ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2019, том 29, № 4, с. 84–95

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 537.213, 537.612, 517.5

© А. С. Бердников, Н. К. Краснова, К. В. Соловьёв,
А. Г. Кузьмин, С. В. Масюкевич, Ю. А. Титов, $\boxed{\text{Ю. К. Голиков}}$, 2019

СКРЕЩЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ, ОДНОРОДНЫЕ ПО ЭЙЛЕРУ

Данная публикация является продолжением цикла работ, посвященных исследованию свойств электронно- и ионно-оптических систем и устройств, в которых используются электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. Для подобного типа электрических и магнитных полей выполняется принцип подобия траекторий Ю.К. Голикова, с помощью которого можно синтезировать электронно- и ионно-оптические системы с заранее желаемыми уникальными свойствами. Однако эффективному использованию и оптимизации таких систем препятствует то, что класс электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру, не слишком велик, а аналитические формулы для скалярных потенциалов полей, однородных по Эйлеру, достаточно немногочисленны. В работе рассматривается специальный класс полей, однородных по Эйлеру, для которых трехмерные скалярные потенциалы, являющиеся однородными и гармоническими, распадаются на сумму нескольких двумерных функций, которые по отдельности не обязаны быть ни гармоническими, ни однородными (так называемые "скрещенные потенциалы", называемые также в некоторых случаях потенциалами разностного типа). Подобного рода потенциалы являются полезным инструментом при синтезе электронно- и ионно-оптических систем, поскольку позволяют разделить движение заряженных частиц в меридиональной плоскости на два непересекающихся движения по двум независимым координатам. В результате проведенного исследования получены все возможные аналитические потенциалы для скрещенных однородных гармонических полей. В частности показано, что нетривиальные решения, отличные от суперпозиции планарных однородных гармонических функций, возможны только для степеней однородности, равных нулю и единице.

Кл. сл.: электрические поля; гармонические функции; функции, однородные по Эйлеру; принцип подобия траекторий в оптике заряженных частиц; аналитические решения уравнения Лапласа

ВВЕДЕНИЕ

Полезным инструментом при синтезе электронно- и ионно-оптических систем специального вида являются электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру [1–6]. Траектории движения заряженных частиц в электростатических и магнитостатических полях, однородных по Эйлеру, подчиняются принципу подобия траекторий Ю.К. Голикова [7, 8]. Отсюда следуют уникальные оптические свойства устройств, управляющих движением заряженных частиц, когда эти устройства используют однородные по Эйлеру электрические и магнитные поля [1–5, 9–17].

Исследования Ю.К. Голикова [3, 18, 19] наглядно демонстрируют, каким удобным и эффективным инструментом при синтезе новых электронно- и ионно-оптических систем являются аналитические методы и, в частности, аналитические выражения для потенциалов электрических и магнитных полей. В связи с этим аналитические выражения для скалярных потенциалов, описывающих однородные по Эйлеру электрические и магнитные поля, оказываются очень полезным инструментом при синтезе электронно- и ионно-оптических систем с априорно желаемыми свойствами. Однако, хотя определенные аналитические выражения для однородных гармонических потенциалов в настоящий момент и имеются [1, 2, 20–28], задача о наиболее общем и наиболее полном представлении однородных гармонических функций для произвольных степеней однородности, в том числе и не целочисленных, пока что не может считаться решенной окончательно и в полном объеме. Имеющиеся полезные инструменты общего вида [29–33] для этой области исследований в настоящий момент позволяют рассматривать лишь отдельные конкретные примеры трехмерных однородных гармонических функций, которые можно задать в простой аналитической форме.

Задачей данной работы является исследование аналитических выражений для скрещенных полей (распадающихся на сумму двух или трех полей, двумерных по разным парам координат), которые были бы одновременно и однородными по Эйлеру, и удовлетворяли трехмерному уравнению Лапласа (были гармоническими функциями). Как оказывается, все такие потенциалы удается записать в достаточно простом аналитическом виде, пригодном для аналитических исследований. К сожалению, как оказалось, нетривиальные решения, отличающиеся от суммы двумерных однородных гармонических планарных потенциалов для различных пар трехмерных декартовых координат, существуют лишь для степеней однородности, равных нулю и единице (см. далее).

БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для полей, однородных по Эйлеру, напряженность электрического поля **E** и/или индукция магнитного поля **B** должны удовлетворять не только уравнениям Максвелла для электромагнитного поля, но и тождеству однородности:

$$\begin{aligned}&\forall\lambda>0:\ \mathbf{E}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^{m-1}\mathbf{E}(x,y,z),\\&\forall\lambda>0:\ \mathbf{B}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^{m-1}\mathbf{B}(x,y,z),\end{aligned}\tag{1}$$

где m — степень однородности поля (не обязательно целочисленная).

Однородные по Эйлеру электрические или магнитные поля, подчиняющиеся тождеству (1), характеризуются скалярным электрическим или магнитным потенциалом в виде гармонической функции, которая будет однородной (точнее положительно однородной) по Эйлеру в смысле, который придается этому термину в классическом математическом анализе [34, 35]:

$$\forall\lambda>0:\ U(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^{m}U(x,y,z),\tag{2}$$

где m — степень однородности функции, совпадающая со степенью однородности электрического или магнитного поля, как она определена с помощью тождеств (1). Единственным исключением из данного общего правила являются поля с нулевой степенью однородности — для таких полей скалярный потенциал U в самом общем случае имеет вид:

$$U(x,y,z)=U_0(x,y,z)+C\ln\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),\tag{3}$$

где $U_0(x,y,z)$ является однородной гармонической функцией нулевой степени, а C — произвольная константа. Очевидно, что при $C\neq 0$ выражение (3) больше не является однородной по Эйлеру функцией, хотя градиент функции (3) и подчиняется условиям однородности (1) для электрического либо магнитного поля. Вопрос об однородности скалярных и/или векторных потенциалов для полей, однородных по Эйлеру, подробно исследуется в [36].

Вот некоторые полезные свойства функций, однородных по Эйлеру, которые будут использоваться в дальнейшем [34, 35].

Определение. Функция f называется однородной по Эйлеру со степенью однородности, равной m, если в любой точке и для любого вещественного $\lambda\in(-\infty,+\infty)$ выполняется условие

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)=\lambda^m f(x_1,x_2,\ldots,x_n).\tag{4}$$

Функция f называется положительно однородной по Эйлеру со степенью однородности, равной m, если условие (4) выполняется при любых $\lambda>0$.

Дополнение 1. Предполагается, что если функция $f(\mathbf{x})$ определена в некоторой точке $\mathbf{x}$ n-мерного пространства, то она также определена и во всех точках вида $\lambda\mathbf{x}$. Принципиальное различие между однородностью и положительной однородностью можно увидеть на примере функций $f(x)=x$ и $f(x)=|x|$ либо $f(x)=\sqrt{x}$.

Дополнение 2. Определение (4) следует с осторожностью применять при нецелочисленных степенях однородности и $\lambda\in(-\infty,+\infty)$, поскольку в этом случае степенная функция $\phi(\lambda)=\lambda^m$, вообще говоря, не определена для отрицательных значений λ и ее надо аккуратно доопределить так, чтобы условие $\phi(\lambda_1\lambda_2)=\phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2)$ выполнялось при любых знаках у λ_1 и λ_2.

