

---



---

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

---



---

УДК 537.534, 535.31

© И. Ф. Спивак-Лавров, С. У. Шарипов, Т. Ж. Шугаева, 2020

**РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
КООРДИНАТАХ, ПРИВОДИМЫЕ К ДВУМЕРНЫМ  
ГАРМОНИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛАМ**

Рассмотрены решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. Изучены подходы, позволяющие свести такие задачи для осесимметричных и трансаксиальных корпускулярно-оптических систем к расчету двумерных гармонических потенциалов, для нахождения которых используются методы теории функций комплексной переменной (ТФКП). Выведена простая аналитическая формула, которая точно описывает электростатический потенциал поля квадрупольной линзы с электродами в форме кругового цилиндра. Найдены аналитические формулы, которые с достаточно высокой точностью описывают электростатический потенциал поля многоэлектродной осесимметричной цилиндрической линзы или зеркала. Получены также аналитические выражения, с хорошей точностью описывающие электростатический потенциал трехэлектродной трансаксиальной линзы. Найденные аналитические формулы для потенциалов хорошо согласуются с результатами, полученными другими методами.

*Кл. сл.:* уравнение Лапласа в цилиндрических координатах, квадрупольная ловушка, осесимметричная цилиндрическая линза, трансаксиальная линза

**ВВЕДЕНИЕ**

Одна из основных задач, решаемых при расчете корпускулярно-оптических систем (КОС), связана с вычислением реализуемых в них электрических и магнитных полей. При этом, как правило, приходится решать задачу Дирихле для скалярного потенциала, удовлетворяющего уравнению Лапласа. Расчет КОС значительно упрощается, если поле удастся описать с помощью замкнутых аналитических выражений для потенциала. В случае двумерных полей декартову систему координат  $(x, y, z)$  можно выбрать таким образом, чтобы скалярный потенциал  $\varphi$  зависел только от двух координат, например  $x$  и  $y$ . Потенциал, описывающий такие поля, удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Решениями уравнения (1) являются гармонические функции декартовых координат  $x$  и  $y$ , поэтому в этом случае для расчета потенциала можно использовать мощный аппарат теории функций комплексной переменной (ТФКП).

В цилиндрической системе координат  $(\rho, \psi, z)$  уравнение Лапласа для потенциала  $\varphi$  имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

В том случае, когда потенциал  $\varphi$  зависит только от  $\rho$  и  $\psi$ , получим уравнение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0. \quad (3)$$

С помощью замены

$$\eta = \ln \rho \quad (4)$$

уравнение (3) преобразуется в двумерное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0, \quad (5)$$

решения которого являются гармоническими функциями переменных  $\psi$  и  $\eta$ .

Потенциалы осесимметричных и трансаксиальных КОС в цилиндрической системе координат  $(\rho, \psi, z)$  зависят только от переменных  $\rho$  и  $z$  и удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Наиболее общим методом решения граничной задачи Дирихле для уравнения (6) является метод разделения переменных. При этом потенциалы представляются в виде рядов функций Бесселя [1]. Однако эти решения из-за плохой сходимости рядов неудобно использовать для численных расчетов. В данной работе найдены простые приближенные выражения для потенциалов цилиндрической осесимметричной линзы и трехэлектродной трансаксиальной линзы, которые с хорошей точностью описывают поля этих систем.

### КВАДРУПОЛЬ НА ЦИЛИНДРЕ

В том случае, когда потенциал  $\varphi$  зависит только от координат  $\rho$  и  $\psi$ , задачу можно решить и в декартовых координатах  $(x, y, z)$ . При этом потенциал будет зависеть только от координат  $x$  и  $y$ . Рассмотрим квадрупольную электростатическую систему, в которой квадрупольное поле создается заданием потенциалов  $\pm V$  на поверхности проводящего кругового цилиндра радиуса  $R$ , как показано на рис. 1. Измеряя линейные размеры в единицах  $R$ , получим граничную задачу на единичном круге, решение которой приводит к интегралу Пуассона для потенциала [2]:

$$\varphi(\rho, \psi) = \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{V(t) dt}{1+\rho^2-2\rho \cos(t-\psi)}. \quad (7)$$

