

---



---

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

---



---

УДК 537.534.7

© А. С. Бердников, Н. В. Конёнков, А. Г. Кузьмин, С. В. Масюкевич, 2019

**О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СТРОБОСКОПИЧЕСКИХ ВЫБОРОК  
ПРИ ИЗУЧЕНИИ КВАДРУПОЛЬНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ  
И КВАДРУПОЛЬНОГО РЕЗОНАНСА**

В заметке анализируются некоторые логические ошибки, допущенные в новой теории квадрупольных возбуждений для радиочастотных квадрупольных масс-фильтров, которая предложена М.Ю. Судаковым и Е.В. Мамонтовым и основана на анализе огибающих стробоскопических выборок координат и скоростей ионов в квадрупольном радиочастотном поле. Также показано, что с помощью прямого использования уравнений теории возмущений можно получить наглядную модель, описывающую основные закономерности квадрупольного возбуждения, для которой не требуется привлечение стробоскопических выборок.

*Кл. сл.:* квадрупольные радиочастотные поля, псевдопотенциал радиочастотного электрического поля, квадрупольное резонансное возбуждение колебаний ионов, матрица монодромии, полосы неустойчивости

**ВВЕДЕНИЕ**

В работе [1] предлагается новая теория для описания квадрупольного резонансного возбуждения ионов в квадрупольных ВЧ электрических полях. Она базируется на анализе методом возмущений огибающих стробоскопических выборок координат и скоростей ионов в радиочастотном квадрупольном поле, который был предложен в [2]. В частности, из предложенной теории очень просто выводится, что расщепление исходной зоны устойчивости происходит по изолиниям  $\beta = \text{const}$  диаграммы стабильности уравнения Матьё, а фаза квадрупольного возбуждения не влияет на образование дополнительных полос и островков устойчивости и неустойчивости (результаты, полученные ранее для частного случая рациональных частот возбуждения, и притом гораздо более сложным способом [3, 4]). Кроме того, важным моментом является обобщение теории квадрупольных возбуждений на случай произвольных частот, тогда как до сих пор эффект квадрупольных возбуждений в полном объеме анализировался лишь для частот, находящихся в рациональном отношении к базовой частоте радиочастотного квадрупольного поля (особенность используемого для анализа проблемы математического аппарата матриц монодромии).

Однако при более внимательном рассмотрении в работе [1] обнаруживаются досадные логические неувязки, которые ставят под сомнение надеж-

ность полученных формул. Рассмотрим подробнее этот вопрос.

Основой теории [1] является теория огибающих для стробоскопических выборок координат и скоростей траекторий ионов в квадрупольном радиочастотном поле, которая была разработана в [2]. В рамках этой теории рассматривается движение ионов с массой  $m$  и зарядом  $e$  в квадрупольном радиочастотном поле с потенциалом

$$\Phi(x, y) = F(t) \frac{x^2 - y^2}{r_0^2} \quad (1)$$

для частного случая  $F(t) = U + V \cos \Omega t$ , где  $x, y$  — декартовы координаты;  $r_0$  — радиус окружности, вписанный между гиперболическими электродами;  $U$  — постоянная составляющая напряжения, приложенного к электродам;  $V$  — амплитуда синусоидального радиочастотного напряжения, приложенного к электродам;  $\Omega$  — круговая частота радиочастотного напряжения. В безразмерных переменных  $\xi = \Omega t/2$ ,  $a = 8eU/(m\Omega^2 r_0^2)$ ,  $q = 4eV/(m\Omega^2 r_0^2)$  движение ионов в рассматриваемом поле описывается парой уравнений Матьё [5, 6] с хорошо известными областями стабильности и неустойчивости:

$$x''(\xi) + (a + 2q \cos 2\xi)x(\xi) = 0, \quad (2)$$

$$y''(\xi) - (a + 2q \cos 2\xi)y(\xi) = 0. \quad (2a)$$

Эти уравнения являются частным случаем систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодически меняющимися во времени коэффициентами, теория которых достаточно хорошо исследована [7–14].

Рассмотрим движение по координате  $X$ . В рамках теории [2] анализируется поведение стробоскопических выборок координат и скоростей  $x_n = x(nT)$ ,  $v_n = v(nT) = x'(nT)$ , где  $T = \pi$  — безразмерный период приложенного радиочастотного напряжения. Дискретные отсчеты  $x_n$ ,  $v_n$  подчиняются рекуррентному матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $x_0$ ,  $v_0$  — начальные значения координат

и скоростей, а  $M = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xv} \\ m_{vx} & m_{vv} \end{pmatrix}$  — так называемая

матрица монодромии для линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, соответствующая уравнению (2) (см. [1, 2, 11–15]).

Матрица монодромии играет важную роль при анализе уравнений движения в радиочастотных полях. В частности, от значения следа матрицы  $\text{Tr} = m_{xx} + m_{yy}$  зависит устойчивость (если  $-2 < \text{Tr} < +2$ ) или неустойчивость (если  $\text{Tr} \leq -2$  или  $\text{Tr} \geq +2$ ) движения ионов. Для устойчивого режима движения важную роль играет безразмерный параметр Флоке  $\beta$ , вычисляемый из условия  $2 \cos \pi\beta = \text{Tr}$ , лежащий в диапазоне  $0 \leq \beta \leq 1$  и определяющий для ионов круговую частоту секулярных колебаний, в безразмерных координатах равную  $\omega_s = \beta$  (см. [15]). Определитель матрицы монодромии равен единице (следствие закона сохранения фазового объема).

