

УДК 541.13

© Б. П. Шарфарец, 2019

## О ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ

Рассматриваются вопросы диссипации и баланса мощности в стационарном электроосмотическом процессе в цилиндрическом капилляре, заполненном жидкостью, к которой приложены электроды с постоянной разностью потенциалов. Изучаются процессы диссипации под влиянием вязкого трения и выделения джоулева тепла. Получены простые, достаточно точные выражения, позволяющие легко оценить влияние параметров процесса на диссипацию энергии. Проведенный анализ позволит оптимизировать конструкцию электрокинетического преобразователя нового типа, основанную на применении электроосмоса и изложенную в предыдущих публикациях автора, частично указанных в данной работе.

*Кл. сл.:* электрокинетические явления, электроосмос, диссипативная функция, вязкое трение, джоулево тепло, баланс энергии, перенапряжение

### ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В работах [1–6] начат цикл статей, описывающих физические модели для реализации излучателя нового вида, основанного на использовании такого процесса электрокинетических явлений, как электроосмос. В этом цикле будут описаны физические процессы, проясняющие принцип действия этого излучателя. Одним из них является диссипативный процесс. Учет диссипации энергии в преобразователе является важным для оптимизации его конструкции.

В настоящей работе рассматриваются такие диссипативные явления, происходящие в стационарном электроосмотическом процессе, применительно к наполненному жидкостью цилиндрическому капилляру, как вязкое трение и выделение джоулева тепла. При этом ставится задача получения выражений для диссипативных членов, зависящих от всех параметров задачи.

### РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

#### Диссипативная функция для случая стационарного электроосмотического течения

Согласно [7, с. 653], при движении сплошной среды (жидкости, газа, деформируемого твердого тела) диссипативная функция (ДФ) вводится для характеристики сил внутреннего трения. Она представляет собой квадратичную форму компонент тензора скоростей деформаций с коэффициентами, характеризующими вязкость среды.

В [7, с. 653] ДФ для *сосредоточенных* систем, по определению, равна *половине полной механиче-*

*ской энергии, рассеивающейся в единицу времени*, поэтому в настоящей работе следуем этому определению с той поправкой, что для *распределенной* системы ДФ равна *половине механической энергии, рассеивающейся в единицу времени в единице объема*. Так, для вязкой несжимаемой жидкости изменение механической энергии в объеме  $V$  определяется выражением [8, с. 79]; [9, с. 16] (здесь и далее при записи тензорных величин используется правило суммирования Эйнштейна)

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{\eta}{2} \int_V \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dv. \quad (1)$$

Здесь  $E$  — кинетическая энергия в объеме  $V$ ;  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ ;  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ;  $\mathbf{v}$  — вектор скорости течения жидкости;  $\eta$  — динамическая вязкость жидкой среды.

Записываем (1) в виде в соответствии с соображением, приведенным выше курсивом:

$$-\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} = \int_V \Phi dv,$$

где через  $\Phi$  обозначена ДФ единицы объема. Из (1) получаем

$$\Phi = \frac{\eta}{4} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 = \eta \varepsilon_{ik}^2. \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$ ,  $i, k = 1, 2, 3$  — тензор скоростей деформации вязкой несжимаемой жидкости.

Согласно [10, с. 413], выражение для  $\varepsilon_{ki}^2$  имеет вид

$$\varepsilon_{ki}^2 = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2 \right]. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), имеем для несжимаемой вязкой жидкости

$$\Phi = \eta \varepsilon_{ik}^2 = \eta \left\{ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2 \right] \right\}. \quad (4)$$

Именно в таком виде представлена ДФ для вязкой несжимаемой жидкости в работе [7, с. 653]. Это выражение отличается от аналогичного выражения, представленного в работе [11, с. 342] или, например, в [12], коэффициентом 1/2.

Для записи ДФ в случае однородной сжимаемой вязкой жидкости воспользуемся выражением для скорости убывания энергии такой жидкости, представленной в работе [8, с. 423, выражение (79.1)]. Диссипативная составляющая потерь выглядит там так:

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{дисс}} = \int_V \left[ \frac{\eta}{4} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)^2 + \frac{1}{2} \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] dv.$$

Отсюда получаем для ДФ соответствующей жидкости

$$\Phi = \frac{\eta}{4} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)^2 + \frac{1}{2} \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2. \quad (5)$$

Преобразуем член  $\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)^2$ .

Для недиагональных членов матрицы  $i \neq k$  имеем

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 = 2 \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Для диагональных членов  $i = k$  имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)^2 &= \\ &= 4 \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{3}{9} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] = \\ &= 4 \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Окончательно для (5) с учетом (6), (7) имеем

$$\begin{aligned} \Phi &= \eta \left\{ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2 \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})^2. \quad (8) \end{aligned}$$

Именно в таком виде представлена ДФ в работе [7, с. 653] с той только разницей, что вместо динамической  $\eta$  и объемной вязкости  $\zeta$  фигурируют символы  $\mu$  и  $\lambda$ , которыми обычно обозначают параметры Ламе и которые связаны с  $\eta$  и  $\zeta$  соотношениями:  $\eta = \mu$ ;  $\zeta = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ . В работе [11, с. 342] функция  $\Phi$  вдвое больше.