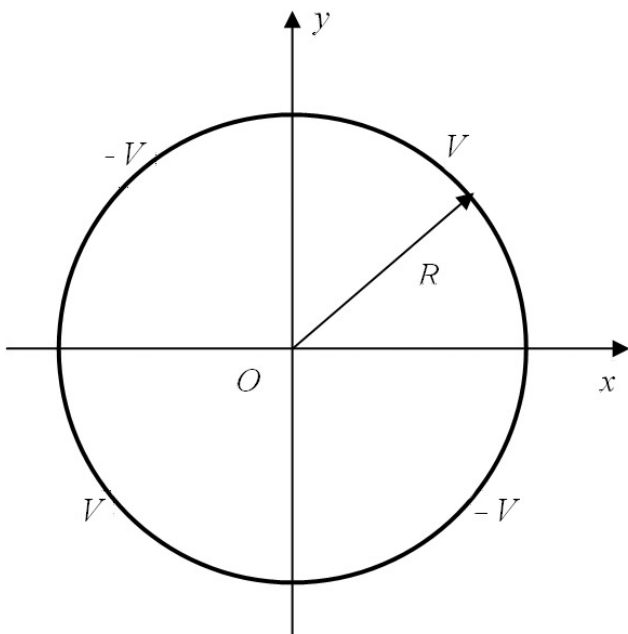


Рис. 1. Квадруполь на цилиндре

Здесь  $V(t)$  — угловое распределение потенциала на поверхности цилиндра. Перепишем выражение (7) в следующем виде:

$$\varphi(\rho, \psi) = \frac{1-\rho^2}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \frac{V(t) dt}{1+\rho^2-2\rho(\cos t \cos \psi + \sin t \sin \psi)}. \quad (8)$$

Используя следующую формулу

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x + c \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-(b^2+c^2)}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c}{\sqrt{a^2-(b^2+c^2)}}, \quad (9)$$

найдем

$$\varphi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{1+\rho^2+2x-2y}{1-\rho^2} - \operatorname{arctg} \frac{1+\rho^2+2x+2y}{1-\rho^2} + \operatorname{arctg} \frac{2y}{1-\rho^2} \right). \quad (10)$$

Здесь  $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ . Легко проверить, что  $\varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0$ , как и следовало ожидать, на осях координат потенциал обращается в нуль. Теперь найдем производные потенциала:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2V}{\pi} \left\{ \frac{2(1-\rho^2)+4x(1+x-y)}{[(1-\rho^2)^2 + [1+\rho^2+2(x-y)]^2]^2} - \frac{2(1-\rho^2)+4x(1+x+y)}{(1-\rho^2)^2 + [1+\rho^2+2(x+y)]^2} + \frac{4xy}{(1-\rho^2)^2 + 4y^2} \right\}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2V}{\pi} \left\{ \frac{-2(1-\rho^2)+4y(1+x-y)}{[(1-\rho^2)^2 + [1+\rho^2+2(x-y)]^2]^2} - \frac{2(1-\rho^2)+4y(1+x+y)}{(1-\rho^2)^2 + [1+\rho^2+2(x+y)]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1-\rho^2 + 2y^2)}{(1-\rho^2)^2 + 4y^2} \right\}. \quad (12)$$

Найденные формулы описывают также и поле монополя, создаваемого частью цилиндрического электрода с потенциалом  $V$  и двумя взаимно перпендикулярными полуплоскостями  $xz$  и  $yz$  с нулевым потенциалом. Картина поля монополя представлена на рис. 2, где изображены эквипотенциальные линии поля, потенциал которых равен:  $0.1V, 0.2V, \dots, 0.9V$ .

Эквипотенциали находились путем численного интегрирования дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} / \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} / \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (13)$$

Начальные условия для уравнений (13) задавались на прямой  $y = x$ , и по формуле (10) находились такие значения  $x$ , при которых потенциал принимал значения  $0.1V, 0.2V, \dots, 0.9V$ . Эти значения  $x$  приведены в табл. 1.

#### РАЗЛИЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Общее решение уравнения (6) может быть записано в виде следующего интегрального выражения [1]:

$$\varphi(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda) e^{i\lambda z} I_0(\lambda \rho) d\lambda + \text{const}. \quad (14)$$

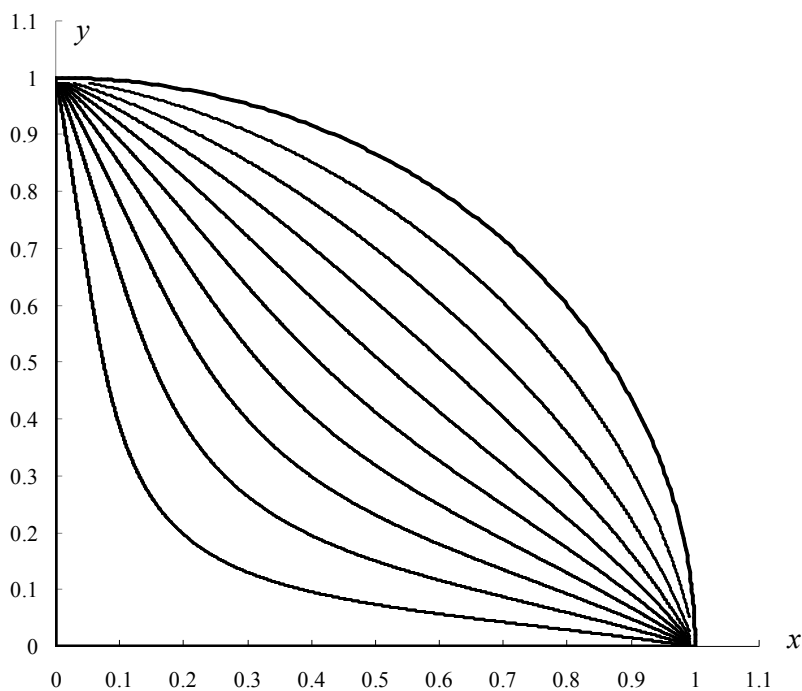


Рис. 2. Картина эквипотенциалей поля цилиндрического монополя

Табл. 1. Значения координаты  $x$  точек пересечения эквипотенциальных линий с прямой  $y = x$