В работе [2] для стробоскопических отсчетов  $x_n$ ,  $v_n$  конструируется гладкая синусоидальная огибающая  $X(n)$ ,  $V(n)$  и выводится приближенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 X(n)}{dn^2} + 2(1 - \cos \pi\beta) X(n) = 0. \quad (4)$$

Это уравнение интерпретируется как секулярные колебания стробоскопических отсчетов и используется в [2] для описания движения ионов в радиочастотном квадруполе по координате  $Y$  вблизи вершины зоны стабильности, где  $\beta \approx 0$ . Для описания же движения ионов в радиочастотном квадруполе по координате  $X$  вблизи вершины

зоны стабильности, где  $\beta \approx 1$ , в работе [2] используются знакопеременные стробоскопические биения  $\bar{x}_n$ ,  $\bar{v}_n$ , которые определяются по формулам  $\bar{x}_n = (-1)^n x_n$ ,  $\bar{v}_n = (-1)^n v_n$ , подчиняются рекуррентным матричным уравнениям

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = -M \begin{pmatrix} \bar{x}_{n-1} \\ \bar{v}_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^2 M^2 \begin{pmatrix} \bar{x}_{n-2} \\ \bar{v}_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = (-1)^n M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

и для которых, согласно [2], гладкая синусоидальная огибающая  $\bar{X}(n)$  подчиняется приближенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \bar{X}(n)}{dn^2} + 2(1 + \cos \pi\beta) \bar{X}(n) = 0. \quad (6)$$

(В какой степени приближенные уравнения (4), (6) действительно справедливы, разбирается в публикациях [16–18])

Аналогичным образом разбирается движение иона по координате  $Y$ , где происходит изменение знака у безразмерных параметров  $a$ ,  $q$ , а матрица монодромии  $M$  должна будет вычисляться в соответствии с уравнением (2а). С математической точки зрения описания движения с помощью секулярных стробоскопических отсчетов и с помощью биений стробоскопических отсчетов полностью эквивалентны друг другу, и какое из них использовать в конкретном случае — в значительной степени вопрос удобства математических выкладок при рассматриваемых значениях параметра  $\beta$ .

На основании уравнений (4) и (6) в работе [2] выводятся оценки для глубины псевдопотенциальной ямы по координате  $Y$  и по координате  $X$  в окрестности вершины первой совместной зоны стабильности для линейного радиочастотного квадруполья. Следует отметить, что уравнения (4) и (6) являются более чем приближенными и имеют смысл только при  $\beta \approx 0$  и  $\beta \approx 1$ . Этот вопрос анализируется в работах [16–18], где показано, что точное дифференциальное уравнение для синусоидальной огибающей  $X(n)$  секулярных стробоскопических отсчетов имеет вид

$$\frac{d^2 X(n)}{dn^2} + (\pi\beta)^2 X(n) = 0, \quad (7)$$

а точное дифференциальное уравнение для синусоидальной огибающей  $\bar{X}(n)$  биений стробоскопических отсчетов имеет вид

$$\frac{d^2 \bar{X}(n)}{dn^2} + (\pi(1-\beta))^2 \bar{X}(n) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (4) в окрестности  $\beta \approx 0$  совпадает с уравнением (7) с точностью до кубических членов разложения по малому параметру  $\beta$ . Соответственно уравнение (6) в окрестности  $\beta \approx 1$  совпадает с уравнением (8) с точностью до кубических членов разложения по малому параметру  $1-\beta$ . Отсюда, в частности, следует, что оценки для псевдопотенциальной ямы в окрестности вершины первой совместной зоны устойчивости линейного радиочастотного квадрупольного поля, полученные в [2], справедливы лишь с точностью до кубических членов и имеют смысл лишь в окрестности вершины совместной зоны стабильности, где  $\beta \approx 0$  для движения по координате  $y$  и  $\beta \approx 1$  для движения по координате  $x$ . По-видимому, следует ожидать аналогичные неточности и при использовании этих уравнений при анализе эффекта квадрупольного возбуждения в работе [1]. Подробно сти вывода точных уравнений (7), (8) для огибающих стробоскопических выборок и сравнение их с приближенными уравнениями (4), (6), полученными в [2], приводятся в [16–18].

При наличии квадрупольного возбуждения функция  $F(t)$  для электрического потенциала (1) имеет вид  $F(t) = U + V \cos \Omega t + V_{ex} \cos(\omega t + \alpha)$ , где  $V_{ex}$  — амплитуда квадрупольного возбуждения,  $\omega$  — круговая частота квадрупольного возбуждения,  $\alpha$  — начальная фаза квадрупольного возбуждения. В таком случае уравнения для движения ионов принимают вид

$$x''(\xi) + (a + 2q \cos 2\xi)x(\xi) = -2q_{ex} \cos(2v\xi + \alpha)x(\xi), \quad (9)$$

$$y''(\xi) - (a + 2q \cos 2\xi)y(\xi) = +2q_{ex} \cos(2v\xi + \alpha)y(\xi), \quad (9a)$$

где  $v = \omega/\Omega$ , а  $q_{ex} = 4eV_{ex}/(m\Omega^2 r_0^2)$  считается малым параметром, что позволяет анализировать уравнения (9), (9a) с помощью методов теории возмущений. Известно, что в зависимости от значений параметров  $v$  и  $q_{ex}$  происходит сложное расщепление исходной диаграммы стабильности на дополнительные полосы стабильности и нестабильности [4], где число полос нестабильности зависит от параметра  $v$ , а ширина полос нестабильности управляется параметром  $q_{ex}$ .

В работе [1] показано, что с учетом членов первого порядка, полученных методом теории возмущений для уравнения (9), секулярные стробоскопические отсчеты подчиняются матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = (M + C \cos(2\pi v n - \alpha) - S \sin(2\pi v n - \alpha)) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $M$  — матрица монодромии для уравнения Матьё с нулевой правой частью, а  $C$  и  $S$  — вспомогательные постоянные матрицы. Поскольку для гладкой огибающей стробоскопического решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

с постоянной матрицей справедливо приближенное уравнение (4), которое можно записать в виде  $d^2 X(n)/dn^2 + 2(1-s)X(n) = 0$ , где  $s = \text{Tr}/2 = (m_{xx} + m_{vv})/2$  — половина следа матрицы  $M$ , то для матричного уравнения (10) с меняющейся в зависимости от индекса  $n$  матрицей авторами работы [1] делается смелый вывод, что гладкая огибающая стробоскопических отсчетов (10) подчиняется похожему дифференциальному уравнению  $d^2 X(n)/dn^2 + 2(1-s_n)X(n) = 0$ , где  $s_n$  — половина следа матрицы  $M_n$ . Соответственно огибающая биений  $\bar{x}_n = (-1)^n x_n$ ,  $\bar{v}_n = (-1)^n v_n$  для матричного уравнения (10), согласно утверждению авторов работы [1], подчиняется дифференциальному уравнению  $d^2 \bar{X}(n)/dn^2 + 2(1+s_n)\bar{X}(n) = 0$ .