Перепишем (8) в терминах тензора скоростей деформации [7, с. 653]:

$$\Phi = \eta \left[ \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) \right] + \frac{1}{2} \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})^2. \quad (9)$$

Согласно [7, с. 653], если для данной среды ДФ известна, то вязкие тензоры напряжений  $\sigma'_{ik}$  вычисляются из равенств (см. выражения для  $\sigma'_{ik}$ , например, в [8, с. 71])

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ik}}.$$

По определению, ДФ как функция, характеризующая рассеяние механической энергии, превращающейся в теплоту, определяет половину энергии, рассеянной в единице объема в единицу времени. Таким образом, в объеме  $V$  в единицу времени производится количество теплоты  $q$ , равное

$$q = 2 \int_V \Phi \, dv. \quad (10)$$

#### Диссипация энергии в капилляре вследствие вязкого трения

Найдем величину энергии  $q$ , выделяемую в единицу времени в цилиндрическом капилляре радиусом  $a$  и длиной  $l$  при наличии в нем электроосмотического стационарного течения. Пусть ось капилляра совпадает с осью  $z$ . Электроосмотическая скорость в цилиндрическом капилляре при приложении стационарного электрического поля  $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ ,  $E = \text{const}$  имеет только одну отличную от нуля составляющую  $v_z(r) = v_3(r)$ , определяемую выражением [13, с. 161]

$$v_3(r) = \left[ 1 - \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} \right] \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta}}{\eta} E.$$

Здесь  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $\tilde{\zeta}$  — электрокинетический потенциал;  $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 k_B T}{2(Ze)^2 c_0}}$  — длина Дебая, где  $c_0$  — равновесная концентрация ионов<sup>1</sup> вне двойного элект-

рического слоя (ДЭС) (см., например, [1]);  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $r$  — текущий радиус капилляра.

Перепишем выражение для электроосмотической скорости в виде

$$v_3(r) = v_{\text{eo}} \left[ 1 - \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} \right], \quad (11)$$

где через  $v_{\text{eo}}$  обозначена электроосмотическая скорость, определяемая соотношением Гельмгольца—Смолуховича [13, с. 159]

$$v_{\text{eo}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta}}{\eta} E. \quad (12)$$

Обычно при рассмотрении электроосмотического течения справедливо допущение о несжимаемости жидкости, поэтому при оценке потерь пользуемся выражением (4) для ДФ. В этом случае выражение (4) преобразуется к виду

$$\Phi = \frac{1}{2} \eta \left[ \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Здесь  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , где  $(x, y, z)$  — декартовы координаты. Кроме того, учитываем соотношение  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  для цилиндрических координат.

Вычисление (13) для скорости  $v_3$ , определяемой выражением (11), дает

$$\Phi = \frac{1}{2 \lambda_D^2} \eta v_{\text{eo}}^2 \frac{I_1^2(r/\lambda_D)}{I_0^2(a/\lambda_D)}. \quad (14)$$

где  $v_{\text{eo}}$  определено выражением (12).

Подставляя (14) в (10), получаем количество выделяемой за единицу времени теплоты в объеме капилляра  $V = \pi a^2 l$  вследствие наличия вязкости

$$Q = \frac{\pi l}{\lambda_D^2} \frac{\eta v_{\text{eo}}^2}{I_0^2(a/\lambda_D)} \int_0^a I_1^2(r/\lambda_D) r \, dr. \quad (15)$$

Вычисление (15) дает

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\pi a^2 l}{\lambda_D^2} \eta v_{\text{eo}}^2 \left[ \frac{I_1^2(a/\lambda_D)}{I_0^2(a/\lambda_D)} + 2 \frac{\lambda_D}{a} \frac{I_1(a/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} - 1 \right]. \quad (16)$$

Рассмотрим далее поведение присутствующей в (16) функции безразмерного параметра  $a/\lambda_D$

$$\Psi_1(a/\lambda_D) = \frac{a^2}{\lambda_D^2} \left[ \frac{I_1^2(a/\lambda_D)}{I_0^2(a/\lambda_D)} + 2 \frac{\lambda_D}{a} \frac{I_1(a/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} - 1 \right].$$

<sup>1</sup> Здесь и далее под концентрацией ионов  $i$ -го вида  $c_i$  принимаем отношение числа ионов  $N_i$  в объеме  $V$  к самому объему  $V$ :  $c_i = \frac{N_i}{V}$ , т.е.  $c_i$  — число ионов  $i$ -го вида в единице объема.

График этой функции, изображенный на рис. 1, позволяет предположить, что справедливо представление

$$\Psi_1(a/\lambda_D) \approx \frac{a}{\lambda_D} + b.$$

Численная проверка в интервале значений безразмерного параметра  $a/\lambda_D$  на дискретном множестве точек в интервале  $\frac{a}{\lambda_D} \in [500, 3000]$  показывает, что  $\Psi_1\left(\frac{a}{\lambda_D}\right) = \frac{a}{\lambda_D} - 1$  (рис. 1). Поэтому заключаем, что  $b = -1$  и окончательно имеем

$$\Psi_1\left(\frac{a}{\lambda_D}\right) \approx \frac{a}{\lambda_D} - 1. \quad (17)$$

Введем функцию невязки

$$\Delta_1\left(\frac{a}{\lambda_D}\right) = \Psi_1\left(\frac{a}{\lambda_D}\right) - \left(\frac{a}{\lambda_D} - 1\right).$$

На рис. 2 и 3 приведены графики функции  $\Delta_1(a/\lambda_D)$  в разных диапазонах.