Пересечение	Эквипотенциали $\varphi/V$								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$x$	0.19840	0.28143	0.34648	0.40307	0.45510	0.50475	0.55354	0.60274	0.65348

Вид функции  $B(\lambda)$  определяется граничными условиями, которым должен удовлетворять потенциал  $\varphi(\rho, z)$ . Модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, входящая в (14), может быть также представлена интегралом

$$I_0(\lambda\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-\lambda\rho\cos\beta} d\beta. \quad (15)$$

В результате пространственное распределение потенциала произвольной осесимметричной системы однозначно определяется распределением потенциала на аксиальной оси  $U(z) = \varphi(0, z)$  с помощью общей формулы Уиттекера [3]

$$\varphi(\rho, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U(z + i\rho\cos\beta) d\beta. \quad (16)$$

Эту формулу, а также приведенную ниже формулу (17) можно найти и в монографиях [4–7], где обсуждаются различные аналитические методы нахождения потенциала осесимметричных систем. Если известно распределение потенциала на оси  $U(z)$ , то можно также использовать следующее разложение потенциала, удовлетворяющее уравнению (6):

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, z) = \\ = U(z) - U'' \frac{\rho^2}{4} + U^{(IV)} \frac{\rho^4}{64} - U^{(VI)} \frac{\rho^6}{2304} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

### РАСЧЕТ ПОЛЯ МНОГОЭЛЕКТРОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЛИНЗЫ

Цилиндрическая осесимметричная линза, или зеркало, представляет собой круговой проводящий цилиндр, разрезанный плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра (ось  $z$ ) в точках  $z_k$  [8, 9]. Эти плоскости делят цилиндр на электроды с потенциалами  $V_k$ . Здесь  $k=1, 2, 3, \dots, N-1$ . Такая линза схематически изображена на рис. 3. Здесь  $V_{k-1}$ ,  $V_k$  и  $V_{k+1}$  — потенциалы электродов,  $R$  — внутренний радиус цилиндрических поверхностей.

В приближении, когда зазоры между электродами считаются бесконечно узкими, потенциал такой  $(N+1)$ -электродной системы с хорошей степенью точности можно представить в виде [4]

$$\varphi(\rho, z) = \frac{1}{2}(V_N + V_0) + \sum_{k=1}^N \varphi_k(\rho, z). \quad (18)$$

Здесь  $\varphi_k(\rho, z)$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \varphi_k(\rho, z) = \\ = \frac{1}{\pi} (V_k - V_{k-1}) \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \left[ \frac{\pi}{\sqrt{2}R} (z - z_k) \right]}{\cos \frac{\pi\rho}{2R}}. \end{aligned} \quad (19)$$

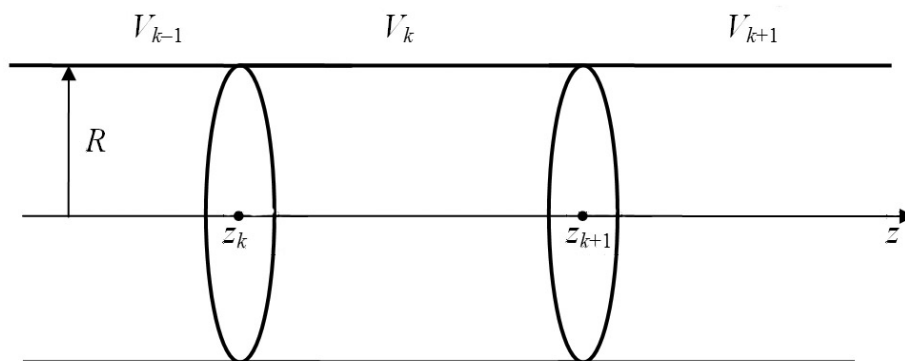


Рис. 3. Схематическое изображение цилиндрической осесимметричной линзы

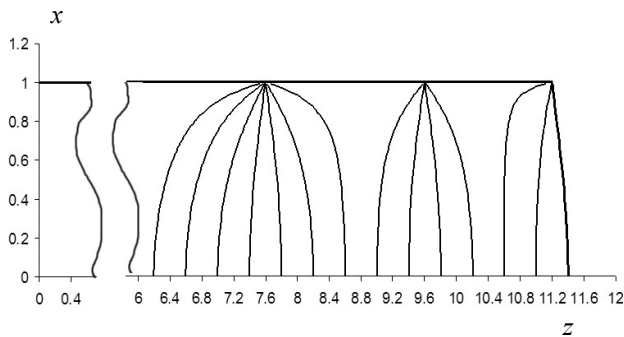


Рис. 4. Эквипотенциальный портрет поля четырехэлектродной КОС

Здесь предполагается бесконечная протяженность первого электрода  $-\infty < z \leq z_1$  с потенциалом  $V_0$  и последнего электрода  $z_{N-1} \leq z < \infty$  с потенциалом  $V_N$ . Выражение (19) является точным решением двухэлектродной граничной задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (\sqrt{2}z)^2} = 0 \quad (20)$$