До этого шага выкладки авторов вполне корректны (за исключением того факта, что для получения более точных результатов вместо приближенного уравнения (4) следует использовать точное уравнение (7), а вместо приближенного уравнения (6) — точное уравнение (8)). Однако данный шаг оказывается не только методически и логически необоснованным и, вообще говоря, слабо связанным с предшествующими выкладками, но, что гораздо опаснее, с большой вероятностью он может оказаться вообще неверным по отношению к получаемым на выходе результатам. Действительно, рассмотрим матричное уравнение  $\begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$  с выбранными для тестового примера матрицами  $M_n$ , определенными как

$$\begin{aligned}
 M_{2k} &= M_a = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \pi\beta - \mu_a \sin \pi\beta & \lambda_a \sqrt{1 + \mu_a^2} \sin \pi\beta \\ -(1/\lambda_a) \sqrt{1 + \mu_a^2} \sin \pi\beta & \cos \pi\beta + \mu_a \sin \pi\beta \end{pmatrix}, \\
 M_{2k+1} &= M_b = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \pi\beta - \mu_b \sin \pi\beta & \lambda_b \sqrt{1 + \mu_b^2} \sin \pi\beta \\ -(1/\lambda_b) \sqrt{1 + \mu_b^2} \sin \pi\beta & \cos \pi\beta + \mu_b \sin \pi\beta \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{11}$$

где параметр  $\beta$  фиксирован и лежит в диапазоне  $0 < \beta < 1$ , а параметры  $\lambda_a, \lambda_b, \mu_a, \mu_b$  пока остаются неопределенными. (По сути в этом примере матрицы  $M_n$  представляют собой матрицы монодромии, параметризованные с помощью параметров  $\beta, \lambda_a, \lambda_b, \mu_a, \mu_b$  [15, 19–21], которые попеременно переключаются между двумя группами параметров, не связанными друг с другом.) След всех матриц  $M_n$  постоянен и равен  $2 \cos \pi\beta$ . Это означает, что согласно предлагаемой в [1] логике рассуждений гладкая огибающая стробоскопических

отсчетов  $\begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$  должна удовлетворять уравнению  $d^2 X(n)/dn^2 + 2(1 - \cos \pi\beta)X(n) = 0$  при использовании приближенного уравнения (4) и уравнению  $d^2 X(n)/dn^2 + (\pi\beta)^2 X(n) = 0$  при использовании точного уравнения (7). Также гладкая огибающая биений стробоскопических отсчетов, соответствующих матричному уравнению  $\begin{pmatrix} \bar{x}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = -M_n \begin{pmatrix} \bar{x}_{n-1} \\ \bar{v}_{n-1} \end{pmatrix}$ , должна удовлетворять уравнению  $d^2 \bar{X}(n)/dn^2 + 2(1 + \cos \pi\beta)\bar{X}(n) = 0$  при использовании приближенного уравнения (6) и уравнению  $d^2 \bar{X}(n)/dn^2 + (\pi(1 - \beta))^2 \bar{X}(n) = 0$  при использовании точного уравнения (8).

Однако, если только параметры  $\lambda_a, \lambda_b, \mu_a, \mu_b$  для матриц (11) не подобраны специальным образом, то указанные уравнения не совпадают с правильными уравнениями для огибающих стробоскопических выборок даже для малых величин  $\beta$  и  $(1 - \beta)$ . Действительно, если рассматривать стробоскопические отсчеты  $\begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$  через один отсчет, то для определенных, согласно (11), матриц  $M_n$  будет выполнено соотношение

$\begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = M_c \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix}$  с постоянной матрицей  $M_c = M_b M_a$ . Тогда огибающая  $X_c(n)$  стробоскопических отсчетов  $x_n$ , рассматриваемых через один отсчет, будет удовлетворять приближенному уравнению  $d^2 X_c(n)/dn^2 + 2(1 - s_c)X_c(n) = 0$ , где  $s_c$  — половина следа матрицы  $M_c$ , и точному уравнению  $d^2 X_c(n)/dn^2 + (\pi\beta_c)^2 X_c(n) = 0$ , где  $\cos \pi\beta_c = s_c$ . Половина следа матрицы  $M_c$  равна величине

$$\begin{aligned}
 s_c &= \cos^2(\pi\beta) + \mu_a \mu_b \sin^2(\pi\beta) - \\
 &\quad - \frac{\lambda_a^2 + \lambda_b^2}{2\lambda_a \lambda_b} \sqrt{1 + \mu_a^2} \sqrt{1 + \mu_b^2} \sin^2(\pi\beta),
 \end{aligned} \tag{12}$$

и это выражение радикальным образом отличается от тех частот, которые входят в уравнения гладких огибающих стробоскопических отсчетов, согласно рассуждениям авторов работы [1], даже с учетом удвоения секулярных частот и частот биений при удвоении шага стробоскопической выборки. Более того выражение (12) при некотором специальном выборе параметров  $\lambda_a, \lambda_b, \mu_a, \mu_b$  может выйти за пределы диапазона  $-1 \leq s_c \leq +1$ , что означает,

что матричное уравнение  $\begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$  потеряет устойчивость — ситуация, невозможная для матриц вида (11), если придерживаться логики работы [1]. (Заметим, что некоторые случаи расхождения между теорией и численными результатами, на которые обращают внимание авторы работы [1], могут быть связаны именно с этой тонкостью при перемножении матриц, а не с поправками более высокого порядка для формул теории возмущений, как это объясняют авторы работы [1].)