Из рис. 2 видно, что приближение (17) становится достаточно пригодным, начиная со значения  $\frac{a}{\lambda_D} \geq 4$ . Поэтому выражение (16) при  $\frac{a}{\lambda_D} \geq 4$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Q &= \\ &= \frac{1}{2} \eta v_{\infty}^2 \pi l \frac{a^2}{\lambda_D^2} \left[ \frac{I_1^2(a/\lambda_D)}{I_0^2(a/\lambda_D)} + 2 \frac{\lambda_D}{a} \frac{I_1(a/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} - 1 \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \eta v_{\infty}^2 \pi l \left( \frac{a}{\lambda_D} - 1 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Из этого выражения видно, что диссипация пропорциональна динамической вязкости жидкости  $\eta$ , квадрату электроосмотической скорости  $v_{\infty}^2$ , длине капилляра  $l$  и величине безразмерного параметра, равного отношению радиуса капилляра к длине Дебая  $\frac{a}{\lambda_D}$ .

Выражение (18) сразу демонстрирует различия в степени диссипации, например, для случаев, когда капилляр заполнен воздухом либо водой. Динамическая вязкость воздуха ( $\eta_{\text{возд}} = 1.76 \cdot 10^{-5}$  Па·с) на два порядка ниже, чем у воды ( $\eta_{\text{воды}} \approx 1 \cdot 10^{-3}$  Па·с).

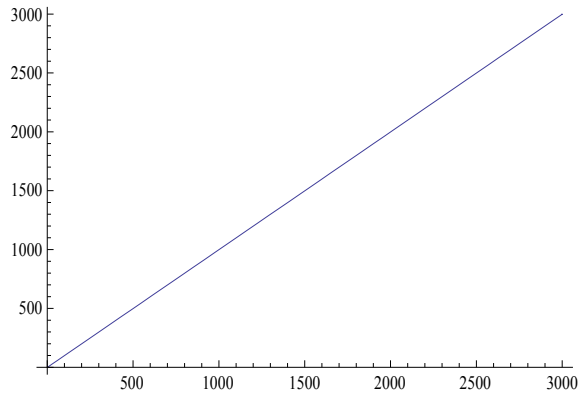


Рис. 1. График функции  $\Psi_1\left(\frac{a}{\lambda_D}\right)$ .  
Ось  $x$  —  $a/\lambda_D$ , ось  $y$  —  $\Psi_1$

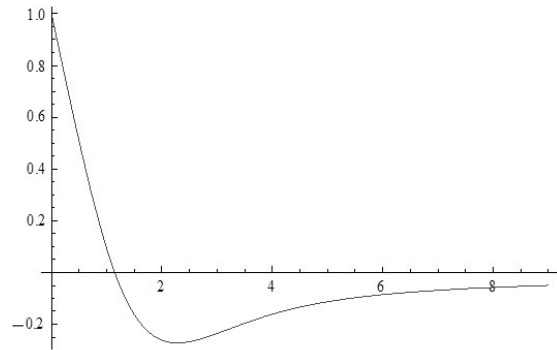


Рис. 2. График функции невязки  $\Delta_1\left(\frac{a}{\lambda_D}\right)$  в крупном масштабе.  
Ось  $x$  —  $a/\lambda_D$ , ось  $y$  —  $\Delta_1$

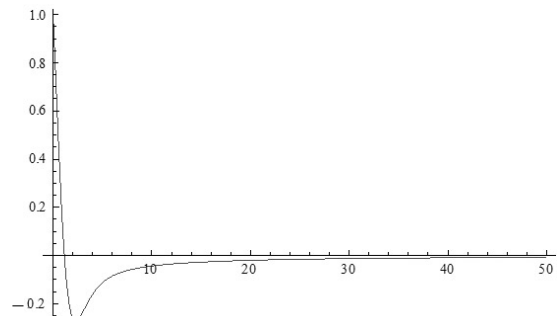


Рис. 3. График функции невязки  $\Delta_1\left(\frac{a}{\lambda_D}\right)$  в мелком масштабе.  
Ось  $x$  —  $a/\lambda_D$ , ось  $y$  —  $\Delta_1$

### Диссипация, вызванная протеканием электрического тока в жидкости

Наряду с диссипацией энергии по причине вязкого трения в электроосмотических процессах происходит рассеяние энергии вследствие наличия в жидкости электрического тока, приводящего к потерям энергии вследствие нагрева жидкости.