и находится с помощью методов ТФКП. Нетрудно убедиться прямой подстановкой, что выражение (19) для  $\varphi_k(\rho, z)$  удовлетворяет уравнению (20).

Отметим, что уравнение (6) сводится к уравнению (20) в приосевой области малых  $\rho$ , т.к. в этой области, согласно (17), приближенно выполняется равенство  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} \cong \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \cong -\frac{U''(z)}{2}$ . Однако дополнительный анализ показал, что более адекватной аналитической формулой для функций  $\varphi_k(\rho, z)$  является следующее выражение, которое лишь незначительно отличается от (19) следующей заменой:  $(\sqrt{2}z \rightarrow 3z/2)$ . В результате

$$\varphi_k(\rho, z) = \frac{1}{\pi} (V_k - V_{k-1}) \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \left[ \frac{2\pi}{3R} (z - z_k) \right]}{\cos \frac{\pi \rho}{2R}}. \quad (21)$$

Табл. 2. Координаты поверхности замыкающего электрода

Координата	x/R										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
z/R	11.4	11.397	11.390	11.377	11.360	11.336	11.311	11.286	11.255	11.227	11.213

Найдем аналитические выражения для частных производных. Используя формулу (21), получим:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \rho} = \frac{1}{2R} (V_k - V_{k-1}) \frac{\sin \left( \frac{\pi \rho}{2R} \right) \operatorname{sh} \left[ \frac{2\pi}{3R} (z - z_k) \right]}{\cos^2 \left( \frac{\pi \rho}{2R} \right) + \operatorname{sh}^2 \left[ \frac{2\pi}{3R} (z - z_k) \right]}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{2}{3R} (V_k - V_{k-1}) \frac{\cos \left( \frac{\pi \rho}{2R} \right) \operatorname{ch} \left[ \frac{2\pi}{3R} (z - z_k) \right]}{\cos^2 \left( \frac{\pi \rho}{2R} \right) + \operatorname{sh}^2 \left[ \frac{2\pi}{3R} (z - z_k) \right]}. \quad (23)$$

Для построения эквипотенциалей в плоскости  $xz$ , где  $y=0$ ,  $\rho=x$ , используем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} / \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (24)$$

Это уравнение интегрировалось численно по  $x$  от 0 до  $R$ . На рис. 4 приведена картина поля четырехэлектродной осесимметричной системы, у которой  $R=1$ ,  $z_1=7.6R$ ,  $z_2=9.6R$ ,  $z_3=11.2R$ ,  $V_0=1$ ,  $V_1=0.3789$ ,  $V_2=0.0710$ ,  $V_3=-0.0863$ .

Расчет проводился для системы с бесконечно протяженными первым и последним электродами. Здесь первый электрод имеет достаточную протяженность, а последний электрод выполнен в форме замыкающей эквипотенциальной поверхности и имеет потенциал  $V_3' = -0.0234$ .

В табл. 2. приведены данные, определяющие форму замыкающего электрода. На рис. 5 приведен также график распределения потенциала, рассчитанного по формулам (18) и (21), на оси  $z$  при  $\rho=0$  для той же электростатической КОС.

