
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

УДК 539.19+ 532.5.032

© Б. П. Шарфаренц, 2019

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ

В работе получена замкнутая система электрогидродинамических (ЭГД) уравнений для такого специфического подраздела электрогидродинамики, как электроосмотические явления. ЭГД-система не содержит уравнения диффузии для поиска поля концентраций ионов. В работе они рассчитаны проще в приближении Дебая—Хюккеля. Это позволяет упростить расчет электроосмотических потенциалов и плотностей зарядов ионов. Проведена коррекция других уравнений ключевых ЭГД-системы с учетом особенностей электроосмотических процессов. Наличие в системе уравнения теплопроводности позволяет рассчитывать поле температуры в жидкости, что является крайне необходимым для поддержания необходимого температурного режима при реализации на практике излучателя нового типа.

Кл. сл.: электрогидродинамика, электроосмотический процесс, электрогидродинамическая система уравнений, приближение Дебая—Хюккеля, концентрация ионов

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был проведен анализ стандартной системы уравнений электрогидродинамики (ЭГД) в целях описания физических процессов, протекающих при возбуждении акустической энергии в электроакустическом преобразователе нового типа. Однако (и в [1] это было частично отмечено) стандартная математическая ЭГД-модель нуждается в адаптации к физическим процессам, происходящим в излучателе нового типа. Одной из важнейших физических особенностей изучаемого процесса является наличие двойного электрического слоя (ДЭС) на границах раздела фаз вне зависимости от наличия стороннего электрического поля. Известно, что в ДЭС нарушается условие электронейтральности электрических зарядов в жидкой фазе. В существующих ЭГД-моделях эта особенность не учитывается, в частности при записи уравнения закона сохранения энергии, в котором в выражении для источника джоулева тепла отсутствует учет ДЭС. Кроме того, в системе ЭГД-уравнений для вычисления концентраций электрических зарядов необходимо решать уравнения массопереноса (диффузии), что безусловно усложняет и без того непростую ЭГД-систему уравнений. Вместе с тем в электроосмотических моделях используется аппарат электрохимического потенциала (т.е. химического потенциала электрически заряженных частиц и квазичастиц (ионов, электронов и т.д.) в электрическом поле).

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Работа посвящена учету ряда особенностей электроосмотического процесса в стандартной ЭГД-модели, для чего проводится детализация отдельных уравнений ЭГД-системы, приводятся реальные оценки их параметров, основываясь в частности на материалах работы [2]. Кроме того, необходимо адаптировать ЭГД-систему под решение электроосмотических задач путем привлечения хорошо развитого аппарата электрохимического потенциала заряженных частиц.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

ЭГД-система

Выпишем вначале ЭГД-систему, заимствованную в [3] и представленную в [1] выражениями [1, (15)–(21)]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\sigma E^2}{\rho c_p}, \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (4)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \rho_e \mathbf{v} + \varepsilon_0 \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}), \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left(E^2 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T. \quad (7)$$

Здесь ρ — плотность; \mathbf{v} — поле вектора скорости; p — поле давления в жидкости; \mathbf{g} — вектор ускорения силы тяжести; \mathbf{f} — объемная внешняя сила; η — динамическая вязкость жидкости; T — абсолютная температура в жидкости; χ — коэффициент температуропроводности жидкости; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; σ — удельная электропроводность; \mathbf{E} — вектор напряженности приложенного электрического поля; φ — скалярный потенциал поля \mathbf{E} ; \mathbf{P} — вектор поляризации; \mathbf{j} — плотность тока; ρ_e — плотность электрического заряда в жидкости; ε_0 и ε — соответственно электрическая постоянная и диэлектрическая проницаемость; $E = |\mathbf{E}|$ — модуль вектора \mathbf{E} .

В приведенной ЭГД-системе уравнение (1) — это уравнение Навье—Стокса (сохранения импульса) для несжимаемой жидкости; (2) — уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости; (3) — уравнение сохранения энергии (теплопроводности); объемная сила \mathbf{f} в (1) принимается равной пондеромоторной силе (7), возникающей вследствие приложения к жидкости внешнего поля \mathbf{E} .