Прежде чем перейти собственно к потерям, вызванным выделением джоулева тепла, рассмотрим кратко такое явление, как *электрохимическое перенапряжение*. Перенапряжением в электрохимии называется отклонение значения электродного потенциала от равновесного при пропускании электрического тока. Величина перенапряжения зависит от плотности тока и обычно тем больше, чем больше плотность тока. При одном и том же значении плотности тока перенапряжение зависит от природы электрода и типа протекающей на его поверхности реакции, состава раствора, температуры и других факторов и может колебаться от долей мВ до нескольких В [14, с. 66].

Так в [15, с. 30] приведено соотношение, связывающее разность потенциалов  $\Delta\Phi_e$ , приложенную к электродам с разностью потенциалов  $\Delta\Phi_{el}$ , приводящую к появлению электрического тока в электролите (т.е. приложенную непосредственно на границах электролита) и перенапряжению  $\eta$ :

$$\Delta\Phi_e = \Delta\Phi_{el} + \eta.$$

Количество выделяемого в единицу времени в единице объема электролита джоулева тепла  $W$ , называемого *удельной мощностью тока* (УМТ) (или *плотностью тепловой мощности тока*), определяется законом Джоуля—Ленца, который в линейной изотропной среде записывается так [16, § 33, 34]:<sup>2</sup>

$$W = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_{el}. \quad (19)$$

Здесь  $\mathbf{E}_{el} = \frac{\Delta\Phi_{el}}{l}$  — вектор напряженности электрического поля, приложенного к электролиту толщиной  $l$ ;  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока.

Найдем мощность потерь вследствие выделения джоулева тепла  $W$  в рассмотренном выше капилляре при электроосмотическом процессе.

Выражения для искомых плотности тока в жидкости и удельной проводимости даны, например, в следующих работах по электрохимии

[13, 15, 17]. Здесь следуем [17].

Вначале определяется суммарная скорость движения ионов. Выражение для вектора суммарной скорости движения ионов  $i$ -го вида  $\mathbf{U}_i$  под воздействием электрического поля, диффузии и движения самой жидкости имеет следующий вид [17, с. 24]:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{v}_{ei} - D_i \frac{\nabla c_i}{c_i} + \mathbf{v} = u_i \mathbf{E}_{el} - \mathbf{v}_{D_i} + \mathbf{v}. \quad (20)$$

Здесь  $\mathbf{v}_{ei} = u_i \mathbf{E}_{el}$  — миграционная скорость иона под воздействием электрического поля  $\mathbf{E}_{el}$ ;  $u_i$  — подвижность иона (знак подвижности совпадает со знаком заряда иона);  $\mathbf{v}_{D_i} = D_i \frac{\nabla c_i}{c_i}$  — скорость иона, вызванная диффузионными процессами;  $\mathbf{v}$  — скорость самой жидкой среды.

Совокупная плотность тока  $\mathbf{j}_i$  рассматриваемого вида ионов получается умножением в (20) совокупной скорости  $\mathbf{U}_i$  на величину плотности заряда этих ионов  $\rho_{ei} = c_i e_i$ , где  $e_i$  — заряд иона. Для иона  $i$ -го вида получено [17, с. 24]:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_i &= \rho_{ei} u_i \mathbf{E}_{el} - e_i D_i \nabla c_i + \rho_{ei} \mathbf{v} = \\ &= \sigma_i \mathbf{E}_{el} - D_i \nabla \rho_{ei} + \rho_{ei} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для совокупной плотности тока с учетом ионов всех типов суммирование последних уравнений дает

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{j}_i = \sum_{i=1}^N (\sigma_i \mathbf{E}_{el} - D_i \nabla \rho_{ei} + \rho_{ei} \mathbf{v}) = \\ &= \sigma \mathbf{E}_{el} - \sum_{i=1}^N (D_i \nabla \rho_{ei}) + \rho_e \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\rho_e = \sum_{i=1}^N \rho_{ei}$  — совокупная плотность заряда

в жидкости;  $\sigma_i = \rho_{ei} u_i$  и  $\sigma = \sum_{i=1}^N \rho_{ei} u_i$  — парциальная и полная удельная проводимости соответственно. В (21), (22) первый член справа характеризует миграционную составляющую плотности тока (ток проводимости), второй — его составляющую, вызванную диффузионными процессами, и третий член — его конвективную составляющую.

Далее, допуская наличие в жидкости только одних пар ионов одинаковой валентности, но разного знака (бинарный электролит), запишем вы-

<sup>2</sup> Носители заряда в каждой точке движутся вдоль направления вектора  $\mathbf{E}_{el}$ . Поэтому векторы  $\mathbf{E}_{el}$  и  $\mathbf{j}$  в изотропных средах коллинеарны.

<sup>3</sup> В работе [17, с. 24] в выражении (2.17), соответствующем выражению (21) настоящей работы, допущена описка, учтенная в (21).