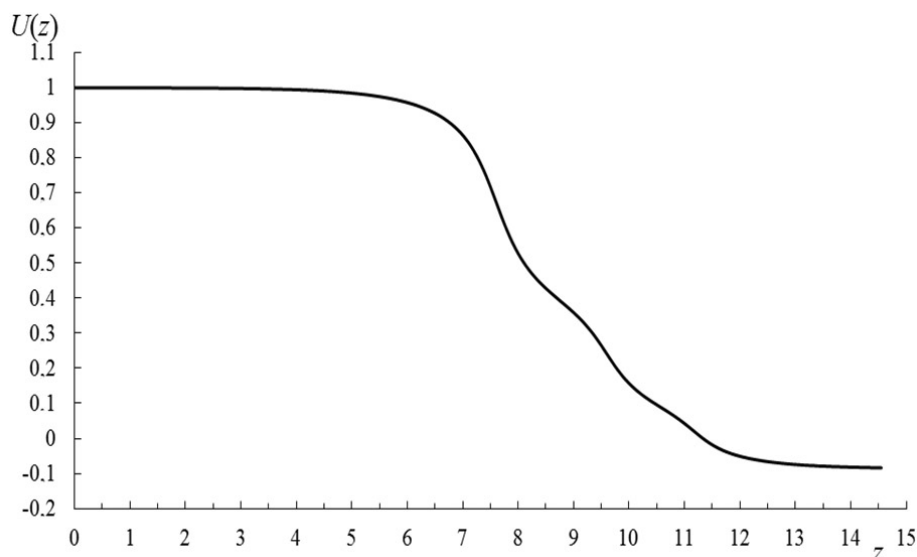


Рис. 5. Распределение потенциала на оси четырехэлектродной КОС

### РАСЧЕТ ПОЛЯ ТРАНСАКСИАЛЬНОЙ ЛИНЗЫ

Трехэлектродная трансаксиальная линза представляет собой две параллельные пластины, разрезанные прямыми круговыми цилиндрами радиуса  $R_1$  и  $R_2$ , ось которых совпадает с осью  $z$  [10–12]. Такая линза схематически изображена на рис. 6. На рисунке показана также сопутствующая декартова система координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Начало декартовой системы координат находится в средней плоскости линзы, совпадающей с плоскостью

$x$   $y$ ;  $V_0$ ,  $V_1$  и  $V_2$  — потенциалы электродов;  $d$  — расстояние между пластинами. Зазоры между электродами считаются бесконечно узкими. Вдали от краев пластин потенциал  $\varphi$  зависит только от переменных  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $z$ .

Вводя безразмерные переменные [12–16]

$$\eta = \ln \frac{\rho}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad (25)$$

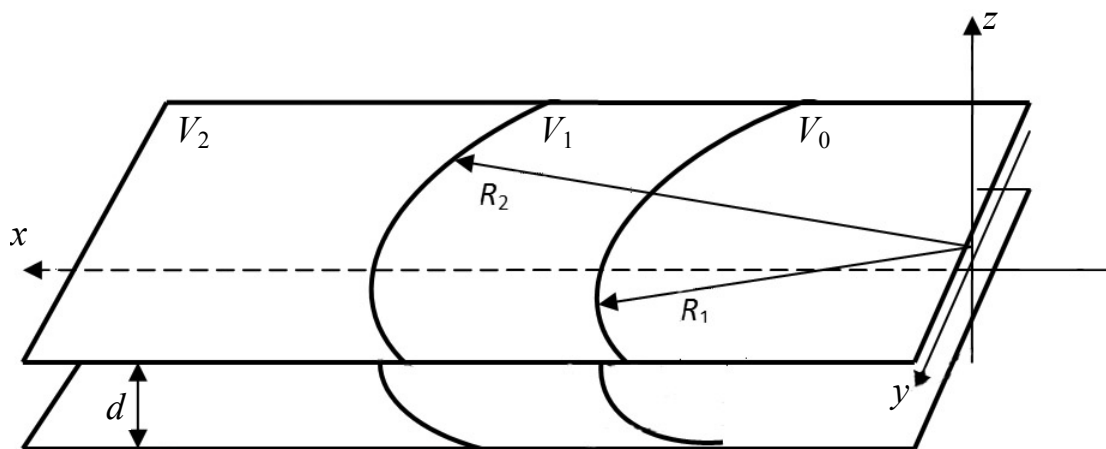


Рис. 6. Схематическое изображение трансаксиальной линзы

где  $R = \sqrt{R_1 R_2}$ , получим следующее уравнение для потенциала:

$$e^{-2\eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (26)$$

Гармоническая составляющая  $F(\eta, \zeta)$  электростатического потенциала  $\varphi(\eta, \zeta)$  удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа и является гармонической функцией безразмерных переменных  $\eta$  и  $\zeta$ . Поэтому для расчета  $F(\eta, \zeta)$  можно использовать аппарат теории функций комплексной переменной (ТФКП). Полученные таким образом аналитические выражения для потенциала дают хорошее приближение для потенциала  $\varphi(\eta, \zeta)$ , т.к. точно удовлетворяют заданным граничным условиям Дирихле и при  $\rho \cong R$  ( $\eta = 0$ ) удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа.

В плоскости  $\eta\zeta$  имеем электростатическую систему с двумерным полем, изображенную на рис. 7. В плоскости  $\eta\zeta$  потенциал  $\varphi(\eta, \zeta)$

удовлетворяет следующим граничным условиям при  $\zeta = \pm \zeta_0 = \pm \frac{d}{2R}$ :

$$\varphi(\eta, \pm \zeta_0) = \begin{cases} V_0 & \text{для } \eta < -\eta_0, \\ V_1 & \text{для } -\eta_0 < \eta < \eta_0, \\ V_2 & \text{для } \eta > \eta_0. \end{cases} \quad (27)$$

В последней формуле  $\eta_0 = \ln \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$ .