Представляется целесообразным откорректировать по крайней мере два уравнения из приведенной выше ЭГД-системы (1)–(7): уравнения (3) и (5). В обоих случаях для этого понадобится уточнить формулу (5) плотности тока \mathbf{j} . Поэтому первоначально обратимся к вопросу о плотности тока в жидкостях.

Плотность тока в жидкостях

Плотность тока в жидкости неразрывно связана с подвижностью ионов. Подвижность иона u представляет собой его среднюю скорость в жидкости при действии на него силы в 1 Н/м независимо от происхождения этой силы [4, с. 245]. Приведем ход рассуждений при определении ионной подвижности в случае действия поля \mathbf{E} (см., например, [5, с. 144]). Подвижность иона определяется из рассмотрения баланса сил трения Стокса \mathbf{F}_s и Кулона \mathbf{F}_c , действующих на ион с зарядом e . Сила Кулона \mathbf{F}_c равна $\mathbf{F}_c = e\mathbf{E}$. Сила Стокса \mathbf{F}_s

равна $\mathbf{F}_s = -6\pi\eta R_h \mathbf{v}_e$. Здесь R_h — гидродинамический радиус иона (он обычно превышает реальный радиус иона a вследствие процесса сольватации ионов, заключающегося в том, что вокруг иона концентрируется облако молекул, сцепленных с ним дипольными силами; в [5, с. 145] приводятся порядки этих величин: $a \sim 0.05$ нм; $R_h \sim 0.2$ нм). Баланс этих сил при скорости \mathbf{v}_e дает

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_s &= 0 \Rightarrow e\mathbf{E} = 6\pi\eta R_h \mathbf{v}_e \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{v}_e &= \frac{e}{6\pi\eta R_h} \mathbf{E} \equiv u\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{v}_e = \frac{e}{6\pi\eta R_h} \mathbf{E} \equiv u\mathbf{E} \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= \frac{e}{6\pi\eta R_h}, \end{aligned}$$

где u — подвижность иона. Очевидно, что знак подвижности u совпадает со знаком заряда иона. Как видно из последнего выражения, в случае рассмотрения подвижности ионов u в нарушение приведенного выше определения заряд иона e искусственно внесен в определение подвижности из соображения удобства. В [5, с. 145] приведены величины подвижностей некоторых ионов.¹

При определении плотности тока кроме рассмотренных выше сил Стокса и Кулона обычно рассматривают еще одну силу, вызванную давлением на ион со стороны других ионов. Это давление определяется в приближении идеального газа выражением $p = ck_B T$, а сама сила (обозначим ее

\mathbf{F}_B) равна $\mathbf{F}_B = -\frac{1}{c} \nabla (ck_B T)$ [2, с. 22]. Здесь постоянная Больцмана k_B равна $k_B = 1.38064852$ Дж/К.

Коэффициент диффузии i -го иона D_i связан с его подвижностью соотношением Эйнштейна [4, с. 258]² $D_i = u_i k_B T$.

Очевидно, что плотность тока \mathbf{j}_{im} однопольных ионов с зарядом e_i , связанная только со скоростью \mathbf{v}_{ei} определяется домножением миграционной скорости на плотность заряда этих ионов $\rho_{ei} = c_i e_i$, т. е. выражением $\mathbf{j}_{im} = c_i e_i \mathbf{v}_{ei} = \rho_{ei} \mathbf{v}_{ei} = \rho_{ei} u_i \mathbf{E}$ (ток \mathbf{j}_{im} называется миграционным [4, глава 11], [5, с. 157]). Используя предыдущее соотношение, а также соотношения $\mathbf{j}_{im} = \sigma_i \mathbf{E}$ и $\mathbf{v}_{ei} = u_i \mathbf{E}$, легко

¹ При увеличении температуры подвижность ионов в газах и жидкостях ведет себя по разному. В газах с ростом температуры подвижность падает, а в жидкостях растет [2, с. 23–24]. Поэтому, как будет очевидно далее, падает и растет удельная проводимость соответственно газа и жидкости.

² Приведенная в [4, с. 258] формула адаптирована здесь применительно к отдельному иону (см. также [6]).