ражение (22) для плотности тока, не подразумевая выполнения условия электронейтральности, т.е.  $\rho_e^+ + \rho_e^- \neq 0$ . Имеем:  $\rho_{e1} = \rho_e^+$ ,  $\rho_{e2} = \rho_e^-$ ,  $u_1 = u^+$ ,  $u_2 = u^-$ ,  $e_1 = q$ ,  $e_2 = -q$ . Здесь  $q$  — заряд иона в единицах заряда протона. Таким образом,  $\rho_e^+ = qc_1$ ,  $\rho_e^- = -qc_2$ , где  $c_1$ ,  $c_2$  — концентрации положительных и отрицательных ионов соответственно. Как отмечено выше, подвижность отрицательного иона является отрицательной величиной. Подставляя приведенные величины в (22), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{i=1}^2 (\rho_{ei} u_i \mathbf{E}_{el} - D_i \nabla \rho_{ei} + \rho_{ei} \mathbf{v}) = \\ &= (\rho_e^+ u_1 - \rho_e^- |u_2|) \mathbf{E}_{el} - \\ &\quad - (D_1 \nabla \rho_e^+ - D_2 \nabla \rho_e^-) + (\rho_e^+ + \rho_e^-) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (23)$$

Как видно, конвективная составляющая плотности тока при  $\rho_e^+ + \rho_e^- \neq 0$  отлична от нуля.

Вычислим удельную мощность тока  $W = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_{el}$  (19) применительно к электроосмотическому процессу в рассмотренном выше капилляре для бинарного электролита, плотность тока в котором описывается выражением (23).

Перепишем выражение (23), подставив соответствующие функции и максимально его упростив. Учтем, что  $\rho_e^+ + \rho_e^- = \rho_e$ . Далее, согласно [13, с. 149],

$$\begin{aligned} \rho_e(r) &= -\varepsilon \varepsilon_0 \Delta \varphi(r) = \\ &= -\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\lambda_D^2} \varphi(r) = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta}}{\lambda_D^2} \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)}, \quad (0 < r < a). \end{aligned} \quad (24)$$

Кроме того, согласно [13, с. 149, выражение (8.38)], градиенты  $\nabla \rho_e^+$  и  $\nabla \rho_e^-$  ортогональны вектору  $\mathbf{E}_{el}$  внешнего стационарного электрического поля, поэтому слагаемое  $D_1 \nabla \rho_e^+ - D_2 \nabla \rho_e^-$  в (23) на величину  $W$  влияния не оказывает (см. (19)). Далее, примем для простоты равенство подвижностей отрицательного и положительного ионов  $u_1 = |u_2| = u$  и учтем, что

$$\rho_e^+ u_1 - \rho_e^- |u_2| = u(c^+ q + c^- q) = uq(c^+ + c^-).$$

Тогда, согласно выражению для концентраций положительного и отрицательного ионов в приближении Дебая—Хюккеля [13, с. 148, выражение (8.33)], сумма концентраций равна<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Выражение (8.33) в [13] относится к плоской границе раздела, но имеет совершенно аналогичную структуру, что вновь приводит к равенству (24).

$$c^+ + c^- = 2c_0,$$

где  $c_0$  — равновесная концентрация каждого из ионов.

С учетом сказанного получаем следующее выражение для  $\mathbf{j}$ :

$$\mathbf{j} = 2c_0 u q \mathbf{E}_{el} + \rho_e \mathbf{v}.$$

Здесь  $\mathbf{v} = (0, 0, v_3)$ , где  $v_3$  — электроосмотическая скорость в капилляре (11), (12).

Для УМТ  $W$  получаем:

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_{el} = 2c_0 u q \mathbf{E}_{el} \cdot \mathbf{E}_{el} + \\ &\quad + \rho_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_{el} = 2c_0 u q E_{el}^2 + \rho_e v_3 E_{el}. \end{aligned}$$

Подставляя в последнюю формулу выражения (24) для  $\rho_e$  и (11) для  $v_3$ , окончательно получаем

$$\begin{aligned} W &= 2c_0 u q E^2 - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta} v_{eo}}{\lambda_D^2} \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} \times \\ &\quad \times \left[ 1 - \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} \right] E. \end{aligned} \quad (25)$$

Сравнение ДФ (14) и УМТ (25) показывает, что обе эти функции пропорциональны квадрату амплитуды вектора электрической напряженности  $E$ .

Найдем диссипирующую в единицу времени энергию  $q_I$  за счет выделения джоулева тепла во всем объеме капилляра, подставляя (25) в следующее выражение:

$$q_I = 2\pi l \int_0^a W r dr. \quad (26)$$

Вычисления дают следующий результат

$$\begin{aligned} q_I &= \\ &= 2\pi l \int_0^a \left( 2c_0 u q E_{el}^2 - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta} v_{eo} E_{el}}{\lambda_D^2} \left( \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} - \left( \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} \right)^2 \right) \right) r dr = \\ &= 2\pi l \left[ 2c_0 u q E_{el}^2 \frac{a^2}{2} - \varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta} v_{eo} E_{el} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{a}{\lambda_D} \frac{I_1(a/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{\lambda_D^2} \left( 1 - \left( \frac{I_1(a/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} \right)^2 \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассчитаем численно входящую в последнее выражение функцию безразмерного параметра  $a/\lambda_D$ :

$$\Psi 2\left(\frac{a}{\lambda_D}\right) = \frac{a}{\lambda_D} \frac{I_1(a/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{\lambda_D^2} \left(1 - \left(\frac{I_1(a/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)}\right)^2\right). \quad (28)$$