Уравнение (26) для потенциала можно решать методом последовательных приближений, взяв за нулевое приближение гармоническую функцию  $F(\eta, \zeta)$ , удовлетворяющую граничным условиям (27). Чтобы найти потенциал  $F(\eta, \zeta)$  этой системы, отобразим полосу  $-\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0$  комплексной плоскости  $\omega = \eta + i\zeta$  на верхнюю полуплоскость плоскости  $w = u + iv$  с помощью следующего конформного преобразования:

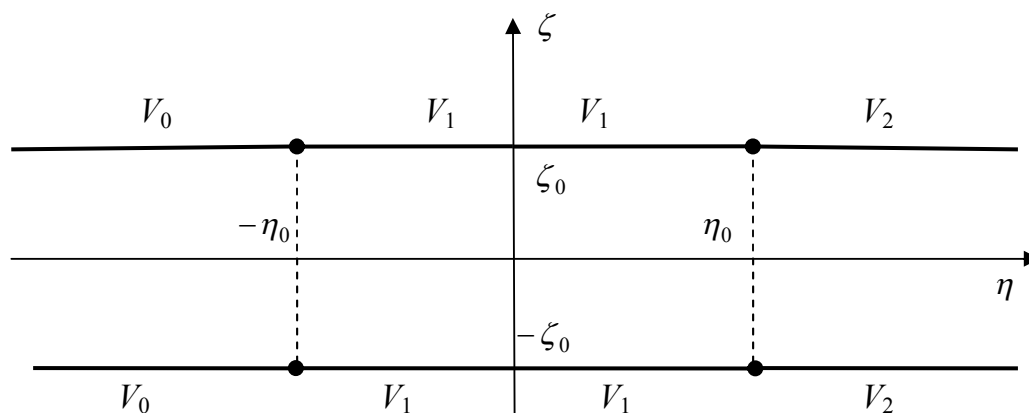


Рис. 7. Трехэлектродная электростатическая система с двумерным полем

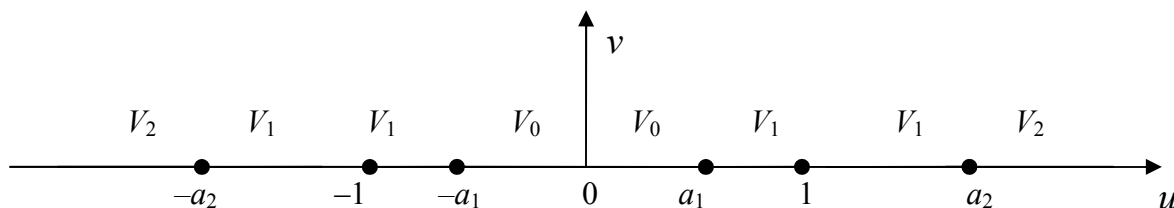


Рис. 8. Граничная задача в w-плоскости

$$w = i \exp\left(\frac{\pi R \omega}{d}\right). \quad (28)$$

Откуда

$$\begin{aligned} u &= -\exp\left(\frac{\pi R \eta}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi R \zeta}{d}\right), \\ v &= \exp\left(\frac{\pi R \eta}{d}\right) \cos\left(\frac{\pi R \zeta}{d}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

В  $w$ -плоскости получаем граничную задачу, представленную на рис. 8, где верхним электродам соответствует область  $u < 0$ , а нижним —  $u > 0$ . Распределение потенциала в  $w$ -плоскости определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= V_2 + \\ &+ \frac{V_0 - V_1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{u + a_1}{v} - \operatorname{arctg} \frac{u - a_1}{v} \right) + \\ &+ \frac{V_1 - V_2}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{u + a_2}{v} - \operatorname{arctg} \frac{u - a_2}{v} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$a_1 = \exp\left(-\frac{\pi R \eta_0}{d}\right), \quad a_2 = \frac{1}{a_1} = \exp\left(\frac{\pi R \eta_0}{d}\right). \quad (31)$$

Возвращаясь к цилиндрическим координатам  $\rho$  и  $z$ , запишем также следующее выражение для потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, z) &= V_2 + \\ &+ (V_0 - V_1) P_1\left(\frac{\rho}{R_1}, z, R\right) + (V_1 - V_2) P_2\left(\frac{\rho}{R_2}, z, R\right), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} P_k\left(\frac{\rho}{R_k}, z, R\right) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \cos \frac{\pi}{d} z}{\left(\frac{\rho}{R_k}\right)^{\frac{\pi R}{d}} - \left(\frac{\rho}{R_k}\right)^{\frac{\pi R}{d}}}, \\ k &= 1, 2. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, получено простое аналитическое выражение для электростатического потенциала трехэлектродной трансаксиальной линзы.

На рис. 9 приведен график изменения производной потенциала  $\varphi_x(x, 0)$  вдоль оси  $x$  ( $\rho = x$ ) для трансаксиальной линзы, у которой  $R_1 = 10d$ ,  $R_2 = 12d$ ;  $V_0 = 1$ ,  $V_1 = 0.1$ ,  $V_2 = 0.6$ .

