

---



---

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

---



---

УДК 539.19 + 532.5.032

© Б. П. Шарфарез

**ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ  
ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ НОВОГО СПОСОБА  
ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

Проведен анализ системы уравнений электрогидродинамики (ЭГД) в контексте описания физических процессов, протекающих при возбуждении акустической энергии в электроакустическом преобразователе нового типа. Выявлено, что при реализации устройства преобразователя необходимо придерживаться ряда ограничений и рекомендаций. Во избежание возбуждения кратных частот необходимо прикладывать однородное электрическое поле, жидкая среда также должна быть однородной и без примесей. Рабочая жидкость в преобразователе должна обладать малой удельной проводимостью, в противном случае происходит ее перегрев, возникают другие паразитные явления. Для повышения уровня прикладываемого электрического поля необходимо повышать электрическую прочность рабочей жидкости. Использование математического моделирования при помощи системы ЭГД-уравнений позволит оптимизировать устройство электроакустического преобразователя нового типа.

*Кл. сл.:* электрогидродинамика, пондеромоторные силы, электродинамика, уравнение Навье—Стокса, уравнение сохранения энергии, уравнения непрерывности, электрическая прочность рабочей жидкости

### ВВЕДЕНИЕ

В патенте [1] был предложен новый способ электроакустического преобразования, а в работах [2, 3] приводятся первичные результаты по его теоретическому обоснованию. Характерной особенностью этого преобразования является необходимость приложения к некой пористой среде мощного постоянного электрического поля наряду с умеренным переменным электрическим полем, несущим акустическую информацию. Изучение гидродинамических процессов в условиях доминирования либо магнитного, либо электрического полей занимают соответственно пограничные дисциплины: магнитная гидродинамика (МГД) и электрогидродинамика (ЭГД) [4, с. 650].

В случае МГД при движении электропроводящей среды (газа, жидкости), находящейся в магнитном поле, в ней индуцируются электрические поля и токи, на которые действует магнитное поле и которые сами могут повлиять на магнитное поле. Таким образом, возникает сложная картина взаимодействия магнитного и гидродинамического явлений, и которая должна рассматриваться на основе совместных уравнений гидродинамики и электромагнитного поля.

В средах с очень малой электропроводностью и без приложенного извне большого магнитного

поля при скоростях жидкости  $v$ , много меньших скорости света  $|v| \ll c$ , определяющим во взаимодействии электромагнитного поля со средой является не магнитное, а электрическое поле. Эту область со своим кругом интересных задач и изучает ЭГД [4, с. 652, 653]. Электрическое поле описывается в ЭГД законами электростатики, а его воздействие на среду часто учитывают, ограничиваясь электрической частью силы Лоренца  $\rho_e \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  — вектор электрической напряженности стороннего электрического поля;  $\rho_e$  — объемная плотность заряда в жидкости. Именно в таком виде была получена Максвеллом сила<sup>1</sup> (ее еще называют пондеромоторной силой), действующая на несжимаемый диэлектрик в произвольном неоднородном электрическом поле при неизменной диэлектрической проницаемости [5, с. 138] (см., например, также [6, с. 309]). Такой же вид имела объемная сила в уравнении движения Навье—

---

<sup>1</sup> Максвеллом было получено следующее выражение для пондеромоторной силы (см. [5, с. 138], а также выражение (1)):  $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} - \frac{E^2}{8\pi} \nabla \varepsilon$  (обозначения см. в тексте). Недостающий здесь третий член из (1) был позднее добавлен Гельмгольцем. Приведенное выражение записано в системе СГСЭ.

Стокса в работах [2, 3], где рассматривалось движение жидкости под воздействием постоянного или переменного электрического поля при описании нового принципа электроакустического преобразования.

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Целью настоящей работы является описание условий, при которых справедливо представление объемной силы  $\mathbf{f}$  в уравнении Навье—Стокса движения жидкости под воздействием электрического поля в укороченном виде  $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E}$ , а также запись замкнутой системы уравнений ЭГД применительно к задачам, поставленным в работах [2, 3].

### ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ

Известно, что электрическая часть силы Лоренца  $\rho_e \mathbf{E}$  является лишь одной из составляющих пондеромоторной силы, действующей на среду в произвольном неоднородном электрическом поле. Пондеромоторные силы, действующие в идеальном диэлектрике, описаны, например, в работах [5, § 32 и 34], [7, § 15], [8, глава I, § 1], [9, с. 86], [10, с. 128–130], [11, § 32] и др. Запишем выражение для этой силы в системе СИ [10, с. 130]:

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left( E^2 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{f}$  — пондеромоторная сила;  $E = |\mathbf{E}|$ ;  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $\rho$  — ее плотность. Здесь и далее для перехода в выражениях для удельной силы  $\mathbf{f}$  в гауссовую систему необходимо второй и третий (нелинейные) слагаемые для  $\mathbf{f}$  в СИ домножить на коэффициент  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$  (см., например, выражение для  $\mathbf{f}$  в гауссовой системе в [5, с. 138] или [8, с. 24]).

Здесь отметим один предельный случай формулы (1), который касается слабо поляризуемых диэлектриков, для которых справедлива оценка  $\varepsilon \approx 1$  (например, воздух) [11, с. 153]:

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{2} \nabla E^2. \quad (1a)$$

Из (1a) видно, что при  $\varepsilon \rightarrow 1$  нелинейный член становится пренебрежимо малым даже при умеренном  $\nabla E^2$  ( $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}$ ).

Выражение (1) упрощается в случае, если известна зависимость  $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ . Например, в [8, с. 24] и в [10, с. 130] используется формула Клаузиаса—Моссотти для однородных диэлектриков

$$\frac{\varepsilon - 1}{(\varepsilon + 2)\rho} = C_{\text{к-м}}, \quad (2)$$

где  $C_{\text{к-м}} = \text{const}$  для данной среды (ее значение см. [4, с. 373]). Из (2) следует равенство [10, с. 130] и в [8, с. 24]:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{3}. \quad (3)$$

С учетом (2) выражение (1) принимает вид [9, с. 130]

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{6} \nabla (E^2 (\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)). \quad (1б)$$

Формула Клаузиаса—Моссотти справедлива для неполярных диэлектриков,<sup>2</sup> подчиняющихся определенному условию [4, с. 373, выражение (2)]. Для жидкостей, состоящих из неполярных молекул, формула (2) выполняется с высокой точностью. Для газообразных полярных<sup>3</sup> диэлектриков и сильно разбавленных полярных жидкостей в неполярном растворителе формула (2) также верна [4, с. 374].

Обобщением формулы Клаузиаса—Моссотти на случай полярных молекул является формула Ланжевена—Дебая [4, с. 575], в которой принимается вместо постоянной  $C_{\text{к-м}}$  своя постоянная  $C_{\text{л-д}}$ .

В области оптических частот видимого и УФ-диапазонов формула Клаузиаса—Моссотти (2) переходит в формулу Лоренца—Лоренца [4, с. 611]. В этом случае в формуле вида (2) фигурирует не относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ , а квадрат показателя преломления оптически прозрачной среды  $n^2$ , т. к. для оптического диапазона относительная магнитная проницаемость  $\mu = 1$  и  $\varepsilon = n^2$ . Формула (2) в этом случае преобразуется к виду (там же)

<sup>2</sup> Неполярные диэлектрики — диэлектрики с неполярными молекулами. В отсутствие внешнего электрического поля дипольный момент в молекулах отсутствует. Примеры:  $\text{N}_2$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4$ .

<sup>3</sup> Полярные диэлектрики — диэлектрики с полярными молекулами. В отсутствие внешнего электрического поля в молекулах присутствует дипольный момент. Примеры:  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{SO}_2$ ,  $\text{CO}$ .

$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)\rho} = C_{л-л}. \quad (4)$$

Для газов формула Лоренца—Лоренца (4) преобразуется к виду [12, с. 7]

$$\frac{n - 1}{\rho} = C,$$

где, например для воздуха,  $C = 0.22635 \text{ см}^3/\text{г}$ .

Полезно привести следующее соображение о частотной привязке приведенных формул. Формула Ланжевена—Дебая выполняется и для диэлектриков, находящихся в переменном электрическом поле, т. к. дипольные моменты молекул еще успевают ориентироваться вслед за полем вплоть до СВЧ-диапазона. В более высокочастотных микроволновом и ИК-диапазонах формула Ланжевена—Дебая переходит в формулу Клаузиуса—Моссотти, а в видимом и УФ-диапазоне, когда уже и ионы не успевают смещаться вслед за полем, формула Ланжевена—Дебая переходит в формулу Лоренца—Лоренца (см. URL: <http://knowledge.su/l/lanzhevena-debaya-formula>).