Для решения поставленной задачи нет необходимости использовать столь запутанные и не слишком хорошо обоснованные преобразования, имея конечной целью свести ее к задаче исследования устойчивости решений уравнения Матье с готовым решением. Вся нужная информация уже есть в приближенных решениях уравнений (9) и (9а), которые получаются в [1] с помощью стандартных методов теории возмущений:

$$\begin{pmatrix} x(\xi) \\ v(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u'_1(\xi) & u'_2(\xi) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 - \int_0^\xi f(\tau)u_1(\tau)u_2(\tau)d\tau & -\int_0^\xi f(\tau)u_2^2(\tau)d\tau \\ +\int_0^\xi f(\tau)u_1^2(\tau)d\tau & 1 + \int_0^\xi f(\tau)u_1(\tau)u_2(\tau)d\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Здесь  $x(\xi)$  и  $v(\xi) = x'(\xi)$  — приближенное решение уравнения (9) с ненулевой правой частью;  $u_1(\xi)$  и  $u_2(\xi)$  — фундаментальные решения однородного уравнения (2), удовлетворяющие начальным условиям  $u_1(0) = 1, u_1'(0) = 0, u_2(0) = 0, u_2'(0) = 1$ ;  $f(\xi) = -2q_{ex} \cos(2v\xi + \alpha)$  — малое возмущение в правой части уравнения (9);  $x_0$  и  $v_0$  — начальная координата и начальная скорость. Решение для (9а) отличается от решения для (9) лишь заменой  $x(\xi)$  на  $y(\xi)$ , изменением знака у безразмерных параметров  $a, q, q_{ex}$  и использованием для  $u_1(\xi), u_2(\xi)$  фундаментальных решений уравнения (2а).

Рассмотрим вопрос, как в рамках формулы (13) можно описать появление внутри зоны устойчивости уравнения Матъё (2) полос неустойчивости, индуцированных в соответствии с уравнением (9) дополнительным квадрупольным возбуждением. Устойчивое решение уравнения Матъё (2) можно представить с помощью матрицы Флоке—Ляпунова [20, 21] в виде

$$\begin{pmatrix} x_*(\xi) \\ v_*(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{xx}(\xi) & L_{xv}(\xi) \\ L_{vx}(\xi) & L_{vv}(\xi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \beta\xi - \mu \sin \beta\xi & \lambda \sqrt{1 + \mu^2} \sin \beta\xi \\ -(1/\lambda) \sqrt{1 + \mu^2} \sin \beta\xi & \cos \beta\xi + \mu \sin \beta\xi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где  $\beta, \lambda, \mu$  — параметры, являющиеся функциями безразмерных параметров  $a, q$ , а  $L_{xx}(\xi), L_{xv}(\xi), L_{vx}(\xi), L_{vv}(\xi)$  — периодические функции с периодом  $T = \pi$ , в первом приближении имеющие вид

$$\begin{aligned} L_{xx}(\xi) &\approx 1 + A(1 - \cos 2\xi) + \dots, L_{xv}(\xi) \approx B \sin 2\xi + \dots, \\ L_{vx}(\xi) &\approx C \sin 2\xi + \dots, L_{vv}(\xi) \approx 1 + D(1 - \cos 2\xi) + \dots \end{aligned} \tag{15}$$

(где параметры  $A, B, C, D$  также являются функциями безразмерных параметров  $a, q$ ). Поэтому фундаментальные решения  $u_1(\xi), u_2(\xi)$  для уравнения (2) приобретают вид

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= L_{xx}(\xi)(\cos \beta\xi - \mu \sin \beta\xi) + \\ &+ L_{xv}(\xi) \left( -(1/\lambda) \sqrt{1 + \mu^2} \sin \beta\xi \right), \\ u_2(\xi) &= L_{xx}(\xi) \lambda \sqrt{1 + \mu^2} \sin \beta\xi + \\ &+ L_{xv}(\xi)(\cos \beta\xi + \mu \sin \beta\xi), \end{aligned} \tag{16}$$

в котором нет неизвестных функций, а имеются только известные константы, извлекаемые из уравнения (2) с помощью конструктивных вычислительных процедур.

При выполнении в (13) умножения на матрицу фундаментальных решений

$$\Phi(\xi) = \begin{pmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \end{pmatrix} \tag{17}$$

результат остается ограниченным, в силу того что рабочая точка выбрана в пределах зоны устойчивости уравнения Матъё. Поэтому неограниченный рост решения  $(x(\xi), v(\xi))$  может быть связан только с ростом матрицы

$$F(\xi) = \begin{pmatrix} -\int_0^\xi f(\tau)u_1(\tau)u_2(\tau)d\tau & -\int_0^\xi f(\tau)u_2^2(\tau)d\tau \\ +\int_0^\xi f(\tau)u_1^2(\tau)d\tau & +\int_0^\xi f(\tau)u_1(\tau)u_2(\tau)d\tau \end{pmatrix}. \tag{18}$$

После аккуратного выполнения в (18) внутренних умножений с учетом условий (15), (16)

и  $f(\xi) = -2q_{ex} \cos(2v\xi + \alpha)$ , а также преобразования произведений тригонометрических функций

в тригонометрические суммы под знаками интеграла образуются суммы тригонометрических членов со следующими частотами:

$$2\nu, 2 \pm 2\nu, 4 \pm 2\nu, 2\beta \pm 2\nu, \\ 2 \pm 2\beta \pm 2\nu, 4 \pm 2\beta \pm 2\nu. \quad (19)$$

Если все частоты (19) не равны нулю, то после выполнения в формуле (18) интегрирования получится тригонометрическая сумма, ограниченная по амплитуде на всем интервале изменения безразмерного времени  $\xi$ . Однако, если какие-то из выражений (19) обращаются в ноль, то в матрице (18) образуются аддитивные члены, пропорциональные безразмерному времени  $\xi$ . То есть в этих и только в этих случаях с ростом безразмерного времени  $\xi$  будет наблюдаться неограниченный рост матрицы (18) и соответственно неограниченный рост решения (13).