получить выражение для удельной ионной проводимости σ_i для рассматриваемого типа ионов [5, с. 145]: $\sigma_i = c_i e_i u_i = \rho_{ei} u_i$.

Далее выпишем выражение для вектора суммарной скорости движения этих ионов \mathbf{U}_i под воздействием указанных сил, а также с учетом движения самой жидкости [2, с. 24]:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{v}_{ei} - D_i \frac{\nabla c_i}{c_i} + \mathbf{v} = u_i \mathbf{E} - \mathbf{v}_{D_i} + \mathbf{v}. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{v}_{ei} = u_i \mathbf{E}$ — миграционная скорость рассматриваемых ионов; $\mathbf{v}_D = D_i \frac{\nabla c_i}{c_i}$ — их скорость, вызванная диффузионными процессами, и \mathbf{v} — скорость самой среды.

Совокупная плотность тока рассматриваемого типа ионов получается умножением в (8) совокупной скорости i -го вида ионов \mathbf{U}_i на величину плотности заряда этих ионов $\rho_{ei} = c_i e_i$. Для иона i -го вида получено [2, с. 24], [4, с. 249]³

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_i &= \rho_{ei} u_i \mathbf{E} - e_i D_i \nabla c_i + \rho_{ei} \mathbf{v} = \\ &= \rho_{ei} u_i \mathbf{E} - D_i \nabla \rho_{ei} + \rho_{ei} \mathbf{v} = \mathbf{j}'_i + \rho_{ei} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{j}'_i = \rho_{ei} u_i \mathbf{E} - D_i \nabla \rho_{ei} = \sigma_i \mathbf{E} - D_i \nabla \rho_{ei}, \quad (9a)$$

Для совокупной плотности тока с учетом ионов всех типов суммирование последних уравнений дает:

$$\mathbf{j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{j}_i = \sum_{i=1}^N (\rho_{ei} u_i \mathbf{E} - D_i \nabla \rho_{ei} + \rho_{ei} \mathbf{v}) = \mathbf{j}' + \rho_e \mathbf{v}, \quad (10)$$

$$\mathbf{j}' = \sum_{i=1}^N (\rho_{ei} u_i \mathbf{E} - D_i \nabla \rho_{ei}) = \sigma \mathbf{E} - \sum_{i=1}^N D_i \nabla \rho_{ei}, \quad (10a)$$

где $\rho_e = \sum_{i=1}^N \rho_{ei}$ — совокупная плотность заряда

в жидкости; $\sigma_i = \rho_{ei} u_i$ и $\sigma = \sum_{i=1}^N \rho_{ei} u_i$ — парциальная и полная удельная проводимости соответственно. В (9a), (10a) \mathbf{j}'_i и \mathbf{j}' — соответственно парциальная и совокупная часть плотности тока, равная сумме токов проводимости и токов, вызванных диффузией ионов; $\rho_{ei} \mathbf{v}$ и $\rho_e \mathbf{v}$ — их конвективная часть.

Уравнения типа (9), (10) носят название соотношения Нернста—Планка (см., например, [5, с. 57]).

Далее, допуская наличие в жидкости только па-

ры ионов одинаковой валентности, но разного знака, запишем для них выражение (10) для плотности тока, не подразумевая выполнения условия электронейтральности, т.е. $\rho_e^+ + \rho_e^- \neq 0$. Имеем $\rho_{e1} = \rho_e^+$, $\rho_{e2} = \rho_e^-$, $u_1 = u^+$, $u_2 = u^-$, $e_1 = q$, $e_2 = -q$. Здесь q заряд иона в единицах заряда протона. Таким образом, $\rho_e^+ = qc_1$, $\rho_e^- = qc_2$, где c_1 , c_2 — концентрации положительного и отрицательного зарядов соответственно. Как отмечено выше, подвижность отрицательного иона является отрицательной величиной. Подставляя приведенные величины в (10), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{i=1}^2 (\rho_{ei} u_i \mathbf{E} - D_i \nabla \rho_{ei} + \rho_{ei} \mathbf{v}) = \\ &= (\rho_e^+ u_1 - \rho_e^- |u_2|) \mathbf{E} - (D_1 \nabla \rho_e^+ - D_2 \nabla \rho_e^-) + \\ &+ (\rho_e^+ + \rho_e^-) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (11)$$

Как видно, конвективная составляющая плотности тока отлична от нуля.