**Анализ формул (1), (16).**

Как видно из выражений (1), (16), объемная пондеромоторная сила  $\mathbf{f}$  является нелинейной по амплитуде вектора электрической напряженности. Рассмотрим последствия этого на примере, актуальном для работ [2, 3]. Пусть вектор  $\mathbf{E}$  представляет собой сумму векторов  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$ , где  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ , а  $\mathbf{E}_1$  — коллинеарный ему вектор, совершающий гармонические колебания частоты  $\omega$ :  $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{E}_0}{E_0} E_1 \cos \omega t$  (временная зависимость принята не в экспоненциальной форме ввиду нелинейности задачи). Здесь  $E_0$  и  $E_1$  — модули (амплитуды) соответствующих векторов. Тогда имеем для модуля вектора  $\mathbf{E}$ :

$$E = E_0 + E_1 \cos \omega t. \quad (5)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} E^2 &= (E_0 + E_1 \cos \omega t)^2 = \\ &= E_0^2 + 2E_0E_1 \cos \omega t + \frac{E_1^2}{2}(1 + \cos 2\omega t) = \\ &= \left( E_0^2 + \frac{E_1^2}{2} \right) + 2E_0E_1 \cos \omega t + \frac{E_1^2}{2} \cos 2\omega t. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) видно, что если не равны нулю вторые и третьи слагаемые в (1), (16), содержащие  $E^2$ , то кроме постоянной составляющей  $\rho_e E_0$  и гармони-

ческой составляющей  $\rho_e E_1 \cos \omega t$  частоты  $\omega$  возникают дополнительные постоянные составляющие и составляющие кратной частоты  $2\omega$ . И если вторичные постоянные составляющие не искажают исходный информативный сигнал частоты  $\omega$ , то кратная гармоника является паразитной. Впрочем, такова специфика нелинейных процессов. В случае, если второе и третье слагаемые в (1), (16) равны нулю или пренебрежимо малы по сравнению с линейным членом  $\rho_e \mathbf{E}$ , то паразитные составляющие отсутствуют, либо пренебрежимо малы.

Второе и третье слагаемые в (1), (16) не равны нулю, если стоящие под знаком градиента величины неоднородны по пространству. Второй член неоднороден по пространству, если непостоянна по пространству диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ . Третий член отличен от нуля либо когда неоднородно поле  $E$ , либо когда непостоянна по пространству диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ , либо когда они неоднородны одновременно. Что касается выражения (1а) для пондеромоторной силы в слабополяризуемых диэлектриках, то при малой неоднородности поля  $E$  она также вырождается к случаю  $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E}$ .

На неоднородность величины  $\varepsilon$  влияет пространственное возмущение плотности среды  $\rho$ . Возмутителями могут быть, в частности, вариации температуры и акустического давления. В первом случае причиной может быть, например, неоднородное температурное поле  $T$ . Пусть температурное поле является суммой  $T = T_0 + T_1$ . Ему соответствует плотность среды  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ , где индексу 0 соответствует невозмущенное состояние поля, а индексу 1 — его возмущенное состояние. Тогда, согласно [13, с. 306], имеем для возмущения плотности  $\rho_1$ :

$$\rho_1 = \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial T} \right)_p T_1 = -\rho_0 \beta T_1.$$

Здесь  $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial T} \right)_p$  — температурный коэффициент расширения жидкости (газа).

Далее будет рассматриваться ситуация, когда электрическая проводимость среды отлична от нуля. Следствием этого будет отличие от нуля и тока проводимости в среде. Это в свою очередь вызывает в общем случае неоднородный нагрев среды, что и приводит к неоднородности ее плотности (см., например, в работе [14] процесс на примере кругового капилляра), а следовательно, и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ .

Другим возмутителем плотности является аку-

стическое давление  $p_1$  (общее давление  $p$  вновь обозначаем в виде суммы  $p = p_0 + p_1$ , где  $p_0$  — равновесное давление в среде). Хорошо известна связь между возмущением давления  $p_1$  и возмущением плотности  $\rho_1$  (акустический процесс обычно рассматривается как адиабатический, т. е.  $s = \text{const}$ , где  $s$  — удельная энтропия) [13, с. 351]

$$p_1 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \rho_1.$$

### Система уравнений электрогидродинамики.

Электрогидродинамика (ЭГД) представляет собой уже устоявшийся междисциплинарный раздел науки, в котором тесно взаимодействуют такие направления, как гидродинамика, электродинамика, в основном в своей электростатической части, электрохимия и т. д. [15]. Объектом исследований в ЭГД являются жидкости (газы), обладающие слабой проводимостью  $\sigma$  ( $\sigma \leq 10^{-7} \div 10^{-12}$  Ом<sup>-1</sup>см<sup>-1</sup>). Библиография ЭГД весьма обширна, здесь же, кроме упомянутых выше монографии [8] и обзора [15], в котором подробно представлена современная библиография по теме, сошлемся только на ключевые работы [16–24]. Приведем далее два коротких, но емких определения ЭГД-системы, следуя [16, с. 15, 16]:

– ЭГД-система — система, в которой действующее электрическое поле много больше индуцированного электрического поля и действующее магнитное поле порядка индуцированного магнитного поля;

– ЭГД-системой называется такая система, в которой определяющими являются электростатические и гидродинамические силы.

Основным инструментом ЭГД является замкнутая система уравнений, приведенная с различными вариациями в упомянутых выше работах об ЭГД-системах. В систему, как правило, входит уравнение сохранения импульса (Навье—Стокса), гидродинамическое и электродинамическое уравнения непрерывности, уравнение сохранения энергии и ряд уравнений электродинамики. Коротко остановимся на них и приведем накладываемые ЭГД ограничения на физические процессы, подпадающие под его изучение.

### Электродинамические уравнения.

В качестве электродинамической основы берется система уравнений Максвелла для подвижной среды. Вначале, однако, выпишем исходную систему уравнений Максвелла для неподвижной среды в обеих системах: в СИ и гауссовой системе

В системе СИ:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_e, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

дополняемые материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (7a)$$

В гауссовой системе:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi \rho_e, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

дополняемые материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (8a)$$

Здесь, помимо уже принятых выше, введены следующие обозначения:  $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции;  $\mathbf{H}$  — вектор магнитной напряженности;  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции;  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока проводимости<sup>4</sup>;  $\sigma$  — удельная проводимость (например, в системе СИ [См/м], или [Ом<sup>-1</sup>м<sup>-1</sup>]);  $c$  — скорость света в вакууме;  $\mu_0$  — магнитная постоянная, равная  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость.

Следуя, например, [20, § 1], выпишем адаптированную к ЭГД систему уравнений Максвелла и ограничения, накладываемые на исходные уравнения Максвелла при получении уравнений ЭГД.

Если поле меняется во времени, то, согласно (7), (8), в среде будет индуцироваться магнитное поле  $\mathbf{H}$  за счет токов проводимости  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  и токов смещения  $\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ .

### Ограничение на величину магнитного поля.

В электрогидродинамике обычно полагают, что магнитное поле равно нулю  $\mathbf{H} = \mathbf{B} = 0$ , что, согласно уравнениям в (7), (8), где фигурирует  $\nabla \times \mathbf{E}$ , означает, что  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , что говорит о потенциальности вектора  $\mathbf{E}$ , т. е. потенциальности электрического поля. В [20, § 1] установлены границы такого приближения.

Мерой пренебрежения магнитными эффектами может служить отношение плотностей энергий магнитного и электрического полей

<sup>4</sup> Плотность тока — векторная физическая величина, имеющая смысл силы электрического тока, протекающего через элемент поверхности единичной площади.

$$\frac{\mu\mu_0 H^2}{\varepsilon\varepsilon_0 E^2} \ll 1. \quad (9)$$

**Ограничение на ток проводимости.**

Согласно уравнению в (7)  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , напряженность магнитного поля, индуцированного током проводимости, по порядку величины составляет

$$H \sim \sigma El, \quad (10)$$

где  $l$  — характерный пространственный масштаб, где существенно изменяется  $H$ . Подстановка (10) в (9) дает ограничение на величину удельной проводимости  $\sigma$ , при которой можно пренебречь магнитным полем

$$\sigma \ll \frac{1}{l} \left( \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

При принятых в [20] значениях ( $l = 10^{-2}$  м,  $\varepsilon = \mu = 1$ ) знак равенства в (11) достигается при  $\sigma \approx 0.3 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ . Для примера, удельная проводимость  $\sigma$  составляет (информация по адресу в Википедии "Удельная электропроводность" <https://slovar.wikireading.ru/2618966>): для морской воды  $3 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ , для воды дистиллированной  $10^{-4} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ , для воздуха у поверхности земли  $\sigma = 2.2 \cdot 10^{-18} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ . Для такой жидкости, как трансформаторное масло,  $\sigma = 10^{-13} \div 10^{-12} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  (ссылка по адресу [https://studopedia.ru/10\\_130433\\_kompensatsionnaya-obmotka.html](https://studopedia.ru/10_130433_kompensatsionnaya-obmotka.html)).