Линейность. Если f_1, f_2, …, f_k — однородные функции с одной и той же степенью однородности m, их линейная комбинация с постоянными коэффициентами также будет однородной функцией со степенью однородности, равной m. Аналогичное утверждение справедливо для положительно однородных функций.

Дифференцирование. Если f — непрерывно дифференцируемая во всех точках (возможно, за исключением начала координат) однородная функция степени m, то любая ее частная производная первого порядка является однородной функцией степени $m-1$. Аналогичное утверждение справедливо для положительно однородных функций.

Доказательство. Продифференцируем правую и левую части соотношения однородности (4) по соответствующей переменной. Результатом будет соотношение однородности типа (4) со степенью однородности $m-1$ для частной производной от рассматриваемой функции. Непрерывная дифференцируемость функции требуется, чтобы можно было безопасно дифференцировать левую часть выражения (4) как сложную функцию.

Универсальная форма записи. Чтобы функция f от n переменных была однородной функцией со степенью однородности m, необходимо и достаточно, чтобы ее при $x_1 \neq 0$ можно было представить в виде

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = x_1^m h\left(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1\right), \quad (5)$$

где h — это функция $(n-1)$ переменных, взаимно-однозначно связанная с функцией f. Для положительно однородной функции представление (5) распадается на две ветви: при $x_1 > 0$ и при $x_1 < 0$, в каждой из которых используется, вообще говоря, своя функция h, а множитель x_1^m в формуле (5) заменяется на множитель $\left|x_1\right|^m$. При $x_1 = 0$ функция $f\left(0, x_2, \ldots, x_n\right)$ оказывается однородной (либо положительно однородной), но от меньшего числа переменных, в силу чего к ней снова может быть применена параметризация вида (5), пока не будет исчерпано число переменных.

Доказательство. Очевидно, что если функция f может быть записана в виде (5), то она является однородной (положительно однородной) по Эйлеру функцией со степенью однородности m в соответствии с определением (4). Для доказательства необходимости формы (5) надо подставить в соотношение однородности (4) значение $\lambda = 1/x_1$ (либо значение $\lambda = -1/x_1$ для положительно однородной функции при $x_1 < 0$), перенести множитель x_1^m из правой части равенства в левую и определить функцию h в соответствии с правилом

$$h\left(t_2, \ldots, t_n\right) = f\left(1, t_2, \ldots, t_n\right). \quad (6)$$

Для положительно однородных функций функция h, соответствующая области $x_1 < 0$ (если рассматриваемая положительно однородная функция определена в этой области), определяется как

$$h\left(t_2, \ldots, t_n\right) = f\left(-1, -t_2, \ldots, -t_n\right). \quad (7)$$

Теорема Эйлера для однородных функций. Для того чтобы непрерывно дифференцируемая функция f была функцией, однородной по Эйлеру со степенью однородности m, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках n-мерного пространства, где определена функция f, было выполнено дифференциальное соотношение Эйлера для однородных функций:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf. \quad (8)$$

Для положительно однородных функций допустимо, если в начале координат функция f не будет дифференцируемой (и, соответственно, соотношение (8) не будет выполняться в начале координат).

Доказательство. Необходимость дифференциального соотношения Эйлера (8) для дифференцируемых однородных функций получается при дифференцировании соотношения однородности (4) по λ в точке $\lambda = 1$. Для доказательства утверждения, что когда (8) выполняется во всех точках пространства, то функция $f(\mathbf{x})$ будет удовлетворять тождеству однородности (4), рассматривается функция $\xi(\lambda) = f(\lambda \mathbf{x})/\lambda^m$. Ее производная по переменной λ равна нулю тождественно, поскольку условие (8) выполняется во всех точках, в том числе и в точке $\lambda \mathbf{x}$. Отсюда следует, что $\xi(\lambda) = \mathrm{const}$. Однако тождество $\xi(\lambda) = \xi(1)$ эквивалентно соотношению однородности (4) для функций, однородных по Эйлеру со степенью однородности, равной m. Если же условие (8) нарушается в начале координат и, соответственно, условие $\xi'(\lambda) = 0$ нарушается в точке $\lambda = 0$, то допустимо говорить лишь о положительной однородности функции $f(\mathbf{x})$, поскольку в этом случае функция $\xi(\lambda)$ может распадаться на две независимые константы, соответствующие отрезкам $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

Мощность множества однородных гармонических функций. В случае однородных электрических и магнитных полей при получении аналитических выражений для их скалярных потенциалов требуется предпринимать дополнительные и целенаправленные усилия, поскольку таких функций в некотором смысле "много меньше", чем обычных гармонических функций.

Доказательство. Действительно, трехмерная гармоническая функция общего вида $U(x, y, z)$ полностью определяется двумя произвольными функциями двух переменных — например, значением $U^{(0)}(x, y) = U(x, y, 0)$ функции $U(x, y, z)$ вдоль плоскости $z = 0$ и значением $U^{(0,\mathrm{n})}(x, y) = \partial U(x, y, 0)/\partial z$ нормальной производной функции $U(x, y, z)$ вдоль плоскости $z = 0$. Это следует из того факта, что решение такой задачи Коши для трехмерного уравнения Лапласа однозначным образом находится (по крайней мере в окрестности плоскости $z = 0$) с помощью ряда

Шерцера по переменной z:

$$U(x,y,z)=U^{(0)}(x,y)+zU^{(0,\mathrm{n})}(x,y)-$$
$$-\frac{z^2}{2!}\left(U_{xx}^{(0)}(x,y)+U_{yy}^{(0)}(x,y)\right)-$$
$$-\frac{z^3}{3!}\left(U_{xx}^{(0,\mathrm{n})}(x,y)+U_{yy}^{(0,\mathrm{n})}(x,y)\right)+$$
$$+\frac{z^4}{4!}\left(U_{xxxx}^{(0)}(x,y)+2U_{xxyy}^{(0)}(x,y)+U_{yyyy}^{(0)}(x,y)\right)+$$
$$+\frac{z^5}{5!}\left(U_{xxxx}^{(0,\mathrm{n})}(x,y)+2U_{xxyy}^{(0,\mathrm{n})}(x,y)+U_{yyyy}^{(0,\mathrm{n})}(x,y)\right)-\cdots, \tag{9}$$

где коэффициенты перед степенями переменной z выражаются однозначным образом через функции $U^{(0)}$, $U^{(0,\mathrm{n})}$ и их частные производные, поскольку функция U обязана удовлетворять уравнению Лапласа.

Для получения трехмерной *однородной* гармонической функции степени m необходимо и достаточно, чтобы функции $U^{(0)}(x,y)=U(x,y,0)$ и $U^{(0,\mathrm{n})}(x,y)=\partial U(x,y,0)/\partial z$ были однородными по Эйлеру со степенями однородности m и $(m-1)$ соответственно. Необходимость этого требования очевидна и вытекает из общих свойств функций, однородных по Эйлеру. Достаточность следует из формулы (9) и того факта, что частные производные однородных функций $U^{(0)}(x,y)$ и $U^{(0,\mathrm{n})}(x,y)$ сами являются однородными функциями соответствующей степени [34, 35]. Однако однородная по Эйлеру функция двух переменных задается с помощью произвольной функции одного переменного, как это следует из ее представления в виде $f(x,y)=x^k g(y/x)$ [34–36]. Тем самым трехмерные однородные функции однозначным образом определяются через две произвольные функции всего лишь одного вещественного переменного в отличие от трехмерных гармонических функций общего вида.

ПЛАНАРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Планарные потенциалы зависят лишь от двух декартовых переменных из трех имеющихся и удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}=0\,. \tag{10}$$

Будем искать решение уравнения (10) в виде

$$U(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m F\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right), \tag{11}$$

где $F(t)$ — пока не известная функция, в качестве аргумента которой подставляется выражение $\operatorname{arctg}(y/x)$. Формула (11) является слегка модифицированным вариантом универсальной формулы (5). Это гарантирует, что решение уравнения (10) будет однородной функцией степени m и одновременно позволяет не упустить ни одного интересующего нас решения.

После подстановки (11) в уравнение (10) получается обыкновенное дифференциальное уравнение $F''(t)+m^2F(t)=0$ с решениями

$$\text{при } m\neq 0:\ F(t)=c_1\cos mt+c_1\sin mt\,, \tag{12}$$
$$\text{при } m=0:\ F(t)=c_1+c_2 t\,, \tag{13}$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы. Таким образом, все планарные однородные гармонические потенциалы в соответствии с полученными решениями (12) и (13) исчерпываются формулами:

$$U(x,y)=c_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m\cos\left(m\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)+$$
$$+c_2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m\sin\left(m\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right), \tag{14}$$

$$U(x,y)=c_1+c_2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{15}$$

При натуральных значениях m выражения (14) сводятся к классическим гармоническим полиномам от двух переменных:

$$x,\ y,\ x^2-y^2,\ xy,\ x^3-3xy^2,\ 3x^2y-y^3,\ \ldots;$$

при отрицательных целочисленных значениях m — к классическим двумерным мультипольным функциям:

$$\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$
$$\frac{x^3-3xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3},\ \frac{3x^2y-y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3},\ \ldots$$

Решения, соответствующие выбору констант $c_1\neq 0$, $c_2=0$ в формулах (14), (15) будут симметричными по переменной y. Решения, соответствующие выбору констант $c_1=0$, $c_2\neq 0$ в формулах (14), (15), будут антисимметричными по переменной y.

СКРЕЩЕННЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Полезной разновидностью трехмерных однородных полей являются скрещенные поля, описываемые суммой двух потенциалов, каждый из которых является двумерным по своему направлению:

$$U(x,y,z)=U_a(y,z)+U_b(x,z). \tag{16}$$

Такие потенциалы были предложены в [37–40] с целью синтеза транспортирующих электронно- и ионно-оптических систем с разделением движения заряженных частиц в плоскости симметрии OXY на два независимых движения, которые выполняются вдоль оси OX и вдоль оси OY.

Очевидно, что когда $U_a(y,z)$ и $U_b(y,z)$ — однородные гармонические планарные функции, определяемые формулами (14), (15), потенциал (16) будет однородной функцией. Возникает вопрос, существуют ли еще решения, когда (16) будет однородной гармонической функцией?

Продифференцируем выражение (16) по переменной x. Результатом будет однородная функция степени $(m-1)$, причем зависящая только от переменных x и z. Если обозначить ее как $u_b(x,z)$, то из условия $\partial U_b(x,z)/\partial x=u_b(x,z)$ следует соотношение

$$U_b(x,z)=\int_{x_0}^{x}u_b(t,z)\mathrm{d}t+c_b(z), \tag{17}$$

где $c_b(z)$ произвольная функция переменной z.

В частном случае можно подобрать функцию $c_b(z)$ так, чтобы функция (17) была однородной функцией степени m:

$$\begin{aligned}
&x\frac{\partial U_b(x,z)}{\partial x}+z\frac{\partial U_b(x,z)}{\partial z}-mU_b(x,z)=\\
&=xu_b(x,z)+\int_{x_0}^{x}\left(z\frac{\partial u_b(t,z)}{\partial z}-mu_b(t,z)\right)\mathrm{d}t+\\
&\quad+zc_b'(z)-mc_b(z)=\\
&=\int_{x_0}^{x}\left(t\frac{\partial u_b(t,z)}{\partial t}+z\frac{\partial u_b(t,z)}{\partial z}-(m-1)u_b(t,z)\right)\mathrm{d}t+\\
&\qquad+xu_b(x,z)-\int_{x_0}^{x}\left(t\frac{\partial u_b(t,z)}{\partial t}+u_b(t,z)\right)\mathrm{d}t+\\
&\qquad+zc_b'(z)-mc_b(z)=\\
&=zc_b'(z)-mc_b(z)+x_0u_b(x_0,z).
\end{aligned}$$

Действительно, из обыкновенного дифференциального уравнения

$$zc_b'(z)-mc_b(z)+x_0u_b(x_0,z)=0$$

можно найти такую функцию $c_b(z)$, чтобы функция (17) удовлетворяла дифференциальному критерию Эйлера для однородных функций и, следовательно, являлась однородной функцией степени m.

Аналогичные рассуждения после дифференцирования уравнения (16) по переменной y справедливы для функции $U_a(y,z)$. Поэтому однородную функцию (16) степени m можно записать в виде

$$U(x,y,z)=U_a(y,z)+U_b(x,z)+C(z),$$

где $U_a(y,z)$ и $U_b(x,z)$ будут однородными функциями степени m. Но тогда и функция $C(z)$ обязана быть однородной функцией степени m, т.е. с точностью до константы-множителя совпадать с функцией z^m. Соответственно, однородную функцию $C(z)$ можно без потери общности присоединить либо к однородной функции $U_a(y,z)$, либо к однородной функции $U_b(x,z)$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
U(x,y,z)=&\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)F_a\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{z}\right)\right)+\\
&+\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)F_b\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right)\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

с пока что не определенными функциями $F_a(t)$, $F_b(t)$. Выражение (18) будет самой общей формой записи однородных функций вида (16) со скрещенными переменными.

После подстановки (18) в трехмерное уравнение Лапласа и замены переменных $x=\chi z$, $y=\eta z$ получаем уравнение с разделяющимися переменными χ,η:

$$\begin{aligned}
&\left(1+\chi^2\right)^{m/2-1}\left(F_b''(\operatorname{arctg}\chi)+m^2F_b(\operatorname{arctg}\chi)\right)+\\
&+\left(1+\eta^2\right)^{m/2-1}\left(F_a''(\operatorname{arctg}\eta)+m^2F_a(\operatorname{arctg}\eta)\right)=0.
\end{aligned}$$

Из этого уравнения следуют условия:

$$\begin{aligned}
&\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)^{(m-2)/2}\left(F_a''(t)+m^2F_a(t)\right)=C_0,\\
&\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)^{(m-2)/2}\left(F_b''(t)+m^2F_b(t)\right)=S_0,
\end{aligned} \tag{19}$$

где C_0 и S_0 — некоторые константы, удовлетворяющие условию $C_0+S_0=0$.