Естественно, это утверждение будет справедливо ровно той мере, в которой приближенное выражение (13) описывает истинное поведение решений уравнения (9). Например, применим этот же метод возмущений к уравнениям с постоянными коэффициентами и нелинейной осциллирующей правой частью, которые получаются из системы уравнений первого порядка для уравнения (9) после умножения на периодическую матрицу  $L$  из метода Флоке—Ляпунова. Тогда можно увидеть, что неограниченный рост приближенных решений вследствие резонанса на секулярной частоте  $\beta$  следует ожидать в том числе и тогда, когда какая-либо из частот (19) совпадает с резонансной частотой  $\pm\beta$ .

Полученный результат (нарушение устойчивости лишь в изолированных резонансных точках) противоречит результатам работы [4] о появлении при квадрупольном возбуждении полноценных полос нестабильности конечной ширины. Это противоречие отчасти устраняется следующим рассуждением. Матрица (18) стремится с ростом  $\xi$  к бесконечности, если какие-то из частот (19) в точности обращаются в ноль. Однако, когда какие-то из частот (19) близки к нулю, то знаменатели, получающиеся при интегрировании соответствующих тригонометрических членов, приводят к резкому увеличению амплитуды траекторий. Такие траектории ионов быстро выходят за пределы межэлектродного промежутка  $\pm r_0$  даже при незначительных отклонениях начальных условий от оси квадруполя. Данный эффект вполне заменяет собой полосы нестабильности, поскольку "вычищает" из объема квадруполя ионы со значениями параметра  $\beta$ , лежащими в определенных континуальных интервалах.

Если выбрать такое малое значение  $\varepsilon$ , что на расстоянии  $\pm\varepsilon$  от оси квадруполя число ионов пренебрежимо мало, то можно рассчитать в явном виде положение и размеры полос квазинестабильности, для которых траектории, стартовавшие на расстоянии от оси квадруполя, которое превышает  $\varepsilon$ , оказываются за пределами межэлектродной апертуры  $\pm r_0$ . При этом необходимо учитывать не только эффект от матрицы (18), но и умножение в формуле (13) на матрицу (17). Если фронты резонансных пиков достаточно острые, то положение и ширина полос квазинестабильности будут слабо зависеть от конкретного значения малого параметра  $\varepsilon$ . Отметим, что при переходе от первого приближения теории возмущений (13) к поправкам более старшего порядка в соответствующих выражениях будут появляться более сложные произведения величин  $u_1(\xi)$ ,  $u_2(\xi)$  и  $f(\xi)$ , что приведет к появлению дополнительных полос квазинестабильности для уточненной модели.

Полученная модель правильно описывает на качественном уровне основные закономерности квадрупольного возбуждения. При увеличении параметра  $q_{ex}$  происходит уширение имеющихся полос нестабильности, но при этом их положение и их число остаются неизменными (эффект связан с тем, что параметр  $q_{ex}$  является множителем при  $f(\xi)$  и пропорционально масштабирует траектории матрицы (18), выводя за пределы апертуры  $\pm r_0$  те траектории, которые ранее оставались в межэлектродном промежутке и лежали вблизи границы для полосы нестабильности). Границы полос нестабильности проходят по изолиниям параметра Флоке  $\beta$  (эффект следует из выражений (19) для частот тригонометрических членов и соответственно для знаменателей, описывающих высоту резонансных пиков). Положение и ширина полос нестабильности не зависят от фазы квадрупольного возбуждения, хотя вид траекторий ионов от нее зависит существенным образом (эффект связан с тем, что в выражениях (19) для частот тригонометрических членов и соответственно для знаменателей, описывающих высоту резонансных пиков, фаза квадрупольного возбуждения не участвует). Наконец при варьировании частоты  $\nu$  квадрупольного возбуждения меняется число полос нестабильности, так как появляется возможность обнулять с помощью выбора параметра  $0 \leq \beta \leq 1$  те выражения из списка (19), которые ранее в ноль не обращались.

С помощью похожих рассуждений можно проанализировать и такой любопытный и нетривиальный эффект от использования квадрупольного

возбуждения, что при некоторых условиях на месте прежней зоны неустойчивости могут возникать дополнительные полосы стабильности. Однако соответствующий анализ потребует применения матриц Флоке—Ляпунова для неустойчивого движения [20, 21] и несколько более аккуратных выкладок, и его реализация выходит за рамки целей данной заметки.

К сожалению, описанная выше упрощенная модель квадрупольного возбуждения лишь *имитирует* возникновение новых зон неустойчивости, заменяя полноценную неограниченность траектории и уход ее на бесконечность на гораздо более слабое условие — а именно, на локальный выход траектории иона за пределы фиксированной геометрической зоны, ограниченной электродами, при сохранении глобальной ограниченности рассматриваемой траектории некоторым предельно достижимым радиальным расстоянием. В то же время хорошо известно [4], что при квадрупольном возбуждении должны возникать полноценные дополнительные зоны устойчивости и неустойчивости, уводящие траектории ионов экспоненциально быстро на бесконечность. С физической точки зрения такое поведение траекторий ионов принципиальным образом не совпадает с описанной выше *имитацией* неустойчивости, при которой ионы время от времени возвращаются обратно в межэлектродную область пространства, чтобы через некоторое время (с полиномиальной скоростью убегания вместо экспоненциальной скорости убегания) снова уйти за ее пределы.