График функции (28) в зависимости от аргумента  $\frac{a}{\lambda_D}$  показан на рис. 4. Аналогично со случаем ДФ принимаем, что асимптотически при больших значениях аргумента имеет место равенство

$$\Psi 2\left(\frac{a}{\lambda_D}\right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\lambda_D} - 1\right) \approx \Psi 1\left(\frac{a}{\lambda_D}\right) / 2.$$

График функции невязки  $\Delta 2\left(\frac{a}{\lambda_D}\right) = \Psi 2\left(\frac{a}{\lambda_D}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\lambda_D} - 1\right)$  представлен на рис. 5 (после  $\frac{a}{\lambda_D} \geq 4$  функция невязки  $\Delta 2\left(\frac{a}{\lambda_D}\right)$  быстро стремится к нулю).

Поэтому, как и в случае ДФ, величину  $q_I$  из (27) можно при  $\frac{a}{\lambda_D} \geq 4$  аппроксимировать выражением

$$q_I \approx 2\pi l \left( 2c_0 u q E_{cl}^2 \frac{a^2}{2} - \varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta} v_{co} E_{cl} \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\lambda_D} - 1\right) \right) = \pi l \left( 2c_0 u q E_{cl}^2 a^2 - \varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta} v_{co} E_{cl} \left(\frac{a}{\lambda_D} - 1\right) \right). \quad (29)$$

Окончательно имеем для суммарной мощности потерь в рассмотренном капилляре  $q_\Sigma = Q + q_I$ , где  $Q$  определено выражением (18)

$$q_\Sigma = Q + q_I \approx \pi l \left[ \frac{1}{2} \eta v_{co}^2 \left(\frac{a}{\lambda_D} - 1\right) + \left( 2c_0 u q E_{cl}^2 a^2 - \varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta} v_{co} E_{cl} \left(\frac{a}{\lambda_D} - 1\right) \right) \right]. \quad (30)$$

Анализ выражения (30) показывает, что суммарная мощность потерь пропорциональна длине

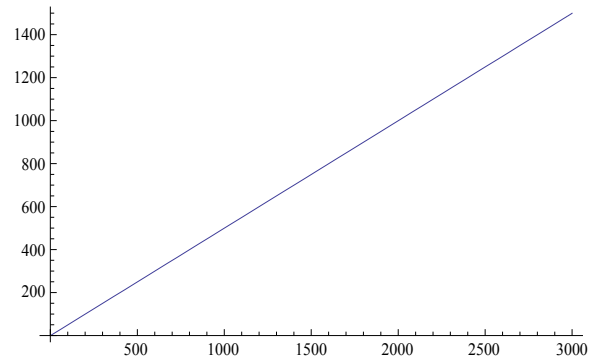


Рис. 4. График функции  $\Psi 2\left(\frac{a}{\lambda_D}\right)$ .  
Ось  $x$  —  $a/\lambda_D$ , ось  $y$  —  $\Psi 2$

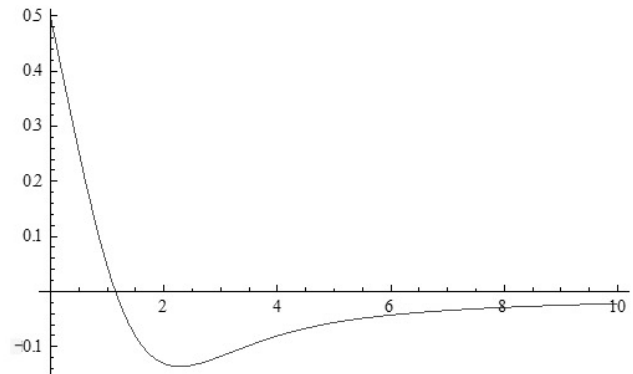


Рис. 5. График функции невязки  $\Delta 2\left(\frac{a}{\lambda_D}\right)$ .  
Ось  $x$  —  $a/\lambda_D$ , ось  $y$  —  $\Delta 2$

капилляра, квадрату амплитуды вектора  $E_{cl}$ , отношению радиуса капилляра к длине Дебая  $\frac{a}{\lambda_D}$  (или иначе, величине пор). Кроме того, величина суммарной мощности потерь  $q_\Sigma$  линейно зависит от динамической вязкости рабочей жидкости  $\eta$ , дзета-потенциала  $\tilde{\zeta}$ , подвижности ионов  $u$ , их концентрации  $c_0$ , заряда ионов  $q$ , а также диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ .

#### Баланс мощности при электроосмотическом потоке

Суммарная подводимая в электроосмотический процесс мощность равна

$$W_e = \Delta \Phi_e I,$$

где  $I$  — суммарный ток в электродах. В условиях,

Значения подвижности ионов и коэффициента диффузии [13, с. 145]

Характеристика	Ионы при $T = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$									
	H+	Ag+	K+	Li+	Na+	Br-	Cl-	F-	I-	OH-
Подвижность $u$ иона, $\times 10^{-8}\text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$	36.2	6.42	7.62	4.01	5.19	8.09	7.91	5.70	7.96	20.6
Коэффициент диффузии $D$ , $\times 10^{-9}\text{ м}^2/\text{с}$	9.31	1.65	1.96	1.03	1.33	2.08	2.03	1.46	2.05	5.30

когда электроосмотический процесс носит стационарный характер, что означает нулевой баланс приложенных сил, должен соблюдаться баланс подводимой к системе и теряемой в ней в единицу времени энергии. Это математически можно записать в виде  $W_e = q_{\Sigma} + \eta I$ , где  $q_{\Sigma}$  определяется в (30). Или в развернутом виде:

$$\Delta\Phi_e I = \eta I + \pi l \left[ \frac{1}{2} \eta v_{\text{co}}^2 \left( \frac{a}{\lambda_D} - 1 \right) + \left( 2c_0 u q E_{\text{el}}^2 a^2 - \varepsilon \varepsilon_0 \tilde{\zeta} v_{\text{co}} E_{\text{el}} \left( \frac{a}{\lambda_D} - 1 \right) \right) \right]. \quad (31)$$

Таким образом, уравнение (31) характеризует баланс подводимой в единицу времени энергии и энергии диссипации в стационарном электроосмотическом процессе.

В заключение для примера приведем в таблице значения некоторых величин [13, с. 145]. Кроме того,  $\tilde{\zeta} \approx 100\text{ мВ}$  [13, с. 159],  $\lambda_D \approx 10\text{ нм}$  [13, с. 150].

## ВЫВОДЫ

Выше рассмотрены вопросы баланса энергии в стационарном электроосмотическом процессе в цилиндрическом капилляре, к находящейся в котором жидкости с помощью электродов приложена разность потенциалов. Рассматривается диссипация энергии за счет вязкого трения и за счет выделения джоулева тепла. Приводятся в значительной степени упрощенные выражения, позволяющие оценивать величину указанных диссипативных процессов с помощью параметров, характеризующих происходящие физические явления. Корректный учет диссипативных потерь в упоминае-

мом в работе электрокинетическом излучателе позволит оптимизировать его конструкцию.

*Работа выполнена в ИАП РАН в рамках Государственного задания 075-00780-19-02 по теме № 0074-2019-0013 Министерства науки и высшего образования РФ.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев В.А., Шарфарец Б.П.* Об одном новом методе электро-акустического преобразования. Теория, основанная на электрокинетических явлениях. Ч. I. Гидродинамический аспект // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 2. С. 25–35. URL: <http://iairas.ru/mag/2018/full2/Art4.pdf>
2. *Сергеев В.А., Шарфарец Б.П.* Об одном новом методе электроакустического преобразования. Теория, основанная на электрокинетических явлениях. Ч. II. Акустический аспект // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 2. С. 36–44. URL: <http://iairas.ru/mag/2018/full2/Art5.pdf>
3. *Шарфарец Б.П.* Применение системы уравнений электрогидродинамики для математического моделирования нового способа электроакустического преобразования // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 4. С. 127–134. URL: <http://iairas.ru/mag/2018/full4/Art21.pdf>
4. *Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Шарфарец Б.П., Гуляев Ю.В.* Теоретическое обоснование нового метода электроакустического преобразования. Линейное приближение // Доклады АН. 2018. Т. 483, № 3. С. 260–264.
5. *Шарфарец Б.П.* Система уравнений электрогидродинамики применительно к электроосмотическим процессам // Научное приборостроение. 2019. Т. 29, № 1. С. 135–142. URL: <http://iairas.ru/mag/2019/full1/Art20.pdf>
6. *Шарфарец Б.П., Лебедев Г.А., Пыхов Д.С., Сергеев В.А., Сетин А.И.* Акустический преобразователь, построенный на использовании электрокинетических явлений // Морские интеллектуальные технологии. 2019. Т. 1, № 1. С. 147–152.



7. Физическая энциклопедия. Т. 1 / Под ред. А.М. Прохорова. М.: Советская энциклопедия, 1988. 704 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959. 700 с.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
11. Яворский Б.М., Детлаф А.А., Лебедев А.К. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. М.: Оникс, 2006. 1056 с.
12. Кортаев Б.А., Гамолит В.Я., Буров А.А. Диссипативная функция замкнутого потока несжимаемой вязкой жидкости // Сборник научных статей "Современная наука". 2011. № 2. С. 119–121.  
DOI: 10.23877/MS.TS.8.020
13. Bruus H. Theoretical microfluidics. Oxford University Press, 2008. 346 p.
14. Химическая энциклопедия. Т. 4. М.: БРЭ, 1995. 639 с.
15. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 464 с.
16. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. II. Электричество. М.: Наука, 1970. 431 с.
17. Electrohydrodynamics / Ed. by Antonio Castellanos. Wien: Springer-Verlag, 1998. 362 p.

**Институт аналитического приборостроения РАН,  
Санкт-Петербург**

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,  
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 26.03.2019

## ABOUT ENERGY DISSIPATION IN THE ELECTROSMOTIC PROCESS

**B. P. Sharfarets**

*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg, Russia*

The issues of dissipation and power balance in a stationary electroosmotic process in a cylindrical capillary filled with a liquid, to which electrodes with a constant potential difference are applied, are considered. The processes of dissipation under the influence of viscous friction and the release of Joule heat are studied. The dissipative function is considered for stationary electroosmotic flow of a viscous incompressible fluid and a homogeneous compressible viscous fluid. Then the dependences for the flows in the capillary are formulated. Simple, sufficiently accurate expressions are obtained that allow one to easily estimate the influence of the process parameters on the energy dissipation. The analysis will allow to optimize the design of a new type of electrokinetic transducer.