Если $m \neq 0$ и $m \neq 1$, то решение уравнений (19) будет иметь вид

$$F_a(t) = C_a \cos mt + S_a \cos mt + C_0 \frac{\cos^m t}{m(m-1)},$$
$$F_b(t) = C_b \cos mt + S_b \cos mt + S_0 \frac{\cos^m t}{m(m-1)}, \quad (20)$$

где C_a, S_a, C_b, S_b, C_0, S_0 — константы. Однако после подстановки (20) в (18) "лишние" константы C_0, S_0 сократятся в силу условия $C_0 + S_0 = 0$, а все возможные решения для $U(x,y,z)$ можно будет записать в виде (16), где $U_a(y,z)$ и $U_b(x,z)$ будут однородными гармоническими планарными функциями, которые задаются формулами (14).

При $m = 0$ общее решение для уравнений (19) будет иметь вид

$$F_a(t) = C_a + S_a t - C_0 \ln(\cos t),$$
$$F_b(t) = C_b + S_b t - S_0 \ln(\cos t),$$

где $C_0 + S_0 = 0$. Тогда функция $U(x,y,z)$ будет описываться формулой

$$U(x,y,z) = c_0 + c_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{z}\right) + c_2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + c_3 \ln\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+z^2}}, \quad (21)$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 — произвольные константы. Базисные функции, соответствующие константам c_0, c_1, c_2, являются двумерными планарными гармоническими функциями, однородными по Эйлеру, а базисная функция, соответствующая константе c_3, является новым однородным решением.

При $m = 1$ общее решение для уравнений (19) будет иметь вид

$$F_a(t) = C_a \cos t + S_a \sin t + C_0 \left(t \sin t + \cos t \cdot \ln(\cos t)\right),$$
$$F_b(t) = C_b \cos t + S_b \sin t + S_0 \left(t \sin t + \cos t \cdot \ln(\cos t)\right),$$

где $C_0 + S_0 = 0$. Тогда функция $U(x,y,z)$ будет описываться формулой

$$U(x,y,z) = c_0 z + c_1 x + c_2 y + c_3\left(x \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) - y \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{z}\right) + z \ln\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+z^2}}\right), \quad (22)$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 — произвольные константы. Базисные функции, соответствующие константам c_0, c_1, c_2, являются двумерными планарными гармоническими функциями, однородными по Эйлеру, а базисная функция, соответствующая константе c_3, является новым однородным решением.

КООРДИНАТНО-СКРЕЩЕННЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Исследуем условия, когда скалярные функции вида

$$U(x,y,z) = U_a(y,z) + U_b(x,z) + U_c(x,y) \quad (23)$$

оказываются трехмерными однородными гармоническими функциями. После полного анализа этой задачи формулы, полученные в предыдущем разделе, становятся частным случаем однородных гармонических потенциалов вида (23).

После дифференцирования однородной функции (23) степени m по x и по y получается функция $u_c(x,y)$, однородная по Эйлеру со степенью однородности $(m-2)$ и не зависящая от переменной z. Из равенства $\partial^2 U_c(x,y)/\partial x \partial y = u_c(x,y)$ следует условие

$$U_c(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} u_c(t,\tau)\, dt\, d\tau + c_a(x) + c_b(y), \quad (24)$$

где $c_a(x)$ и $c_b(x)$ — пока что произвольные функции от соответствующих переменных.

Для общей формулы (24) в частном случае можно подобрать функции $c_a(x)$ и $c_b(x)$ так, чтобы функция (24) была однородной функцией степени m. Действительно, вычислим значение дифференциального критерия Эйлера для функции (24):

$$x\frac{\partial U_c(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial U_c(x,y)}{\partial y} - mU_c(x,y) =$$
$$= \int_{y_0}^{y} x u_c(x,\tau)\, d\tau + \int_{x_0}^{x} y u_c(t,y)\, dt - m\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} u_c(t,\tau)\, dt\, d\tau + x c_a'(x) + y c_b'(y) - m c_a(x) - m c_b(y) =$$
$$= \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x}\left(t\frac{\partial u_c(t,\tau)}{\partial t} + u_c(t,\tau)\right) dt\, d\tau + \int_{y_0}^{y} x_0 u_c(x_0,\tau)\, d\tau + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(\tau\frac{\partial u_c(t,\tau)}{\partial \tau} + u_c(t,\tau)\right) dt\, d\tau + \int_{x_0}^{x} y_0 u_c(t,y_0)\, dt -$$

$$-m\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}u_c\left(t,\tau\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau+xc_a'\left(x\right)+yc_b'\left(y\right)-$$
$$-mc_a\left(x\right)-mc_b\left(y\right)=$$
$$=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(t\frac{\partial u_c\left(t,\tau\right)}{\partial t}+\tau\frac{\partial u_c\left(t,\tau\right)}{\partial\tau}+\left(m-2\right)u_c\left(t,\tau\right)\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau+$$
$$+xc_a'\left(x\right)-mc_a\left(x\right)+\int_{x_0}^{x}y_0u_c\left(t,y_0\right)\mathrm{d}t+$$
$$+yc_b'\left(y\right)-mc_b\left(y\right)+\int_{y_0}^{y}x_0u_c\left(x_0,\tau\right)\mathrm{d}\tau.$$

Поэтому, если функции $c_a\left(x\right)$ и $c_b\left(x\right)$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$xc_a'\left(x\right)-mc_a\left(x\right)+y_0\int_{x_0}^{x}u_c\left(t,y_0\right)\mathrm{d}t=0,$$
$$yc_b'\left(y\right)-mc_b\left(y\right)+x_0\int_{y_0}^{y}u_c\left(x_0,\tau\right)\mathrm{d}\tau=0,$$

то функция (24) будет удовлетворять дифференциальному критерию Эйлера для однородных функций и, следовательно, будет однородной функцией степени m.

Аналогичные рассуждения справедливы для функций $U_a\left(y,z\right)$ и $U_b\left(x,z\right)$. Поэтому однородную функцию (23) степени m можно записать в виде

$$U\left(x,y,z\right)=U_a\left(y,z\right)+U_b\left(x,z\right)+U_c\left(x,y\right)+$$
$$+C_a\left(x\right)+C_b\left(y\right)+C_c\left(z\right), \qquad (25)$$

где $U_a\left(y,z\right)$, $U_b\left(x,z\right)$ и $U_c\left(x,y\right)$ — это однородные функции степени m, а $C_a\left(x\right)$, $C_b\left(y\right)$ и $C_c\left(z\right)$ — это некоторые пока что не определенные вспомогательные функции.

Поскольку как функция $U\left(x,y,z\right)$, так и функции $U_a\left(y,z\right)$, $U_b\left(x,z\right)$ и $U_c\left(x,y\right)$ являются однородными функциями степени m, то и функция $C_a\left(x\right)+C_b\left(y\right)+C_c\left(z\right)$ также обязана быть однородной функцией степени m. Следовательно, для нее должно быть выполнено дифференциальное условие Эйлера для однородных функций, которое в данном случае принимает вид уравнения с разделяющимися переменными:

$$\left(xC_a'\left(x\right)-mC_a\left(x\right)\right)+\left(yC_b'\left(y\right)-mC_b\left(y\right)\right)+$$
$$+\left(zC_c'\left(z\right)-mC_c\left(z\right)\right)=0.$$

При $m\neq0$ отсюда следует решение

$$C_a\left(x\right)=Ax^m-\frac{1}{m}H_{a0},$$
$$C_b\left(y\right)=By^m-\frac{1}{m}H_{b0},$$
$$C_c\left(z\right)=Cz^m+\frac{1}{m}\left(H_{a0}+H_{b0}\right),$$

где A, B, C, H_{a0}, H_{b0} — это произвольные константы.