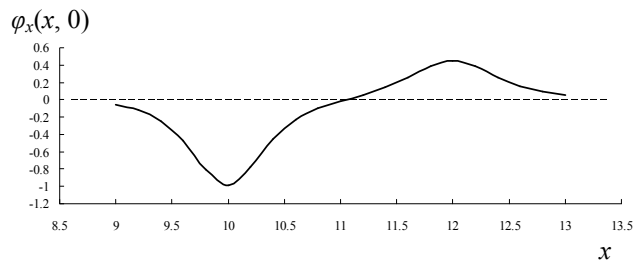


Рис. 9. Изменение производной потенциала вдоль оси  $x$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучены подходы, позволяющие свести решение уравнения Лапласа для осесимметричных и трансаксиальных корпускулярно-оптических систем к расчету двумерных гармонических потенциалов, для нахождения которых используются методы ТФКП. Получены формулы, описывающие потенциал поля квадруполь с цилиндрическими электродами. Найдены простые аналитические формулы (18) и (21), которые с достаточно высокой точностью описывают электростатический потенциал поля многоэлектродной осесимметричной цилиндрической линзы или зеркала. Эффективность полученных формул обусловлена тем, что распределение потенциала вдоль оси симметрии  $U(z)$  достаточно гладкое (см. рис. 5) и поэтому старшие производные  $U(z)$  малы. В результате в разложении потенциала (17) основной вклад дают первые члены, для которых выполняется равенство  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} \cong \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \cong -\frac{U''(z)}{2}$ , что приводит к двумерному уравнению Лапласа (20) для потенциала  $\varphi(\rho, z)$ . При этом переход от двумерного потенциала к осесимметричному сводится к изменению масштаба вдоль оси симметрии.

Аналитические выражения для электростатического потенциала трехэлектродной трансаксиальной линзы (32), (33) также с хорошей точностью описывают поле линзы. Это связано с тем, что в области щелей, где происходит максимальный перепад потенциалов, с хорошей точностью выполняется двумерное уравнение Лапласа.

Авторы выражают благодарность профессору Е.М. Якушеву за полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.



2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976. 716 с.
3. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 516 с.
4. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.
5. *Глазер В.* Основы электронной оптики. М.: ГТТИ, 1957. 764 с.
6. *Силадьи М.* Электронная и ионная оптика. М.: Мир, 1990. 639 с.
7. Springer Handbook of Microscopy / Hawkes P.W., Spence J.C.H., eds. Springer Nature Switzerland AG, 2019. 1543 p. DOI: 10.1007/978-3-030-00069-1
8. *Harting E, Read F.H.* Electrostatic Lenses. Amsterdam: Elsevier, 1976. 324 p.
9. *Bimurzaev S.B., Serikbaeva G.S., Yakushev E.M.* Calculation of focusing quality of the electrostatic mirror objective free of third-order spherical aberration // Nucl. Instr. Meth. Research. A. 2004. Vol. 519, no. 1-2. P. 70–75. DOI: 10.1016/j.nima.2003.11.122
10. *Гликман Л.Г. и др.* Электронно-оптические параметры трехэлектродных трансаксиальных цилиндрических линз // ЖТФ. 1971. Т. 41. № 2. С. 330–335.
11. *Кельман В.М., Карецкая С.П., Федулina Л.В., Якушев Е.М.* Электронно-оптические элементы призматических спектрометров заряженных частиц. Алма-Ата: Наука, КазССР, 1979. 232 с.
12. *Spivak-Lavrov I.F.* Analytical methods for the calculation and simulation of new schemes of static and time-of-flight mass spectrometers // Advances in Imaging and Electron Physics. Burlington: Academic Press, 2016. Vol. 193. P. 45–128. DOI: 10.1016/bs.aiep.2015.10.001
13. *Spivak-Lavrov I.F., Baisanov O.A., Nurmukhanova A.A.* Ways of developing analyzers for static mass spectrometers // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2018. Vol. 82, no. 10. P. 1353–1358. DOI: 10.3103/S1062873818100210
14. *Спивак-Лавров И.Ф., Нурмуханова А.А., Шугаева Т.Ж.* Масс-анализатор с конусоидной ахроматической призмой и трансаксиальными линзами // Научное приборостроение. 2019. Т. 29, № 1. С. 116–125. URL: <http://iairas.ru/mag/2019/abst1.php#abst18>
15. *Spivak-Lavrov I.F., Shugaeva T.Zh., Kalimatov T.S.* Mass analyzer with conic achromatic prism and transaxial lenses // International Journal of Mass Spectrometry. 2019. Vol. 444. 116180. DOI: 10.1016/j.ijms.2019.116180

**Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, Актюбь, Казахстан**

Контакты: *Спивак-Лавров Игорь Феликсович*, [spivakif@rambler.ru](mailto:spivakif@rambler.ru)