В случае выполнения условия электронейтральности $\rho_e^+ = -\rho_e^-$ из (11) следует

$$\mathbf{j} = \rho_e^+ (u_1 + |u_2|) \mathbf{E} - (D_1 \nabla \rho_e^+ - D_2 \nabla \rho_e^-) = \mathbf{j}'. \quad (12)$$

В этом случае конвективная составляющая тока пропадает. Если равны и концентрации ионов $c_1 = c_2 = c$, и коэффициенты диффузии $D_1 = D_2$, то выпадает и диффузионная составляющая плотности тока и остается только ток проводимости $\mathbf{j} = \rho_e^+ (u_1 + |u_2|) \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$.

Однако для равенства коэффициентов диффузии ионов должны быть, как показывает приведенная выше формула Эйнштейна, равны подвижности катиона и аниона, составляющих ионную пару. Поэтому при условии электронейтральности в общем случае для плотности тока наиболее вероятна формула (12).

Как правило, жидкости электронейтральны (см. [4, гл. 11]), однако в случае наличия ДЭС электронейтральность нарушается [4, с. 247], [5, § 8.3], что влечет за собой неравенства концентраций $c_i^+ \neq c_i^-$ и плотностей зарядов $\rho_i^+ \neq \rho_i^-$. Тогда для вычисления функции плотности тока \mathbf{j} необходимо пользоваться общим выражением (11). Те же рассуждения справедливы при наличии в жидкости произвольного числа пар ионов.

В приложении приведены выражения для плотности зарядов и концентраций в ДЭС.

³ В работе [2, с. 24] в выражении (2.17), соответствующем выражению (9) настоящей работы, допущена опечатка, учтенная в (9).

Коррекция уравнений (3) и (5)

Вначале приведем ЭГД-систему из [2, ч. I, с. 24, 81]:

$$\left. \begin{aligned}
 1. \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}, \\
 2. \quad \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
 3. \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \chi \Delta T + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}'}{\rho c_p}, \\
 4. \quad \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\
 5. \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}' + \rho_e \mathbf{v}, \quad \mathbf{j}' &= \sigma \mathbf{E} - \sum_{i=1}^N D_i \nabla \rho_{ei}, \\
 6. \quad \sigma &= \sum_{i=1}^N \rho_{ei} u_i, \\
 7. \quad \mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left(E^2 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T, \\
 8. \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} &= \rho_e, \\
 9. \quad \nabla \cdot \mathbf{j}' + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= 0.
 \end{aligned} \right\} (13)$$

Сравнение этой системы с системой (1)–(7) показывает совпадение уравнений (1) и 1 из (13), (2) и 2 из (13), (4) и 4 из (13), (7) и 7 из (13). Уравнение 3 из (13) отличается от (3) наличием дополнительного источника джоулева тепла в виде плотности тока, вызванной диффузией зарядов

$$\left(-\sum_{i=1}^N D_i \nabla \rho_{ei} \right). \quad (14)$$

Отличаются также по форме записи выражения (5) и 5, 6 из (13) для плотности тока⁴. Выражение (6) $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ представляется неверным в общем случае, т. к. дивергенция от плотности тока $\nabla \cdot \mathbf{j}$ (5) при потенциальном поле \mathbf{E} (см. 4 из (13)) в общем случае нулю не равна. В [2, ч. I, с. 81] добавлены уравнения Пуассона (8 в (13)) и уравнение непрерывности (9 в (13)). Последнее уравнение представляется избыточным, т. к. применительно к поставленной в работе задаче не используется (например, в рамках одной монографии [2], состоящей из частей написанных разными авторами, в части 1 это уравнение присутствует, а в части 2 отсутствует).

Отметим, что в работе [5, гл. 8] также присут-

⁴ Идентичная 5, 6 из (13) форма записи плотности тока приведена в [4, с. 249].

ствует ЭГД-система, включающая гидродинамические уравнения 1, 2 из (13), а также в той или иной форме электродинамические уравнения 4, 5, 6, 7 и 8 из (13).