При $m=0$ решение имеет вид

$$C_a\left(x\right)=A\ln x+H_{a0},$$
$$C_b\left(y\right)=B\ln y+H_{b0},$$
$$C_c\left(z\right)=-\left(A+B\right)\ln z+H_{c0},$$

где A, B, H_{a0}, H_{b0}, H_{c0} — это произвольные константы.

Но в таком случае функции $C_a\left(x\right)$, $C_b\left(y\right)$ и $C_c\left(z\right)$ в уравнении (25) можно объединить с однородными функциями $U_a\left(y,z\right)$, $U_b\left(x,z\right)$ и $U_c\left(x,y\right)$ степени m, т.е. без ограничения общности положить функции $C_a\left(x\right)$, $C_b\left(y\right)$ и $C_c\left(z\right)$ в уравнении (25) равными нулю

1) когда $m\neq0$:

$$\tilde{U}_a\left(y,z\right)=U_a\left(y,z\right)+\frac{1}{2}By^m+\frac{1}{2}Cz^m,$$
$$\tilde{U}_b\left(x,z\right)=U_b\left(x,z\right)+\frac{1}{2}Ax^m+\frac{1}{2}Cz^m,$$
$$\tilde{U}_c\left(x,y\right)=U_c\left(x,y\right)+\frac{1}{2}Ax^m+\frac{1}{2}By^m,$$

2) когда $m=0$:

$$\tilde{U}_a\left(y,z\right)=U_a\left(y,z\right)+\left(B+C\right)\ln\left(y/z\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\left(H_{a0}+H_{b0}+H_{c0}\right),$$
$$\tilde{U}_b\left(x,z\right)=U_b\left(x,z\right)+\left(A-C\right)\ln\left(x/z\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\left(H_{a0}+H_{b0}+H_{c0}\right),$$
$$\tilde{U}_c\left(x,y\right)=U_c\left(x,y\right)+C\ln\left(x/y\right)+\frac{1}{3}\left(H_{a0}+H_{b0}+H_{c0}\right).$$

Представим теперь с учетом достигнутых результатов однородную функцию (23) в виде

$$U(x,y,z)=\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^m F_a\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{z}\right)\right)+$$
$$+\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^m F_b\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right)\right)+$$
$$+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m F_c\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right), \qquad (26)$$

где $F_a(t)$, $F_b(t)$ и $F_c(t)$ — некоторые пока не известные функции. Подстановка функции (26) в трехмерное уравнение Лапласа после замены переменных $x=pz$, $y=qz$ и упрощения получившихся выражений приводит к уравнению

$$\left(1+p^2\right)^{m/2-1}\left(F_b''(\operatorname{arctg} p)+m^2F_b(\operatorname{arctg} p)\right)+$$
$$+\left(1+q^2\right)^{m/2-1}\left(F_a''(\operatorname{arctg} q)+m^2F_a(\operatorname{arctg} q)\right)+$$
$$+\left(p^2+q^2\right)^{m/2-1}\left(F_c''(\operatorname{arctg}(q/p))+\right.$$
$$\left.+m^2F_c(\operatorname{arctg}(q/p))\right)=0. \qquad (27)$$

Определим новые функции $G_a(t)$ и $G_b(t)$ в соответствии с равенствами

$$\left(1+q^2\right)^{m/2-1}\left(F_a''(\operatorname{arctg} q)+m^2F_a(\operatorname{arctg} q)\right)=$$
$$=-G_a(\operatorname{arctg} q), \qquad (28)$$

$$\left(1+p^2\right)^{m/2-1}\left(F_b''(\operatorname{arctg} p)+m^2F_b(\operatorname{arctg} p)\right)=$$
$$=-G_b(\operatorname{arctg} p). \qquad (29)$$

Уравнения (28), (29) можно рассматривать и как способ задать новые вспомогательные функции $G_a(t)$ и $G_b(t)$, и как способ для нахождения неизвестных функций $F_a(t)$ и $F_b(t)$ при условии, что функции $G_a(t)$ и $G_b(t)$ уже известны. После этого уравнение (27) приобретает вид

$$F_c''(\operatorname{arctg}(q/p))+m^2F_c(\operatorname{arctg}(q/p))=$$
$$=\frac{G_b(\operatorname{arctg} p)+G_a(\operatorname{arctg} q)}{\left(p^2+q^2\right)^{m/2-1}}. \qquad (30)$$

Упростим полученные уравнения. После подстановки $p=\operatorname{tg}\xi$ уравнение (29) приобретает вид

$$F_b''(\xi)+m^2F_b(\xi)=-G_b(\xi)\cos^{m-2}(\xi), \qquad (31)$$

после подстановки $q=\operatorname{tg}\xi$ уравнение (28) приобретает вид

$$F_a''(\xi)+m^2F_a(\xi)=-G_a(\xi)\cos^{m-2}(\xi), \qquad (32)$$

после подстановки $q=p\operatorname{tg}\xi$ уравнение (30) приобретает вид

$$F_c''(\xi)+m^2F_c(\xi)=$$
$$=\frac{G_a(\operatorname{arctg}(p\operatorname{tg}\xi))+G_b(\operatorname{arctg} p)}{p^{m-2}}\cos^{m-2}(\xi), \qquad (33)$$

а после подстановки $p=q/\operatorname{tg}\xi$ это же самое уравнение приобретает вид

$$F_c''(\xi)+m^2F_c(\xi)=$$
$$=\frac{G_a(\operatorname{arctg} q)+G_b(\operatorname{arctg}(q/\operatorname{tg}\xi))}{q^{m-2}}\sin^{m-2}(\xi). \qquad (34)$$

Из уравнений (33), (34) следует, что функции $G_a(t)$ и $G_b(t)$ никак не могут быть произвольными: правые части уравнений (33) и (34) должны зависеть от ξ, но не от p либо q. Чтобы найти, какими должны быть эти функции, продифференцируем правую часть уравнения (33) по переменной p и подставим в результирующее выражение значение $\xi=0$, а также продифференцируем правую часть уравнения (34) по переменной q и подставим в результирующее выражение значение $\xi=\pi/2$. В случае, когда правые части уравнений (33) и (34) зависят лишь от переменной ξ, результат в обоих случаях должен быть равен нулю. В итоге получим следующие дифференциальные уравнения для функций $G_a(t)$ и $G_b(t)$:

$$\begin{gathered}\frac{p}{1+p^2}G_b'(\operatorname{arctg} p)-\\ -(m-2)\left(G_a(0)+G_b(\operatorname{arctg} p)\right)=0,\\ \frac{q}{1+q^2}G_a'(\operatorname{arctg} q)-\\ -(m-2)\left(G_a(\operatorname{arctg} q)+G_b(0)\right)=0.\end{gathered} \qquad (35)$$

Окончательно после очевидной замены переменных из уравнений (35) получаем уравнения

$$\begin{gathered}(\cos\xi\sin\xi)G_b'(\xi)-(m-2)\left(G_a(0)+G_b(\xi)\right)=0,\\ (\cos\xi\sin\xi)G_a'(\xi)-(m-2)\left(G_a(\xi)+G_b(0)\right)=0.\end{gathered} \qquad (36)$$

С учетом того, что $G_a(0)$ и $G_b(0)$ можно рассматривать как некоторые заранее не известные константы, из этих обыкновенных дифференциальных уравнений можно получить сперва необходимые, а потом и достаточные аналитические выражения для функций $G_a(\xi)$ и $G_b(\xi)$, которые гарантируют, что правая часть уравнения (33), равно как и правая часть уравнения (34) зависит лишь от переменной ξ:

$$G_a(\xi) = C_c + C_b \operatorname{tg}^{m-2} \xi, \quad G_b(\xi) = -C_c + C_a \operatorname{tg}^{m-2} \xi, \tag{37}$$

где C_a, C_b, C_c — произвольные константы. При этом при $m = 2$ константа C_c в уравнениях (37) становится, вообще говоря, избыточной, хотя сама формула остается правильной.