Как видно из этих данных, использование, например, морской воды в качестве рабочей жидкости чревато возникновением больших токов проводимости и, как следствие, перегревом электроакустического преобразователя.

**Ограничения по токам смещения  $\mathbf{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ .**

Следуют из второго уравнения Максвелла в (7). Как видно из этого уравнения, ток смещения индуцирует магнитное поле напряженностью  $H$  порядка [20, с. 13]  $H \sim \frac{\varepsilon\varepsilon_0 El}{t_0} \sim \varepsilon\varepsilon_0 E l f$ , где  $t_0 = 1/f$  — период колебаний частоты  $f$ . Подстановка полученной оценки в (9) дает ограничение по частоте колебаний [20, с. 13]

$$f \ll \frac{c}{nl}, \quad (12)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме;  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  —

показатель преломления электромагнитной волны в среде. При принятых в [20] значениях ( $n \approx 3$ ,  $l = 10^{-2}$ ) получена оценка  $f \ll 10$  МГц. Например, для дистиллированной воды ( $n \approx 1.33$ ) ограничение (12) почти вдвое смягчится —  $f \ll 22.5$  МГц, а для воздуха ( $n \approx 1$ ) смягчится втрое —  $f \ll 30$  МГц.

Отметим, что частота ультразвуковых колебаний, применяемых в промышленности и биологии, лежит в диапазоне от нескольких десятков кГц до единиц МГц (ссылка по адресу: <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%BB%D1%8C%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B2%D1%83%D0%BA>). Это означает отсутствие рассматриваемого ограничения для УЗ-излучателей, построенных на принципе, описанном в [1–3].

**Ограничение на скорость движения жидкости.**

Еще одно ограничение, допускаемое в ЭГД, касается соотношения между скоростью движения жидкой среды  $|\mathbf{v}|$  и скоростью света  $c$ . Уравнения ЭГД выводятся, исходя из разумного допущения

$$|\mathbf{v}| \ll c. \quad (13)$$

Очевидно, что это неравенство, безусловно, выполняется в рассматриваемом здесь случае.

**Уравнения электрогидродинамики.**

Получаются синтетическим объединением системы уравнений гидродинамики и системы уравнений Максвелла для движущихся сред с учетом принятых выше ограничений и замечаний относительно системы уравнений Максвелла. Отметим, что материальные уравнения (7а), (8а) в движущейся среде видоизменяются и определяются общими уравнениями Минковского для движущихся сред [7, с. 364] (см. также [16, с. 15]). Например, (8а) имеет вид [7, с. 364]

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (14)$$

Системы ЭГД-уравнений выписаны в упомянутых выше работах [8, 15–24], однако здесь выпишем их версию для несжимаемой жидкости, представленную в работах [20, 23, 24], которая имеет вид [20, с. 14]<sup>5</sup>:

<sup>5</sup> Аналогичная система ЭГД-уравнений применительно к сжимаемой жидкости выписана в работе [16, § 1.1, 1.2].

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\sigma E^2}{\rho c_p}, \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (17)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (18)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \rho_e \mathbf{v} + \varepsilon_0 \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}), \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (20)$$

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left( E^2 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T. \quad (21)$$

Здесь  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости;  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения силы тяжести;  $\mathbf{f}$  — объемная внешняя сила;  $T$  — абсолютная температура в жидкости;  $\chi$  — коэффициент температуропроводности жидкости;  $\varphi$  — скалярный потенциал поля  $\mathbf{E}$ ;  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации. Как видно из (21), объемная сила  $\mathbf{f}$  принимается равной пондеромоторной силе, действующей в идеальном

диэлектрике (1).<sup>6</sup> Слагаемое  $\frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left( E^2 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T$  в (21)

называется электрострикционной силой. Вследствие потенциальности этой силы она может быть включена в градиент давления. Это означает, что электрострикция приводит к понижению давления

на величину  $\frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left( E^2 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T$ .