Насколько можно судить, этот не слишком обнадеживающий результат является следствием того факта, что при наличии резонансных явлений методы теории возмущений не должны применяться "в лоб" и требуют особой аккуратности. А именно: корректная схема применения методов теории возмущений для таких случаев, по всей видимости, должна выглядеть следующим образом: а) в правой части в явном виде выделяются компоненты, ответственные за резонансные эффекты; б) указанные компоненты присоединяются к основному уравнению и полученное уравнение решается как единое целое; в) остаток в правой части рассматривается как малая поправка, а решение неоднородного уравнения с малой поправкой в правой части конструируется с помощью методов теории возмущений, используя для этой цели полученное ранее базовое решение "резонансного" уравнения. К сожалению, выделение в правой части уравнения критических резонансных членов, причем в такой форме, для которой у итогового резонансного уравнения можно найти аналитическое решение, является скорее предметом математического искусства, чем готовой отработанной методологией (в качестве примеров см.

разбор теории параметрических резонансов в [22] и [14, 23]).

Как легко можно заметить, метод, использованный в работе [1], ограничивается вполне формальным и прямолинейным применением стандартной схемы теории возмущений, не обращая внимания на тонкости, связанные с резонансными эффектами. В силу этого полученная на выходе модель даже после устранения логических нестыковок не способна в полной мере отразить физику процессов, происходящих при квадрупольном возбуждении ионов, а лишь имитирует определенные аспекты данного явления. Фактически же теория [1], основанная на методе возмущений огибающих стробоскопических выборок координат и скоростей ионов в квадрупольном поле, претендует на решение лишь тех задач, которые в настоящий момент уже решены другими методами. Например, к таковым можно отнести определение положения полос неустойчивости, описание движения ионов в квадрупольных полях под действием резонансного воздействия квадрупольных полей и так далее [3, 4].

Представляется, что в своем нынешнем состоянии теория, предложенная в [1], мало пригодна для практических приложений и что в силу этого для изучения тонких моментов квадрупольного резонанса будет надежнее и эффективнее напрямую использовать уравнения (9), (9а). Кроме того, тот факт, что из уравнений (13) после предлагаемых авторами математических преобразований получаются результаты, в исходной системе уравнений (13) напрочь отсутствующие, наглядно доказывает как методическую и логическую ошибочность используемого авторами подхода, так и ненадежность получаемых на этом пути результатов (см. также [16–18]).

Полезно отметить, что близкие по своей математической природе эффекты рассматриваются также в [24–27], а для квадрупольного возбуждения — в [28–30].

## РЕЗЮМЕ

Приведенный анализ показывает, что в выкладках работы [1] имеются два важных пробела в логике рассуждений: а) нельзя применять метод возмущений в той форме, в которой его используют авторы работы, если предварительно не выделить в нелинейном возмущении члены, ответственные за параметрический резонанс (см. [22]); б) преобразования, используемые авторами, не могут не содержать существенной методической ошибки, поскольку в результате из системы уравнений (13) с дополнительными неустойчивостями в виде изолированных точек получаются неэквивалентные им уравнения с неустойчивостями в виде контину-

альных полос. По-видимому, до устранения указанных недостатков вряд ли можно использовать итоговые формулы работы [1] при анализе поведения радиочастотных квадрупольных.

#### Благодарности

Данная работа частично выполнена в рамках гос. задания № 075-00780-19-00 для ИАП РАН и гос. задания Минобрнауки России № 3.9506. 2017/8.9.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Судаков М.Ю., Мамонтов Е.В.* Исследование квадрупольного фильтра масс с квадрупольным возбуждением методом уравнения огибающей // Журнал технической физики. 2016. Т. 86, № 11. С. 112–120. Doi: 10.21883/jtf.2016.11.43824.1783
2. *Судаков М.Ю., Апацкая М.В.* Концепция эффективного потенциала для описания движения ионов в квадрупольном фильтре масс // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Т. 142. С. 222–229.
3. *Zhao X., Xiao Z., Douglas D.J.* Overcoming Field Imperfections of Quadrupole Mass Filters with Mass Analysis in Islands of Stability // Analytical Chemistry. 2009. Vol. 81. P. 5806–5811.
4. *Konenkov N.V., Cousins L.M., Baranov V.I., Sudaakov M.Yu.* Quadrupole mass filter operation with auxiliary quadrupolar excitation: theory and experiment // International Journal of Mass Spectrometry. 2001. Vol. 208. Is. 1–3. P. 17–27.
5. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и применение функций Маттьё. М.: Изд-во иностранной литературы, 1953. 474 с.
6. *Бондаренко Г.В.* Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 49 с.
7. *Еругин Н.П.* Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1956. 109 с.
8. *Штокало И.З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев: Изд-во Академии наук УССР, 1960. 78 с.
9. *Штокало И.З.* Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Киев: Изд-во Академии наук УССР, 1961. 128 с.
10. *Еругин Н.П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск: Изд-во Академии наук БССР, 1963. 137 с.
11. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 331 с.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Изд. 2-е, доп. М.: Наука, 1966. 576 с.
13. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
14. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.
15. *Konenkov N.V., Sudaakov M.Yu., Douglas D.J.* Matrix methods to calculate stability diagrams in quadrupole mass spectrometry // Journal of American Society for Mass Spectrometry. 2002. Vol. 13. P. 597–613. Doi: 10.1016/S1044-0305(02)00365-3
16. *Бердников А.С., Веренчиков А.Н., Коненков Н.В.* О методологических проблемах при замене дискретных масс-спектрометрических моделей на континуальные модели // Масс-спектрометрия. 2017. Т. 14, № 3. С. 176–189.
17. *Бердников А.С., Кузьмин А.Г., Масюкевич С.В.* Об использовании стробоскопических выборок при анализе движения ионов в квадрупольных радиочастотных полях. I. Критический анализ концепции // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 3. С. 90–100. URL: <http://iairas.ru/mag/2018/abst3.php#abst12>
18. *Бердников А.С., Кузьмин А.Г., Масюкевич С.В.* Об использовании стробоскопических выборок при анализе движения ионов в квадрупольных радиочастотных полях. II. Исправление концепции // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 4. С. 135–145. URL: <http://iairas.ru/mag/2018/abst4.php#abst22>
19. *Verentchikov A., Berdnikov A., Yavor M.* Stable ion beam transport through periodic electrostatic structures: linear and non-linear effects // Physics Procedia. 2008. Vol. 1. P. 87–97.
20. *Berdnikov A.S., Douglas D.J., Konenkov N.V.* The effective potential for ion motion in a radio frequency quadrupole field revisited // International Journal of Mass Spectrometry. 2015. Vol. 377. P. 345–354.
21. *Berdnikov A.S., Douglas D.J., Konenkov N.V.* The pseudopotential for quadrupole fields up to  $q = 0.9080$  // International Journal of Mass Spectrometry. 2017. Vol. 421. P. 204–223.
22. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика (сер. "Теоретическая физика", т. 1). М.: Наука, 1988. 215 с.
23. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
24. *Буляница А.Л., Курочкин В.Е.* Исследование процессов упорядочивания в открытых системах (на примере эволюции колонии несовершенных мицелиальных грибов) // Научное приборостроение. 2000. Т. 10, № 2. С. 43–49. URL: <http://iairas.ru/mag/2000/abst2.php#abst5>
25. *Евстрапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Беленький Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е.* Особенности применения алгоритмов цифровой фильтрации электрофореграмм при анализе веществ на микрочипе // Научное приборостроение. 2003. Т.13, № 2. С. 57–63. URL: <http://iairas.ru/mag/2003/abst2.php#abst9>
26. *Буляница А.Л., Евстрапов А.А., Рудницкая Г.Е.* Метод моментов при расчете параметров каналов в микро-размерных системах // Научное приборостроение. 2003. Т. 13, № 4. С. 28–40. URL: <http://iairas.ru/mag/2003/abst4.php#abst3>
27. *Буляница А.Л.* Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15, № 2. С. 51–66. URL: <http://iairas.ru/mag/2005/abst2.php#abst8>