На основании изложенного выше может быть записана искомая ЭГД-система, учитывающая электроосмотические эффекты.

ЭГД-система применительно к электроосмотическим явлениям

В искомую систему должны быть включены уравнения 1–8 из (13). Уравнение теплопроводности 3 из (13) должно быть откорректировано с учетом наличия ДЭС и его особенностей, разобранных выше.

Очевидно, что уравнение 3 из (13) при условии наличия ДЭС должно быть записано так

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\mathbf{E} \cdot (\mathbf{j}' + \alpha \rho_e \mathbf{v})}{\rho c_p},$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{вне ДЭС,} \\ 1 & \text{внутри ДЭС.} \end{cases}$$

После этого можно записать искомую ЭГД-систему в окончательном виде:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}, \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\mathbf{E} \cdot (\mathbf{j}' + \alpha \rho_e \mathbf{v})}{\rho c_p}, \quad (17)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{вне ДЭС,} \\ 1 & \text{внутри ДЭС,} \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}' + \rho_e \mathbf{v}, \quad \mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E} - \sum_{i=1}^N D_i \nabla \rho_{ei}, \quad (19)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \rho_{ei} u_i,$$

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left(E^2 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \rho_e. \quad (21)$$

Кроме того, в условиях переменной концентрации ионов к системе (15)–(21) должно быть добавлено уравнение диффузии (массопереноса) [2, с. 123], однако в рамках решения поставленной

задачи в этом нет необходимости, т.к. вне зоны ДЭС концентрация ионов в электроосмотических процессах полагается равновесной, а в зоне ДЭС распределение концентраций ионов может вычисляться без решения уравнения диффузии. Подробности такого подхода приведены в Приложении.

Отметим, что система (15)–(21) не замкнута в том виде, в каком она записана. На этом вопросе остановимся ниже.

Некоторые замечания к ЭГД-системе (15)–(21)

1. Начнем с системы уравнений Навье—Стокса (15), (16). Уравнение (15) — это уравнение сохранения импульса, а уравнение (16) — уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости. В случае сжимаемой жидкости вместо (15) и (16) должны фигурировать соответствующие уравнения для сжимаемой жидкости. Например, один из вариантов уравнения Навье—Стокса для сжимаемой жидкости записан в [2, с. 47].

Система (15), (16) не является замкнутой, т.к. содержит на четыре уравнения пять неизвестных ($\rho, p, \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$). Для ее замыкания необходимо добавлять пятое уравнение, например уравнение состояния $p = p(\rho, s)$, или $\rho = \rho(p, T)$, где s — удельная энтропия.

2. Уравнение теплопроводности (17) при наличии конвективного члена $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ является связанным, т.е. должно решаться в рамках ЭГД-системы совместно с системой уравнений (15), (16) и добавленным к ним уравнением состояния. Если же конвективным членом можно пренебречь, то это уравнение может быть решено самостоятельно после вычисления стоящей справа функции источника джоулева тепла.

В записи (17) уравнение теплопроводности записано неполно. Например, справа отсутствует член, учитывающий термоэлектрический эффект и член $\Phi / \rho c_p$, где Φ — диссипативная функция. Более полная версия уравнения теплопроводности с учетом стороннего электрического поля представлена в [2, с. 79].

3. Уравнения (18) и (21) определяют электростатический характер рассматриваемого ЭГД-процесса. Подробнее об электростатическом приближении можно посмотреть в [2, гл. 1].

4. Уравнение (19) для плотности тока в жидкости выписано в наиболее общем виде. Часто существует возможность пренебрежения тем или иным слагаемым. В случае электронейтральности $\rho_e \equiv 0$ выпадает конвективная составляющая $\rho_e \mathbf{v}$, а в случае однородной концентрации выпадает диффузионная составляющая.