#### Замечания по приведенным уравнениям.

В уравнении теплопроводности (16) справа стоит тепловой источник, связанный с мощностью выделения джоулева тепла в единице объема  $w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  при плотности тока  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , т. е. по умолчанию принимается, что остальные слагаемые плотности тока (19) пренебрежимо малы. Впрочем, в [20] по этому поводу даны комментарии. Однако этот вопрос в [20] не затронут для случая электроосмотических процессов, когда слагаемое  $\rho_e \mathbf{v}$  явно отлично от нуля в двойном электрическом слое. Поэтому этот случай требует отдельно специального рассмотрения (техника подобных

<sup>6</sup> Такое же выражение присутствует для силы  $\mathbf{f}$  в большинстве цитированных работ по ЭГД при наличии ряда отличий. Например, в обзоре [15] вместо силы  $\mathbf{f}$  присутствует тензор с такой же структурой слагаемых (но только тензорных), что и в (21).

выкладок приведена, например, в [14]).

В обзоре [15] в ЭГД-системе присутствует электродинамическое уравнение непрерывности  $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ , которого нет в системе (21), что не принципиально при обеспечении замкнутости ЭГД-системы.

#### Пробивная напряженность (электрическая прочность) диэлектриков (по материалам [24]).

При напряженности электрического поля, превосходящей предел электрической прочности диэлектрика, наступает пробой. Пробой представляет собой процесс разрушения диэлектрика, в результате чего диэлектрик теряет электроизоляционные свойства в месте пробоя. Величину напряжения, при котором происходит пробой диэлектрика, называют пробивным напряжением  $U_{\text{пр}}$ , а соответствующее значение напряженности электрического поля называется электрической прочностью диэлектрика  $E_{\text{пр}}$ .

Для равномерного электрического поля электрическая прочность (пробивная напряженность) диэлектрика  $E_{\text{пр}}$  определяется по формуле

$$E_{\text{пр}} = \frac{U_{\text{пр}}}{d},$$

где  $d$  — толщина диэлектрика в месте пробоя.

Пробой воздуха, как и прочих газов, является следствием ударной ионизации. Содержащиеся в газе положительные и отрицательные ионы и электроны, находящиеся в хаотическом тепловом движении, при наложении поля получают некоторую добавочную скорость и начинают перемещаться в соответствующем направлении. Если эта энергия достаточно велика, будет происходить ионизация молекул. В результате ионизации создаются положительный ион и электрон. Этот электрон может, в свою очередь, ионизировать, создавать новые электроны и положительные ионы. Возникшие положительные ионы наряду с электронами также участвуют в ионизации. В результате лавинного процесса образования свободных зарядов резко возрастает сила тока и наступает пробой газа. Пробивная напряженность воздуха в нормальных условиях (давление 760 мм рт. ст. и температура 20 °С) составляет 3.2 кВ/мм. Пробивная напряженность трансформаторного масла 50–180 кВ/мм.

Заметим также, что электрическая прочность диэлектрика зависит от окружающего давления. Существуют также различные присадки для повышения электрической прочности диэлектриков.

При проектировании электроакустического излучателя необходимо иметь в виду величину электрической прочности диэлектриков.

## ВЫВОДЫ

В результате проведенного анализа системы уравнений ЭГД в контексте описания физических процессов, протекающих при возбуждении акустической энергии в электроакустическом преобразователе нового типа [1–3], выявлено, что при реализации устройства преобразователя необходимо придерживаться ряда ограничений и рекомендаций:

– для избежания возбуждения кратных частот необходимо прикладывать однородное электрическое поле; жидкая среда также должна быть однородной и без примесей;

– рабочая жидкость в преобразователе должна обладать малой удельной проводимостью, в противном случае происходит ее перегрев, возникают другие паразитные явления;

– для повышения уровня прикладываемого электрического поля необходимо учитывать рекомендации по повышению электрической прочности рабочей жидкости;