Теперь из уравнений (31), (32) и (33) либо (34) можно определить функции $F_a(\xi)$, $F_b(\xi)$ и $F_c(\xi)$. Окончательный ответ имеет вид:

1) при $m \neq 0$, $m \neq 1$ и $m \neq 2$

$$F_a(\xi) = c_a \cos m\xi + s_a \sin m\xi - \frac{C_c \cos^m \xi + C_b \sin^m \xi}{m(m-1)},$$

$$F_b(\xi) = c_b \cos m\xi + s_b \sin m\xi + \frac{C_c \cos^m \xi - C_a \sin^m \xi}{m(m-1)},$$

$$F_c(\xi) = c_c \cos m\xi + s_c \sin m\xi + \frac{C_a \cos^m \xi + C_b \sin^m \xi}{m(m-1)};$$

2) при $m = 0$

$$F_a(\xi) = c_a + s_a\xi + C_c \ln(\cos\xi) + C_b \ln(\sin\xi),$$
$$F_b(\xi) = c_b + s_b\xi - C_c \ln(\cos\xi) + C_a \ln(\sin\xi),$$
$$F_c(\xi) = c_c + s_c\xi - C_a \ln(\cos\xi) - C_b \ln(\sin\xi);$$

3) при $m = 1$

$$F_a(\xi) = c_a \cos\xi + s_a \sin\xi + C_b\left(\xi\cos\xi - \sin\xi \cdot \ln(\sin\xi)\right) - C_c\left(\xi\sin\xi + \cos\xi \cdot \ln(\cos\xi)\right),$$

$$F_b(\xi) = c_b \cos\xi + s_b \sin\xi + C_a\left(\xi\cos\xi - \sin\xi \cdot \ln(\sin\xi)\right) + C_c\left(\xi\sin\xi + \cos\xi \cdot \ln(\cos\xi)\right),$$

$$F_c(\xi) = c_c \cos\xi + s_c \sin\xi - C_b\left(\xi\cos\xi - \sin\xi \cdot \ln(\sin\xi)\right) + C_a\left(\xi\sin\xi + \cos\xi \cdot \ln(\cos\xi)\right);$$

4) при $m = 2$

$$F_a(\xi) = c_a \cos 2\xi + s_a \sin 2\xi - C_b/4 - C_c/4,$$
$$F_b(\xi) = c_b \cos 2\xi + s_b \sin 2\xi - C_a/4 + C_c/4,$$
$$F_c(\xi) = c_c \cos 2\xi + s_c \sin 2\xi + C_a/4 + C_b/4,$$

где c_a, s_a, c_b, s_b, c_c, s_c, C_a, C_b, C_c — произвольные константы. Для однородных гармонических потенциалов $U(x,y,z)$ это дает формулы:

1) при $m \neq 0$, $m \neq 1$ и $m \neq 2$

$$\begin{aligned} U(x,y,z) = {} & c_a\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^m \cos\left(m \operatorname{arctg}(y/z)\right) + \\ & + s_a\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^m \sin\left(m \operatorname{arctg}(y/z)\right) + \\ & + c_b\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^m \cos\left(m \operatorname{arctg}(x/z)\right) + \\ & + s_b\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^m \sin\left(m \operatorname{arctg}(x/z)\right) + \\ & + c_c\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m \cos\left(m \operatorname{arctg}(x/y)\right) + \\ & + s_c\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m \sin\left(m \operatorname{arctg}(x/y)\right); \end{aligned} \tag{38}$$

2) при $m = 0$

$$\begin{aligned} U(x,y,z) = {} & C + s_a \operatorname{arctg}(y/z) + s_b \operatorname{arctg}(x/z) + \\ & + s_c \operatorname{arctg}(x/y) + C_a \ln\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}} + \\ & + C_b \ln\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2+z^2}} + C_c \ln\sqrt{\frac{x^2+z^2}{y^2+z^2}}; \end{aligned} \tag{39}$$

3) при $m = 1$

$$\begin{aligned} U(x,y,z) = {} & (c_c + s_b)x + (s_a + s_c)y + (c_a + c_b)z + \\ & + C_a\left(y \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + z \operatorname{arctg}\frac{x}{z} + x \ln\sqrt{\frac{x^2+z^2}{y^2+z^2}}\right) + \\ & + C_b\left(-x \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + z \operatorname{arctg}\frac{y}{z} + y \ln\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2}}\right) + \\ & + C_c\left(x \operatorname{arctg}\frac{x}{z} - y \operatorname{arctg}\frac{y}{z} + z \ln\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+z^2}}\right); \end{aligned} \tag{40}$$

4) при $m = 2$

$$U(x,y,z) = (c_a - C_a/4)(z^2 - y^2) + 2s_a yz + \\ + (c_b - C_b/4)(z^2 - x^2) + 2s_b xz + \\ + (c_c + C_c/4)(x^2 - y^2) + 2s_c xy. \qquad (41)$$

Формула (41) является частным случаем формулы (38), соответствующей выбору $m = 2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из выражений (38), (39) и (40) следует, что все координатно-скрещенные однородные гармонические потенциалы являются линейной комбинацией с произвольными коэффициентами, составленной из планарных однородных потенциалов и скрещенных однородных потенциалов соответствующей степени, которые конструируются для пар координат (x,y), (x,z) и (y,z). Кроме того, из выражений (38) и (41) следует, что при $m \neq 0$ и $m \neq 1$ координатно-скрещенные однородные гармонические потенциалы представляют собой линейную комбинацию с постоянными коэффициентами, составленную из планарных однородных гармонических потенциалов, и никаких других полезных аналитических решений в этом случае не образуется.

*Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов, в том числе и финансовых. Данная работа частично выполнена в рамках НИР 0074-2019-0009, входящей в состав гос. задания № 075-00780-19-02 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ИАП РАН. Для аналитических выкладок использовалась программа Wolfram Mathematica версии 11 (*http://wolfram.com/mathematica/*).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.* Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 2. С. 91–94.
2. *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.* Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 3. С. 44–47.
3. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.
4. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 2. С. 9–15.
5. *Краснова Н.К.* Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 2013. 259 с.
6. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, №1. С. 50–58. URL: http://iairas.ru/mag/2014/abst1.php#abst6
7. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.
8. *Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.* Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43. DOI: 10.1134/S106378501702002X
9. *Бердников А.С., Галль Л.Н., Антонов А.С., Соловьев К.В.* Синтез краевых магнитных полей для статических масс-анализаторов спектрографического типа // Масс-спектрометрия. 2018. Т. 15, № 1. С. 26–43.
10. *Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Синтез электродных конфигураций, сохраняющих для краевых электрических полей свойство однородности по Эйлеру // Журнал технической физики. 2018. Т. 88, № 4. С. 609–613. DOI: 10.21883/JTF.2018.04.45732.2483
11. *Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Применение формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88, № 11. С. 1711–1719. DOI: 10.21883/JTF.2018.11.46635.2498
12. *Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Применение формулы Донкина в теории отражающих и поворотных устройств // Журнал технической физики. 2019. Т. 89, № 12. С. 1947–1964. DOI: 10.21883/JTF.2019.12.48496.201-18
13. *Бердников А.С., Аверин И.А.* О невозможности двойной фокусировки в комбинированных электрических и магнитных полях, однородных по Эйлеру // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 67–70.
14. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I. Общий принцип и однокаскадные схемы // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12, № 4. С. 272–281.
15. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II. Условия двойной фокусировки высокого порядка у двухкаскадной схемы // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 11–20.
16. *Бердников А.С., Аверин И.А.* Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 89–95.
17. *Аверин И.А., Бердников А.С.* Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 5–8.
18. *Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В.* Расчет эле-

ментов электростатических электронно-оптических систем. Учебное пособие. Л.: Изд-во ЛПИ, 1984. 79 с.

19. *Голиков Ю.К., Соловьев К.В.* Электростатические ионные ловушки. Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2008. 152 с.
20. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Простейшие аналитические электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. 2016. № 2. С. 17–32.
21. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. 2016. № 2. С. 147–165.
22. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 13–30. URL: http://iairas.ru/mag/2016/abst4.php#abst2
23. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Интегральные формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 31–42. URL: http://iairas.ru/mag/2016/abst4.php#abst3
24. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Квазиполиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2017. Т. 10, № 1. С. 71–80.
25. *Краснова Н.К., Бердников А.С., Соловьев К.В., Аверин И.А.* О квазиполиномиальных трехмерных потенциалах электрических и магнитных полей // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2017. Т. 10, № 1. С. 81–92.
26. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Анализ интегральной формулы Уиттекера общего вида для электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 4. С. 63–71.
URL: http://iairas.ru/mag/2017/abst4.php#abst8
27. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Интегральная формула Уиттекера для электрических и магнитных потенциалов с нулевым порядком однородности и ее следствия // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 4. С. 72–89.
URL: http://iairas.ru/mag/2017/abst4.php#abst9
28. *Голиков Ю.К.* Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2. С. 165–181.
29. *Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.* Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12, № 2. С. 32–48. DOI: 10.18721/JPM.12203
30. *Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.* Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12, № 2. С. 49–62. DOI: 10.18721/JPM.12204
31. *Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.* Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12, № 3. С. 26–44. DOI: 10.18721/JPM.12303
32. *Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.* Дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12, № 3. С. 45–62. DOI: 10.18721/JPM.12304
33. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В*. Теорема о дифференцировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 3. С. 107–119. URL: http://iairas.ru/mag/2017/abst3.php#abst13
34. *Фихтенгольц Г.М*. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 616 с.
35. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.
36. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Об однородности скалярных и векторных потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5, № 1. С. 10–27.
37. *Галль Л.Н., Голиков Ю.К.* Ахроматические электростатические транспортирующие элементы с плоскостью симметрии // "Научное приборостроение. Приборы и средства автоматизации для научных исследований". Сб. трудов НТО АН СССР. Л.: Наука, 1987. С. 11–15.
URL: http://iairas.ru/mag/abst_90s.php?y=87&n=2#abst2
38. *Галль Л.Н., Голиков Ю.К.* Ахроматические электростатические транспортирующие элементы с плоскостью симметрии // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 1. С. 11–17.
URL: http://iairas.ru/mag/2014/abst1.php#abst2
39. *Голиков Ю.К., Чепарухин В.В.* Элементарные аппроксимации меридиональных траекторий в электростатическом поле разностного типа // Тезисы докл. VI Всесоюзного семинара по численным методам решения задач электронной оптики. Рязань, 1978.
40. *Голиков Ю.К., Чепарухин В.В., Уткин К.Г.* О фокусировке меридионального потока в поле разностного типа // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5, вып. 21. С. 1294–1296.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург (*Бердников А.С., Соловьёв К.В., Кузьмин А.Г., Масюкевич С.В., Титов Ю.А.,* $\boxed{\text{Голиков Ю.К.}}$)

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* $\boxed{\text{Голиков Ю.К.}}$)

Контакты: *Бердников Александр Сергеевич*, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 10.09.2019

CROSSED HARMONIC POTENTIALS WHICH ARE HOMOGENEOUS IN EULER' TERMS

A. S. Berdnikov[1], N. K. Krasnova[2], K. V. Solovyev[1,2], A. G. Kuzmin[1], S. V. Masyukevich[1], Yu. A. Titov[1], $\boxed{\textbf{Yu. K. Golikov}^{1,2}}$

[1]*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg, Russia*
[2]*Peter The Great Saint Petersburg Polytechnic University, Russia*

This publication is a continuation of a series of works devoted to investigation of the properties of electron and ion optical systems and devices that use electric and magnetic fields uniform in Euler terms. For this type of electric and magnetic fields, the principle of similarity of the trajectories of Yu.K. Golikov is fulfilled. With the help of this principle it is possible to synthesize electron and ion optical systems with *a priori* specified unique properties. However, the effective use and optimization of such systems is hindered by the fact that the class of electric and magnetic fields homogeneous in Euler terms is not too large, and the analytical formulas for the scalar potentials of homogeneous fields are not numerous. In this paper, we consider a special class of fields, for which three-dimensional homogeneous and harmonic scalar potentials are decomposed into the sum of several two-dimensional functions, which individually do not have to be either formulas harmonic or homogeneous (the so-called "crossed potentials", also called in some cases potentials of difference type). Such potentials are a useful tool in the synthesis of electron and ion optical systems, since they allow us to divide the motion of charged particles in the meridional plane into two disjoint motions along two independent coordinates.As a result of the study, all possible analytical potentials for crossed homogeneous harmonic fields are obtained. In particular, it is shown that nontrivial solutions other than a superposition of the planar homogeneous harmonic functions are possible only for degrees of homogeneity equal to zero and one.

Keywords: electric fields; harmonic functions; functions homogeneous in Euler' terms; similarity principle for charged particle trajectories; analytical solutions of Laplace equation

REFERENCES

1. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers. I]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of Applied Physics], 2000, vol. 70, no. 2, pp. 91–94. (In Russ.).
2. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers. II]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of Applied Physics], 2000, vol. 70, no. 3, pp. 44–47. (In Russ.).
3. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. *Teoriya sinteza ehlektrostaticheskih ehnergoanalizatorov* [Theory of synthesis of electrostatic power analyzers]. Saint Petersburg, Polytechnical university, 2010. 409 p. (In Russ.).
4. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of Applied Physics], 2011, vol. 81, no. 2, pp. 9–15. (In Russ.).
5. Krasnova N.K. *Teoriya i sintez dispergiruyushchih i fokusiruyushchih ehlektronno-opticheskih sred*. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [The theory and synthesis of the dispersing and focusing electron-optical environments. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Saint Petersburg, 2013. 259 p. (In Russ.).
6. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [Analytical structures of

electric spectrographs the fields of which are expressed in a uniform generalized form]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 1, pp. 50–58. URL: http://iairas.ru/en/mag/2014/abst1.php#abst6 (In Russ.).

7. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [The generalized principle of similarity and its application in electronic spectrography]. *Prikladnaya fizika* [Applied physics], 2007, no. 2, pp. 5–11. (In Russ.).
8. Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R. [The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms]. *Pis'ma v ZhTF* [Letters in ZhTF], 2017, vol. 43, no. 3, pp. 39–43. DOI: 10.1134/S106378501702002X (In Russ.).
9. Berdnikov A.S., Gall L.N., Antonov A.S., Soloviev K.V. [Synthesis of Fringing Magnetic Fields for Static Mass Analyzers of the Spectrographic Type]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2018, vol. 15, no. 1, pp. 26–43. (In Russ.).
10. Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., Krasnova N.K., Solov'ev K.V. [Synthesis of Electrode Configurations that Conserve Fringing Electric Field Homogeneity in Euler Terms]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of Applied Physics], 2018, vol. 88, no. 4, pp. 609–613. (In Russ.). DOI: 10.21883/JTF.2018.04.45732.2483
11. Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., Krasnova N.K., Solov'ev K.V. [Application of the Donkin Formula in the Theory of Electrostatic Prisms]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of Applied Physics], 2018, vol. 88, no. 11, pp. 1711–1719. (In Russ.). DOI: 10.21883/JTF.2018.11.46635.2498
12. Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Applications of Donkin formula in the theory of reflecting and turning devices]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of Applied Physics], 2019, vol. 89, no. 12, pp. 1946–1963. (In Russ.). DOI: 10.21883/JTF.2019.12.48496.201-18
13. Berdnikov A.S., Averin I.A. [About impossibility of double focusing in the combined electric and magnetic fields uniform in Euler]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 67–70. (In Russ.).
14. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrogaphs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. I]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2015, vol. 12, no. 4, pp. 272–281. (In Russ.).
15. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrogaphs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. II. Conditions of high-order double focusing for two-cascade schemes]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 11–20. (In Russ.).
16. Berdnikov A.S., Averin I.A. [New approach to development of ion-optical schemes of static mass spectrographs on the basis of the non-uniform magnetic fields uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 89–95. (In Russ.).
17. Averin I.A., Berdnikov A.S. [Fringing fields of gridless electron spectrographs with electrostatic fields homogeneous in Euler terms]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 5–8 (In Russ.).
18. Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuhin V.V. *Raschet elementov elektrostaticheskich elektronno-opticheskich system. Uchebnoe posobie* [Calculation of elements of electrostatic electron-optical systems. Education book]. Leningrad, LPI Publ., 1984. 79 p. (In Russ.).
19. Golikov Yu.K., Solovyov K.V. *Elektrostaticheskie ionnye lovushki* [Electrostatic ion traps]. Saint-Petersburg, Saint-Petersburg Polytechnic University Publ., 2008. 152 p. (In Russ.).
20. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [The elementary analytical electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2, pp. 17–32. (In Russ.).
21. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2, pp. 147–165. (In Russ.).
22. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Universal expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 13–30. DOI: 10.18358/np-26-4-i1330 (In Russ.).
23. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Integral expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms and have non-integer orders of uniformity]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 31–42. DOI: 10.18358/np-26-4-i3142 (In Russ.).
24. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Quasi-polynomial 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler Terms]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 71–80. (In Russ.).
25. Krasnova N.K., Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Averin I.A. [On the Quasi-Polynomial 3D Potentials of Electric and Magnetic Fields]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 81–92. (In Russ.).
26. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Analysis of the general Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. № 4, pp. 63–71. DOI: 10.18358/np-27-4-i6371 (In Russ.).
27. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Whittak-

er' formula for 3D electric and magnetic potentials with a zero order of homogeneity and its consequencies]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 4, pp. 72–89. DOI: 10.18358/np-27-4-i7289 (In Russ.).
28. Golikov Yu.K. [Analytical ways of describing harmonic functions]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2, pp. 165–181. (In Russ.).
29. Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V. [Generalization of the Thomson formula for general harmonic functions]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2019, vol. 12, no. 2, pp. 32–48. (In Russ.). DOI: 10.18721/JPM.12203
30. Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V. [Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2019, vol. 12, no. 2, pp. 49–62. (In Russ.). DOI: 10.18721/JPM.12204
31. Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V. [Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2019, vol. 12, no. 3, pp. 26–44. (In Russ.). DOI: 10.18721/JPM.12303
32. Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V. [Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2019, vol. 12, no. 3, pp. 45–62. (In Russ.). DOI: 10.18721/JPM.12304
33. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Theorem on integration and differentiation of 3D electric and magnetic potentials which are homogeneous in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 107–119. DOI: 10.18358/np-27-3-i107119 (In Russ.).
34. Fihtengolc G.M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 1.* [Course of differential and integral calculus. Vol. 1], Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 616 p. (In Russ.).
35. Smirnov V.I. *Kurs vysshej matematiki. T. 1* [Course of the higher mathematics. Vol. 1], Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russ.).
36. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [On homogeneity of scalar and vector potentials of electric and magnetic fields, homogeneous in Euler terms]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2017, vol. 5, no. 1, pp. 10–27. (In Russ.).
37. Gall L.N., Golikov Yu.K. [Achromatic electrostatic conveying systems with a plane of symmetry]. *Sb. trudov NTO AN SSSR "Nauchnoe priborostroenie. Pribory i sredstva avtomatizacii dlya nauchnyh issledovanij"* [Proc. of the NTO AN of the USSR "Scientific instrumentation. Instruments and Automation Tools for Scientific Research"]. Leningrad, Nauka Publ., 1987, pp. 11–15. URL: http://iairas.ru/mag/abst_90s.php?y=87&n=2#abst2 (In Russ.).
38. Gall L.N., Golikov Yu.K. [Achromatic electrostatic conveying systems with a plane of symmetry]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 1, pp. 11–17. (In Russ.). URL: http://iairas.ru/mag/2014/abst1.php#abst2
39. Golikov Yu.K., Cheparukhin V.V. [Elementary approximations of meridional trajectories in a difference type electrostatic field]. *Tezisy dokl. VI Vsesoyuznogo seminara po chislennym metodam resheniya zadach elektronnoj optiki* [Abstracts of VI All-USSR seminar on numerical methods for solving problems of electron optics]. Ryazan, 1978. (In Russ.).
40. Golikov Yu.K., Cheparukhin V.V., Utkin K.G. [On focusing the meridional flow in a difference type field]. *Pis'ma v ZhTF* [Letters in ZhTF], 1979. vol. 5, iss. 21, pp. 1294–1296. (In Russ.).

Contacts: *Berdnikov Aleksandr Sergeevich*,
asberd@yandex.ru

Article received by the editorial office on 10.09.2019