5. Сила \mathbf{f} в (20), называется электрической или пондеромоторной силой. Составляющая этой

силы — сила Кулона $\rho_e \mathbf{E}$ обычно доминирует, особенно при наличии постоянного электрического поля \mathbf{E} в проводящих жидких диэлектриках. Второй член — сила, прикладываемая к жидкости при наличии неоднородности электрического поля. Обычно она меньше силы Кулона и может доминировать при приложении переменного электрического поля к изолятору. Третий (потенциальный) член называется стрикционным давлением и может объединяться с гидродинамическим давлением [2, с. 124]. Как было показано в [1], при подаче наряду с постоянным электрическим полем и переменного электрического поля при существенной величине второго и третьего членов в (20) могут возникать кратные (паразитные) гармоника колебаний. Это и может являться критерием существенности величины второго и третьего членов в (20), что необходимо в рамках рассматриваемой задачи максимально нивелировать.

Как показано в Приложении, использование стационарности электрохимического потенциала в жидкости и принятие гипотезы об электронейтральности жидкости вне ДЭС позволяет связать с потенциалом электрического поля φ в ДЭС (не путать с потенциалом приложенного внешнего электрического поля) концентрацию и распределение плотности заряда внутри ДЭС.

В связи с изложенным выше для замыкания ЭГД-системы (15)–(21) применительно к наличию электроосмотического процесса в жидкости к уже имеющимся уравнениям в качестве недостающих уравнений необходимо добавить уравнение состояния

$$p = p(\rho, s) \quad (22)$$

и уравнение стационарности электрохимического потенциала жидкости $\mu_{\pm}(\mathbf{r})$ (см. Приложение, (П1), (П2)):

$$\nabla \mu_{\pm}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow k_B T \nabla \ln \left(\frac{c_{\pm}(\mathbf{r})}{c_0} \right) = \mp |e| \nabla \varphi(\mathbf{r}). \quad (23)$$

Таким образом, ЭГД-система (15)–(23) становится замкнутой и пригодной для решения электроосмотических задач. Введение электрохимического потенциала позволяет при этом избежать решения задачи массопереноса (диффузии). Кроме того, (23) позволяет легко находить в приближении Дебая—Хюккеля такие фигурирующие в ЭГД-системе величины, как c_{\pm} , электроосмотический потенциал φ и плотность заряда ρ_e .

К системе (15)–(23) для ее однозначного решения необходимо добавить начальные и краевые условия, которые широко представлены в специальной литературе по гидродинамике, электрогид-

родинамике и литературе по электроосмотическим процессам.

ВЫВОДЫ

В работе получена замкнутая система ЭГД-уравнений для такого специфического ее подраздела, как электроосмотические явления. Эта система не содержит уравнения диффузии для поиска поля концентраций ионов, т.к. они могут быть проще рассчитаны в приближении Дебая—Хюккеля. Кроме того, проще рассчитываются электроосмотические потенциалы и плотности зарядов ионов. Наличие в системе уравнения теплопроводности позволяет рассчитывать поле температуры в жидкости, что является крайне необходимым для поддержания необходимого температурного режима при реализации на практике излучателя нового типа (см. [1]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для распределения концентраций ионов и плотностей их зарядов в ДЭС

Вновь для простоты принимаем наличие пары противоположно заряженных ионов одинаковой валентности. Следуем далее [5, § 8.3]. Все рассуждения основываются на такой величине, как электрохимический потенциал $\mu_{\pm}(\mathbf{r})$, имеющий для ионов вид

$$\mu_{\pm}(\mathbf{r}) = \mu_0 + k_B T \ln \left(\frac{c_{\pm}(\mathbf{r})}{c_0} \right) \pm |e| \varphi(\mathbf{r}). \quad (\text{П1})$$

Здесь $|e| = e_{\pm}$; μ_0 и c_0 химический потенциал и концентрация ионов при отсутствии электрического потенциала $\varphi(\mathbf{r}) = 0$. Термодинамическое равновесие подразумевает постоянство электрохимического потенциала $\mu_{\pm}(\mathbf{r}) = \text{const}$, что приводит к соотношению

$$k_B T \nabla \ln \left(\frac{c_{\pm}(\mathbf{r})}{c_0} \right) = \mp |e| \nabla \varphi(\mathbf{r}), \quad (\text{П2})$$

где верхний знак в \pm и \mp отвечает положительному иону, а нижний — отрицательному.