28. Sudakov M. Effective potential and the ion axial beat motion near the boundary of the first stable region in a nonlinear ion trap // *International Journal of Mass Spectrometry*. 2001. Vol. 206. P. 27–43.
29. Sudakov M. Nonlinear equations of the ion vibration envelope in quadrupole mass filters with cylindrical rods // *International Journal of Mass Spectrometry*. 2017. Vol. 422. P. 62–73.
30. Snyder D.T., Penga W.-P., Cooks R.G. Resonance methods in quadrupole ion traps // *Chemical Physics Letters*. 2017. Vol. 668. P. 69–89.

**Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург** (Бердников А.С., Кузьмин А.Г., Масыкевич С.В.)

**Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина, г. Рязань** (Конёнков Н.В.)

Контакты: Бердников Александр Сергеевич, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 15.10.2018

## ON THE APPLICATION OF THE METHOD OF STROBOSCOPIC SAMPLES IN THE STUDY OF QUADRUPOLE EXCITATION AND QUADRUPOLE RESONANCE

A. S. Berdnikov<sup>1</sup>, N. V. Kononkov<sup>2</sup>, A. G. Kuzmin<sup>1</sup>, S. V. Masyukevich<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*

<sup>2</sup>*Physical and Mathematical Department, Ryazan State University, Ryazan, Russia*

The paper analyzes some logical errors which exist in new theory of the quadrupole excitations for rf quadrupole mass filters which was suggested by M. Yu. Sudakov and E. V. Mamontov using the analysis of the envelopes for the stroboscopic samples of coordinates and velocities of ions in the rf quadrupole field. The paper also shows that by direct using of the equations produced by the perturbation theory it is possible to produce a clear model describing the main properties of quadrupole excitation, for which stroboscopic samplings are not required.

**Keywords:** quadrupole rf fields, pseudo potential of electric rf field, quadrupole excitation of ion oscillations, monodromy matrix, instability bands

### REFERENCES

1. Sudakov M.Yu., Mamontov E.V. [Research of the quadrupole filter of masses with quadrupole exaltation by method of the equation of bending around]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of technical physics], 2016, vol. 86, no. 11, pp. 112–120.  
Doi: 10.21883/jtf.2016.11.43824.1783. (In Russ.)
2. Sudakov M.Yu., Apackaya M.V. [The concept of effective potential for the description of the movement of ions in the kvadropolny filter of masses]. *Zhurnal ehksperimental'noj i tekhnicheskoy fiziki* [Journal of experimental and technical physics], 2012, vol. 142, pp. 222–229. (In Russ.)
3. Zhao X., Xiao Z., Douglas D.J. Overcoming Field Imperfections of Quadrupole Mass Filters with Mass Analysis in Islands of Stability. *Analytical Chemistry*, 2009, vol. 81, pp. 5806–5811. Doi: 10.1021/ac900711b
4. Kononkov N.V., Cousins L.M., Baranov V.I., Sudakov M.Yu. Quadrupole mass filter operation with auxiliary quadrupolar excitation: theory and experiment. *International Journal of Mass Spectrometry*, 2001, vol. 208, no. 1-3, pp. 17–27. Doi: 10.1016/S1387-3806(01)00375-X
5. Mak-Lahlan N.V. *Teoriya i primeneniye funkciy Matye* [Theory and applications of functions of Mathieu]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1953. 474 p. (In Russ.)
6. Bondarenko G.V. *Uravnenie Hilla i ego primeneniye v oblasti tekhnicheskikh kolebanij* [The equation of Hill and his application in the field of technical fluctuations]. Moscow, Leningrad, AS USSR, 1936. 49 p. (In Russ.)
7. Erugin N.P. *Metod Lappo-Danilevskogo v teorii linejnykh differencial'nykh uravnenij* [Lappo-Danilevsky's method in the theory of the linear differential equations]. Leningrad, Leningradskij universitet, 1956. 109 p. (In Russ.)
8. Shtokalo I.Z. *Linejnye differencial'nye uravneniya s peremennymi koehfficientami* [The simple differential equations with variable coefficients]. Kiev, Academy of Sciences of USSR Publ., 1960. 78 p. (In Russ.)
9. Shtokalo I.Z. *Operacionnye metody i ih razvitie v teorii linejnykh differencial'nykh uravnenij s peremennymi koehf-*

