartheta_0 = 43.5°$

Tab. 2. Comparison of the projection of the trajectory onto the Z axis at r_0 = 5 мм, P_y = 1.818182 мм, E = 157.462 eV, $\vartheta_0 = 43.5°$, for a cylindrical mirror, obtained by:
line L_zT — calculating this projection according to the method of [3],
line $L_z$an — substituting aberration coefficients found by the analytical methods in formula (5)
line $L_z$nu —the numerical method
The top line shows sequentially $\varphi = \varphi_0 = 0°$, $\varphi = \varphi_0 + 5°$, $\varphi = \varphi_0 + 10°$, $\varphi = \varphi_0 + 15°$, $\varphi = \varphi_0 + 20°$

Tab. 3. Comparison of the projection of the trajectory onto the Z axis at r_0 = 5 мм, P_y = 1.818182 мм, E = 157.462720 eV, $\vartheta_0 = 43.5°$ for a cylindrical mirror, obtained by:
line L_zT — calculating this projection according to the method of [3],
line $L_z$an — substituting aberration coefficients found by the analytical methods in formula (5)
line $L_z$nu — substituting aberration coefficients found by the numerical method into formula (5)
The top line shows sequentially $\vartheta = \vartheta_0 - 10°$, $\vartheta = \vartheta_0 - 5°$, $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 + 5°$, $\vartheta = \vartheta_0 + 10°$

Tab. 4. Comparison of the aberration coefficients for a cylindrical mirror obtained by the analytical (line A) and numerical (line N) methods at r_0 = 10 мм, P_y = 7.272727 мм, E = 127.478 eV, $\vartheta_0 = 41.04°$

Tab. 5. Comparison of the projection of the trajectory onto the Z axis at r_0 = 10 мм, P_y = 7.272727 мм, E = 127.478 eV, $\vartheta_0 = 41.04°$ for a cylindrical mirror, obtained by:
line L_zT — calculating this projection according to the method of [3],
line $L_z$an — substituting aberration coefficients found by the analytical methods in formula (5)
line $L_z$nu —the numerical method
The top line shows sequentially $\varphi = \varphi_0 = 0°$, $\varphi = \varphi_0 + 5°$, $\varphi = \varphi_0 + 10°$, $\varphi = \varphi_0 + 15°$, $\varphi = \varphi_0 + 20°$

Tab. 6. Comparison of the projection of the trajectory onto the Z axis at r_0 = 15 мм, P_y = 12.727273 мм, E = 87.32 eV, $\vartheta_0 = 37.35°$ для for a cylindrical mirror, obtained by:
line L_zT — calculating this projection according to the method of [3],
line $L_z$an — substituting aberration coefficients found by the analytical methods in formula (5)
line $L_z$nu — substituting aberration coefficients found by the numerical method into formula (5)
The top line shows sequentially $\vartheta = \vartheta_0 - 10°$, $\vartheta = \vartheta_0 - 5°$, $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 + 5°$, $\vartheta = \vartheta_0 + 10°$

Tab. 7. Comparison of the aberration coefficients for a cylindrical mirror obtained by the analytical (line A) and numerical (line N) methods at r_0 = 15 мм, P_y = 12.727273 мм, E = 87.32 eV, $\vartheta_0 = 37.35°$

Tab. 8. Comparison of the projection of the trajectory onto the Z axis at r_0 = 15 мм, P_y = 12.727273 мм, E = 87.32 eV, $\vartheta_0 = 37.35°$ для for a cylindrical mirror, obtained by:
line L_zT — calculating this projection according to the method of [3],
line $L_z$an — substituting aberration coefficients found by the analytical methods in formula (5)
line $L_z$nu — substituting aberration coefficients found by the numerical method into formula (5)
The top line shows sequentially $\varphi = \varphi_0 = 0°$, $\varphi = \varphi_0 + 5°$, $\varphi = \varphi_0 + 10°$, $\varphi = \varphi_0 + 15°$, $\varphi = \varphi_0 + 20°$