В предположении, что при отдалении от границы раздела фаз $c_{\pm}(\mathbf{r}) \rightarrow c_0$, $\varphi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$, а на поверхности скольжения S_{ss} (см., например, [7]) потенциал равен дзета-потенциалу $\varphi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S_{ss}} = \zeta$, решение уравнения (П2) сводится к виду

$$c_{\pm}(\mathbf{r}) = c_0 \exp \left[\mp \frac{|e|}{k_B T} \varphi(\mathbf{r}) \right]. \quad (\text{П3})$$

С учетом (П3) суммарная плотность заряда в ДЭС тогда равна

$$\begin{aligned} \rho_e(\mathbf{r}) &= \rho_e^+(\mathbf{r}) + \rho_e^-(\mathbf{r}) = |e| [c_+(\mathbf{r}) - c_-(\mathbf{r})] = \\ &= -2|e|c_0 \sinh \left(\frac{|e|}{k_B T} \varphi(\mathbf{r}) \right). \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

Использование уравнения Пуассона $\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\rho_e(\mathbf{r})$ приводит к уравнению

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = 2 \frac{|e|c_0}{\varepsilon \varepsilon_0} \sinh \left(\frac{|e|}{k_B T} \varphi(\mathbf{r}) \right). \quad (\text{П5})$$

Уравнение (П5) является нелинейным и должно решаться численно за исключением ряда частных случаев. Поэтому принято решать уравнение Дебая—Хюккеля, когда в правой части (П5) учитывается только линейная часть разложения гиперболического синуса в ряд и уравнение (П5) сводится к виду

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_D^2} \varphi(\mathbf{r}). \quad (\text{П6})$$

Здесь $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 k_B T}{2e^2 c_0}}$ — длина Дебая. Приближение (П6) справедливо, когда электрическая энергия много меньше тепловой: $|e|\zeta \ll k_B T$.

После решения (П6) и определения потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ может быть найдено в приближении Дебая—Хюккеля распределение плотности заряда

$$\rho_e(\mathbf{r}) = -\varepsilon \varepsilon_0 \Delta \varphi(\mathbf{r}) \quad (\text{П7})$$

и распределение концентраций из выражения (П3).

Приведем пример таких вычислений для плоской и цилиндрической поверхностей раздела фаз.

Пример вычислений для плоской поверхности раздела фаз

Плоская поверхность раздела фаз $z = 0$ [5, с. 148]:

$$\varphi(z) = \zeta \exp \left[-\frac{z}{\lambda_D} \right], \quad z \geq 0, \quad (\text{П8})$$

$$\begin{aligned} \rho_e(z) &= -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 \zeta}{\lambda_D^2} \exp \left[-\frac{z}{\lambda_D} \right], \\ &z \geq 0; \end{aligned} \quad (\text{П9})$$

$$c_{\pm}(\mathbf{r}) = c_0 \exp \left[\mp \frac{|e|}{k_B T} \varphi(\mathbf{r}) \right] \approx \\ \approx c_0 \left[1 \mp \frac{|e| \zeta}{k_B T} \exp \left[-\frac{z}{\lambda_D} \right] \right]. \quad (\text{П10})$$

В (П10) проведен переход от точного равенства (П3) к приближенному с помощью дебаевского приближения потенциала (П8) и линейной аппроксимации экспоненты из (П8). В выражении (П10) отрицательные ионы являются противоионами (поверхность раздела фаз со стороны твердого тела заряжена положительно, см. [5, с. 146, рис. 8.3]).

Пример вычислений для круговой цилиндрической поверхности раздела фаз

Круговая цилиндрическая поверхность (цилиндр радиусом $r = a$ с осью по оси z) [5, с. 148, 149]:

$$\varphi(r) = \zeta \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)}, \quad (0 < r < a); \quad (\text{П11})$$

$$\rho_e(r) = -\varepsilon \varepsilon_0 \Delta \varphi(r) = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\lambda_D^2} \varphi(r) = \\ = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 \zeta}{\lambda_D^2} \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)}, \quad (0 < r < a); \quad (\text{П12})$$

$$c_{\pm}(\mathbf{r}) = c_0 \exp \left[\mp \frac{|e|}{k_B T} \varphi(\mathbf{r}) \right] \approx \\ \approx c_0 \left[1 \mp \frac{|e| \zeta}{k_B T} \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)} \right], \quad (0 < r < a). \quad (\text{П13})$$