- ficentami* [Operational methods and their development in the theory of the linear differential equations with variable coefficients]. Kiev, Academy of Sciences of USSR, 1961. 128 p. (In Russ.).
10. Erugin N.P. *Linejnye sistemy obyknovennyh differentsial'nyh uravnenij s periodicheskimi i kvaziperiodicheskimi koehfficientami* [The linear systems of the ordinary differential equations with periodic and quasiperiodic coefficients]. Minsk, Akademiya nauk BSSR, 1963. 137 p. (In Russ.).
  11. Krasnosel'skij M.A. *Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nyh uravnenij* [The operator of shift on trajectories of the differential equations]. Moscow, Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1966. 331 p. (In Russ.).
  12. Gantmaher F.R. *Teoriya matric. Izd. 2-e, dop.* [Theory of matrixes. The edition 2 added]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 576 p. (In Russ.).
  13. Demidovich B.P. *Lekcii po matematicheskoy teorii ustojchivosti* [Lectures on a mathematical stability theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 472 p. (In Russ.).
  14. Yakubovich V.A., Starzhinskij V.M. *Linejnye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koehfficientami i ih prilozheniya* [The linear differential equations with periodic coefficients and their applications]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 720 p. (In Russ.).
  15. Kononkov N.V., Sudakov M.Yu., Douglas D.J. Matrix methods to calculate stability diagrams in quadrupole mass spectrometry. *Journal of American Society for Mass Spectrometry*, 2002, vol. 13, pp. 597–613. Doi: 10.1016/S1044-0305(02)00365-3
  16. Berdnikov A.S., Verentchikov A.N., Kononkov N.V. [About methodological problems when replacing discrete mass and spectrometer models by continual models]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spektrometry], 2017, vol. 14, no. 3, pp. 176–189. (In Russ.).
  17. Berdnikov A.S., Kuzmin A.G., Masyukevich S.V. [On the use of stroboscopic samples in the analysis of the motion of ions in quadrupole radio-frequency fields. I. Critical analysis of the concept]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 3, pp. 90–100. URL: <http://iairas.ru/en/mag/2018/abst3.php#abst12> (In Russ.).
  18. Berdnikov A.S., Kuzmin A.G., Masyukevich S.V. [On the use of stroboscopic samples in the analysis of the motion of ions in quadrupole radio-frequency fields. II. Correction of the concept]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 4, pp. 135–145. URL: <http://iairas.ru/en/mag/2018/abst4.php#abst22> (In Russ.).
  19. Verentchikov A., Berdnikov A., Yavor M. Stable ion beam transport through periodic electrostatic structures: linear and non-linear effects. *Physics Procedia*, 2008, vol. 1, pp. 87–97. Doi: 10.1016/j.phpro.2008.07.082
  20. Berdnikov A.S., Douglas D.J., Kononkov N.V. The effective potential for ion motion in a radio frequency quadrupole field revisited. *International Journal of Mass Spectrometry*, 2015, vol. 377, pp. 345–354. Doi: 10.1016/j.ijms.2014.08.009
  21. Berdnikov A.S., Douglas D.J., Kononkov N.V. The pseudopotential for quadrupole fields up to  $q = 0.9080$ . *International Journal of Mass Spectrometry*, 2017, vol. 421, pp. 204–223. Doi: 10.1016/j.ijms.2017.04.003
  22. Landau L.D., Lifshic E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. I. Mekhanika* [Theoretical physics. Vol. I. Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 215 p. (In Russ.).
  23. Yakubovich V.A., Starzhinskij V.M. *Parametricheskij rezonans v linejnyh sistemah* [Parametrical resonance in the linear systems]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 328 p. (In Russ.).
  24. Bulianitsa A.L., Kurochkin V.E. Studing ordering processes in open systems (on the example of pattern evolution in colonies of imperfect mycelial fungi). *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2000, vol. 10, no. 2, pp. 43–49. (In Russ.). URL: <http://iairas.ru/en/mag/2000/abst2.php#abst5>
  25. Evstrapov A.A., Bulyanitsa A.L., Rudnitskaya G.E., Belenkii B.G., Petryakov A.O., Kurochkin V.E. [Characteristic features of digital signal filtering algorithms as applied to electrophoresis on a microchip]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2003, vol. 13, no. 2, pp. 57–63. (In Russ.). URL: <http://iairas.ru/en/mag/2003/abst2.php#abst9>
  26. Bulyanitsa A.L., Evstrapov A.A., Rudnitskaya G.E. [Calculation of microscale system channel parameters by the method of moments]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2003, vol. 13, no. 4, pp. 28–40. URL: <http://iairas.ru/en/mag/2003/abst4.php#abst3> (In Russ.).
  27. Bulyanitsa A.L. [Mathematical modeling in microfluidics: basic concepts]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2005, vol. 15, no. 2, pp. 51–66. URL: <http://iairas.ru/en/mag/2005/abst2.php#abst8> (In Russ.).
  28. *Sudakov M.* Effective potential and the ion axial beat motion near the boundary of the first stable region in a nonlinear ion trap // *International Journal of Mass Spectrometry*. 2001. Vol. 206. P. 27–43.
  29. *Sudakov M.* Effective potential and the ion axial beat motion near the boundary of the first stable region in a nonlinear ion trap. *International Journal of Mass Spectrometry*, 2001, vol. 206, pp. 27–43. Doi: 10.1016/S1387-3806(00)00380-8
  30. Snyder D.T., Penga W.-P., Cooks R.G. Resonance methods in quadrupole ion traps. *Chemical Physics Letters*, 2017, vol. 668, pp. 69–89. Doi: 10.1016/j.ijms.2017.08.017

Contacts: *Berdnikov Aleksandr Sergeevich*,  
asberd@yandex.ru

Article received in edition 15.10.20