Tab. 9. Comparison of the projection of the trajectory onto the Z axis at r_0 = 15 мм, P_y = 12.727273 мм, E = 87.32 eV, $\vartheta_0 = 37.35°$ для for a cylindrical mirror, obtained by:
line L_zT — calculating this projection according to the method of [3],
line $L_z$an — substituting aberration coefficients found by the analytical methods in formula (5)
line $L_z$nu — substituting aberration coefficients found by the numerical method into formula (5)
The top line shows sequentially $\vartheta = \vartheta_0 - 10°$, $\vartheta = \vartheta_0 - 5°$, $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 + 5°$, $\vartheta = \vartheta_0 + 10°$

REFERENCES

1. Shevchenko S.I. [About the properties of cylindrical mirrors for the accounting of electrons with the azimuthal component of velocity. The distribution of electrons near the output aperture]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 1, pp. 90–101. DOI: 10.18358/np-27-1-i90101 (In Russ.).
2. Shevchenko S.I. [About the properties of cylindrical mirrors for the accounting of electrons with the azimuthal component of velocity. The focusing and focus line]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 81–89. DOI: 10.18358/np-27-3-i8189 (In Russ.).
3. Shevchenko S.I. [On analytical solution of the equation of electrons motion in cylindrical mirror accounting electrons having azimuthal velocity component]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2019, vol. 29, no. 2, pp. 109–117. DOI: 10.18358/np-29-2-i109117 (In Russ.).
4. Zashkvara V.V., Korsunskiy M.I., Lavrov V.P., Redkin V.S. [About influence of the final size of a source on

focusing of a bunch of charged particles in an electrostatic spectrometer with the cylindrical field]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of technical physics], 1971, vol. 41, no. 1, pp. 187–192. (In Russ.).
5. Sar-El H.Z. [Cylindrical mirror analyzer with surface entrance and exit slots. I. Nonrelativistic part]. *Pribory dlya nauchnych issledovaniy* [Review of Scientific Instruments], 1971, vol. 42, no 11, pp. 43–48. DOI: 10.1063/1.1684948 (In Russ.).
6. Aksela S. [Instrument function of a cylindrical electron energy analyzer]. *Pribory dlya nauchnych issledovaniy* [Review of Scientific Instruments], 1972, vol. 43, no. 9, pp. 122–128. DOI: 10.1063/1.1685923 (In Russ.).
7. Dreyper D.E., Li Ch.-I. [Characteristics of a cylindrical mirror analyzer with "ring-axis" geometry, "axis-axis" geometry and n = 1.5 with finite point dimensions and slits for mid-path angles of 30°... 65°]. *Pribory dlya nauchnych issledovaniy* [Review of Scientific Instruments], 1977, vol. 48, no. 7, pp. 138–154. DOI: 10.1063/1.1135170 (In Russ.).
8. Dubinov A.E., Dubinova I.D., Saykov S.K. *W-funkziya Lamberta i ee primenenie v matema-ticheskich zadachach fiziki. Ucheb. posobie dlya vuzov* [Lambert's W-function and its application in mathematical physics problems. Textbook for universities.]. Sarov, FGUP, "RFYaZ-VNIIEF", 2006. 160 p. (In Russ.).
9. Zashkvara V.V., Korsunskiy M.I., Kosmachev O.S. [The focusing properties of an electrostatic mirror with the cylindrical field]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of technical physics], 1966, vol. 36, no. 1, pp. 132–137. (In Russ.).
10. Abramoviz V.A., Stigan I. *Spravochnik po spezial'nym funkziyam* [Special Functions Handbook]. Moskow, Nauka Publ., 1979. 830 p. (In Russ.).

Contacts: *Shevchenko Sergey Ivanovich,*
nyro2@yandex.ru

Article received by the editorial office on 30.12.2020