Здесь I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. В [5]⁵ приведен порядок фигурирующих здесь величин: порядок величины $\zeta = 100$ мВ [5, с. 160], подвижности и коэффициента диффузии различных ионов [5, с. 145], длины Дебая $\lambda_D \sim 10$ нм [5, с. 150].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарфарец Б.П. Применение системы уравнений электрогидродинамики для математического моделирования нового способа электроакустического преобразования // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 4. С. 127–134. URL: <http://iairas.ru/mag/2018/abst4.php#abst21>
2. Castellanos A., Ghakin A.I. Electrohydrodynamics / Ed. A. Castellanos. Wien: Springer-Verlag, 1998. 362 p.
3. Болога М.Н., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А. Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 320 с.
4. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 464 с.
5. Bruus H. Theoretical Microfluidics. Oxford University Press, 2008. 346 p.
6. Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е. К вопросу о подвижности частиц и молекул в пористых средах // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 4. С. 43–55. URL: <http://iairas.ru/mag/2015/abst4.php#abst6>
7. Сергеев В.А., Шарфарец Б.П. Об одном новом методе электро-акустического преобразования. Теория, основанная на электрокинетических явлениях. Ч. I. Гидродинамический аспект // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 2. С. 25–35. URL: <http://iairas.ru/mag/2018/abst2.php#abst4>

Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 25.09.2018

⁵ В [5] нет выражения для c_{\pm} для цилиндрической поверхности, однако его получение по аналогии с плоской границей раздела тривиально.

SYSTEM ELECTROHYDRODYNAMICS EQUATIONS APPLIED TO ELECTROSMOTIC PROCESSES

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia

A closed system of electrohydrodynamic (EHD) equations for such a specific subsection of electrohydrodynamics as electroosmotic phenomena is obtained. The EHD system does not contain the diffusion equation for the search for the field of ion concentrations. In the paper they are calculated more simply in the Debye-Hückel approximation. This makes it possible to simplify the calculation of electroosmotic potentials and ion charge densities. Correction of other equations of the EHD-system was carried out taking into account the features of electroosmotic processes. The presence of a heat conduction equation in the system makes it possible to calculate the temperature field in a liquid, which is extremely necessary for maintaining the necessary temperature regime when a new type of radiator is realized in practice.

Keywords: electrohydrodynamics, electroosmotic process, electrohydrodynamic system of equations, the Debye—Hückel approximation, ion concentration

REFERENCES

1. Sharfarets B.P. [Application of the system of electrohydrodynamics equations for mathematical modeling of a new method of electro-acoustic transformation]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 4, pp. 127–134. (In Russ.). URL: <http://iairas.ru/en/mag/2018/abst4.php#abst21>
2. Castellanos A. (ed.), Ghakin A.I. *Electrohydrodynamics*. Wien, Springer-Verlag, 1998. 362 p.
3. Bologa M.N., Grosu F.P., Kozuhar I.A. *Elektrokonveksiya i teploobmen* [Electroconvection and heat exchange]. Chisinau, Shtiintsa Publ., 1977. 320 p. (In Russ.).
4. Newman J.S. *Electrochemical systems*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1973. 432 p. (Russ. ed.: Newman J. *Elektrohimicheskie sistemy*. Moscow, Mir Publ., 1977. 464 p.). (In Russ.).
5. Bruus H. *Theoretical Microfluidics*. Oxford University Press, 2008. 346 p.
6. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E. [To the question of mobility of particles and molecules in porous media]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 4, pp. 43–55. (In Russ.). URL: <http://iairas.ru/en/mag/2015/abst4.php#abst6>
7. Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [About one new method of electroacoustic transformation. A theory based on electrokinetic phenomena. Part I. The hydrodynamic aspect]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 25–35. (In Russ.). URL: <http://iairas.ru/en/mag/2018/abst2.php#abst4>

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article received in edition: 25.09.2018