Материал поступил в редакцию 29.03.2020

## SOLUTIONS OF THE LAPLACE EQUATION IN CYLINDRICAL COORDINATES, REDUCED TO TWO-DIMENSIONAL HARMONIC POTENTIALS

**I. F. Spivak-Lavrov, S. U. Sharipov, T. Zh. Shugaeva**

*Aktobe Regional State University named after K. Zhubanova, Aktobe, Kazakhstan*

The solutions of the Dirichlet problem for the Laplace equation in cylindrical coordinates are considered. The approaches are studied that allow such problems for axisymmetric and transaxial corpuscular optical systems to calculate two-dimensional harmonic potentials to find which methods of the theory of functions of a complex variable (TFCV) are used. A simple analytical formula is derived that accurately describes the electrostatic potential of a quadrupole field with electrodes in the form of a circular cylinder. Analytical formulas are found that describe with quite high accuracy the electrostatic potential of the field of a multi electrode axial symmetric cylindrical lens or mirror. Analytical expressions are also obtained that describe with good accuracy the electrostatic potential of a three-electrode transaxial lens. The found analytical formulas for potentials are in good agreement with the results obtained by other methods.

*Keywords:* Laplace equation in cylindrical coordinates, quadrupole trap, axial symmetric cylindrical lens, transaxial lens

### REFERENCES

1. Tihonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 736 p. (In Russ.).
2. Lavrentjev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funkciy kompleksnogo peremennogo* [Methods of complex variable function theory]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 716 p. (In Russ.).
3. Whittaker E.T., Watson G.N. *A Course of Modern Analysis, vol. 2*. Cambridge University Press, 1902. 620 p. (Russ. ed.: Uittaker E.T., Vatson G.N. *Kurs sovremennogo analiza. T. 2*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 516 p.).
4. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. *Teoriya sinteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov* [Theory of synthesis of electrostatic energy analyzers]. St. Petersburg, Polytechnical university Publ., 2010. 409 p. (In Russ.).
5. Glazer V. *Osnovy elektronnoj optiki* [Fundamentals of electronic optics]. Moscow, GTTI Publ., 1957. 764 p. (In Russ.).
6. Siladjy M. *Elektronnaya i ionnaya optika* [Electronic and ionic optics]. Moscow, Mir Publ., 1990. 639 p. (In Russ.).
7. Hawkes P.W., Spence J.C.H., eds. *Springer Handbook of Microscopy*, Springer Nature Switzerland AG, 2019. 1543 p. DOI: 10.1007/978-3-030-00069-1
8. Harting E, Read F.H. *Electrostatic Lenses*. Amsterdam, Elsevier, 1976. 324 p.
9. Bimurzaev S.B., Serikbaeva G.S., Yakushev E.M. Calculation of Focusing Quality of the Electrostatic Mirror Objective Free of Third-Order Spherical Aberration. *Nucl. Instr. Meth. Research A*, 2004, vol. 519, no. 1-2, pp. 70–75. DOI: 10.1016/j.nima.2003.11.122
10. Glikman L.G., et al. [Electron-optical parameters of three-electrode transaxial cylindrical lenses]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Applied Physics], 1971, vol. 41, no. 2, pp. 330–335. (In Russ.).
11. Kelman V.M., Kareckaya S.P., Fedulina L.V., Yakushev E.M. *Elektronno-opticheskie elementy prizmennykh spektrometrov zaryazhennykh chastic* [Electron-optical elements of prism spectrometers of charged particles]. Alma-Ata, Nauka Publ., 1979. 232 p. (In Russ.).
12. Spivak-Lavrov I.F. Analytical Methods for The Calculation and Simulation of New Schemes of Static and Time-of-Flight Mass Spectrometers. *Advances in Imaging and Electron Physics*. Burlington, Academic Press, 2016, vol. 193, pp. 45–128. DOI: 10.1016/bs.aiep.2015.10.001
13. Spivak-Lavrov I.F., Baisanov O.A., Nurmukhanova A.A. Ways of Developing Analyzers for Static Mass Spectrometers. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2018, vol. 82, no. 10, pp. 1353–1358. DOI: 10.3103/S1062873818100210
14. Spivak-Lavrov I.F., Nurmukhanov A.A., Shukaeva T.Zh. [Prismatic mass spectrograph with a conical achromatic prism and transaxial lenses]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2019, vol. 29, no. 1, pp. 116–125. (In Russ.). DOI: 10.18358/np-29-1-i116125
15. Spivak-Lavrov I.F., Shukaeva T.Zh., Kalimatov T.S. Mass analyzer with conic achromatic prism and transaxial lenses. *International Journal of Mass Spectrometry*, 2019, vol. 444, 116180. DOI: 10.1016/j.ijms.2019.116180

Contacts: *Spivak-Lavrov Igor' Feliksovich*,  
spivakif@rambler.ru

Article received by the editorial office on 29.03.2020