*Keywords:* electrokinetic phenomena, electroosmosis, dissipative function, viscous friction, Joule heat, energy balance, overvoltage

**Fig. 1.** The graph of the function  $\Psi_1(a/\lambda_D)$ .  
Axis  $x$  —  $a/\lambda_D$ , axis  $y$  —  $\Psi_1$

**Fig. 2.** Graph of the residual function  $\Delta_1(a/\lambda_D)$  on a large scale. Axis  $x$  —  $a/\lambda_D$ , axis  $y$  —  $\Delta_1$

**Fig. 3.** Graph of the residual function  $\Delta_1(a/\lambda_D)$  on a small scale. Axis  $x$  —  $a/\lambda_D$ , axis  $y$  —  $\Delta_1$

**Fig. 4.** The graph of the function  $\Psi_2(a/\lambda_D)$ .  
Axis  $x$  —  $a/\lambda_D$ , axis  $y$  —  $\Psi_2$

**Fig. 5.** Graph of the residual function  $\Delta_2(a/\lambda_D)$ .  
Axis  $x$  —  $a/\lambda_D$ , axis  $y$  —  $\Delta_2$

Table. Values of ion mobility and diffusion coefficient [13, p. 145]

### REFERENCES

1. Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [About one new method of electroacoustic transformation. A theory based on electrokinetic phenomena. Part I. The hydrodynamic aspect]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 25–35. DOI: 10.18358/np-28-2-i2535 (In Russ.).
2. Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [About one new method of electroacoustic transformation. A theory based on electrokinetic phenomena. Part II. The acoustic aspect]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 36–44. DOI: 10.18358/np-28-2-i3644 (In Russ.).
3. Sharfarets B.P. [Application of the system of electrohydrodynamics equations for mathematical modeling of a new method of electro-acoustic transformation]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 4, pp. 127–134. DOI: 10.18358/np-28-4-i127134 (In Russ.).
4. Kurochkin V.E., Sergeev V.A., Sharfarets B.P., Gulyaev Yu.V. [Theoretical justification of a new method of electro-acoustic transformation. Linear approach]. *Doklady Akademii Nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2018, vol. 483, no. 3, pp. 260–264.
5. Sharfarets B.P. [System electrohydrodynamics equations applied to electroosmotic processes]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2019, vol. 29, no. 1, pp. 135–142. DOI: 10.18358/np-29-1-i135142 (In Russ.).
6. Sharfarets B.P., Lebedev G.A., Pihov D.S., Sergeev V.A., Setin A.I. [Acoustic converter designed on the basis of use of electrokinetic phenomena]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii* [Marine intelligent technologies], 2019, vol. 1, no. 1, pp. 147–152. (In Russ.).
7. Prohorov A.M., ed. *Fizicheskaya ensiklopediya* [Physical encyclopedia]. Vol. 1. Moscow, Soviet encyclopedia Publ., 1988. 704 p. (In Russ.).
8. Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 736 p. (In Russ.).
9. Levich V.G. *Fiziko-himicheskaya gidrodinamika* [Physical and chemical hydrodynamics]. Moscow, GIFML Publ., 1959. 700 p. (In Russ.).
10. Lojcyanskij L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 840 p. (In Russ.).
11. Yavorskij B.M., Detlaf A.A., Lebedev A.K. *Spravochnik*

- po fizike dlya inzhenerov i studentov* [The reference book on physics for engineers and students]. Moscow, Oniks Publ., 2006. 1056 p. (In Russ.).
12. Korotaev B.A., Gamolich V.Ya., Burov A.A. [Dissipative function of the closed stream of incompressible viscous liquid]. *Sbornik nauchnyh statej "Sovremennaya nauka"* [Collection of scientific articles "Modern science"], 2011, no. 2, pp. 119–121.  
DOI: 10.23877/MS.TS.8.020 (In Russ.).
  13. Bruus H. *Theoretical microfluidics*. Oxford University Press, 2008. 346 p.
  14. *Himicheskaya enziklopediya* [Chemical encyclopedia]. Vol. 4. Moscow, BRE Publ., 1995. 639 p. (In Russ.).
  15. Newman J.S. *Electrochemical systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973. 432 p. (Russ. ed.: Newman J. *Elektrochimicheskie sistemy*. Moscow, Mir Publ., 1977. 464 p.).
  16. Saveljev I.V. *Kurs obshchej fiziki. T. II. Elektrichestvo* [Course of the general physics. V. II. Electricity]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 431 p. (In Russ.).
  17. Castellanos A., ed. *Electrohydrodynamics*. Wien, Springer-Verlag, 1998. 362 p.  
DOI: 10.1007/978-3-7091-2522-9

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,  
sharb@mail.ru

Article received by the editorial office on 26.03.2019