– использование математического моделирования при помощи системы ЭГД-уравнений позволяет оптимизировать устройство электроакустического преобразователя нового типа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shishov S.V., Andrianov S.A., Dmitriev S.P., Ruchkin D.V.* Method of converting electric signals into acoustics oscillations and an electric gas-kinetic transducer. Patent US N 8,085,957, B2. Dec. 27, 2011.
2. *Сергеев В.А., Шарфарец Б.П.* Об одном новом методе электро-акустического преобразования. Теория, основанная на электрокинетических явлениях. Ч. I. Гидродинамический аспект // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 2. С. 25–35.  
URL: <http://213.170.69.26/mag/2018/abst2.php#abst4>.
3. *Сергеев В.А., Шарфарец Б.П.* Об одном новом методе электроакустического преобразования. Теория, основанная на электрокинетических явлениях. Ч. II. Акустический аспект // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 2. С. 36–44.  
URL: <http://213.170.69.26/mag/2018/abst2.php#abst5>.
4. Физическая энциклопедия. Т. 2 / Под ред. А.М. Прохорова. М.: Сов.энциклопедия, 1990. 703 с.
5. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Физматлит, 2004. 656 с.
6. *Ньюмен Дж.* Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 464 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 621 с.
8. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей: физические основы электрогидродинамики. М.: Наука, 1979. 320 с.
9. Физическая энциклопедия. Т. 4 / Под ред. А.М. Прохорова. М.: Сов. Энциклопедия, 1994. 703 с.
10. *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ, 1948. 540 с.
11. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
12. *Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Сперанский А.В., Тотышев К.В.* Алгоритмы определения параметров схем теневого фотографирования. Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, 2013. 95 с.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
14. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е.* К вопросу об определении стационарного температурного поля в капилляре при прохождении в нем электрического тока, а также об изменении полей концентрации примесей в этом температурном поле // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 2. С. 53–60.  
URL: <http://213.170.69.26/mag/2015/abst2.php#abst6>.
15. *Жакин А.И.* Электрогидродинамика. Обзор // УФН. 2012. Т. 182, № 5. С. 495–520.
16. *Рубаинов И.Б., Бортников Ю.С.* Электрогазодинамика. М.: Атомиздат, 1971. 168 с.
17. *Мелчер Дж., Тейлор Дж.* Электрогидродинамика: обзор роли межфазных касательных напряжений // Механика: Сб. переводов. 1971. № 5. С. 66–99.
18. *Мелчер Дж.Р.* Электрогидродинамика // Магнитная гидродинамика. 1974. Т. 2. С. 3–30.
19. *Гогосов В.В., Полянский В.А.* Электрогидродинамика // Итоги науки и техники: Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1976. Т. 10. С. 5–85.
20. *Болога М.Н., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А.* Электронконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 320 с.
21. *Стишков Ю.К., Остапенко А.А.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Л.: ЛГУ, 1989. 176 с.
22. *Electrohydrodynamics / Ed. by Antonio Castellanos.* Vien: Springer-Verlag, 1998. 362 p.
23. *Остроумов Г.А.* К вопросу о гидродинамике электрических разрядов // ЖТФ. 1954. Т. 24, № 10. С. 1915.
24. *Остроумов Г.А.* Электрическая конвекция (обзор) // ИФЖ. 1966. Т. 10, № 5. С. 683–695.
25. *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике для инженеров и студентов. М.: Наука, 1971. 939 с.
26. *Богородицкий Н.П., Пасынков В.В., Тареев Б.М.* Электротехнические материалы. Учебник для вузов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 304 с.

Институт аналитического приборостроения РАН,  
Санкт-Петербург

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,  
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 13.08.2018

## APPLICATION OF THE SYSTEM OF ELECTROHYDRODYNAMICS EQUATIONS FOR MATHEMATICAL MODELING OF A NEW METHOD OF ELECTRO-ACOUSTIC TRANSFORMATION

**B. P. Sharfarets**

*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*

An analysis of the system of EHD equations in the context of describing the physical processes occurring during the excitation of acoustic energy in an electroacoustic transducer of a new type is carried out. It is revealed that when implementing a converter device, it is necessary to adhere to a number of limitations and recommendations. To avoid excitation of multiple frequencies, it is necessary to apply a uniform electric field, the liquid medium must also be homogeneous and without impurities. The working fluid in the converter must have a low specific conductivity, otherwise it overheats, other parasitic phenomena occur. To increase the level of the applied electric field, it is necessary to increase the electrical strength of the working fluid. The use of mathematical modeling with the help of the system of EHD equations will allow us to optimize the device of an electroacoustic transducer of a new type.

**Keywords:** electrohydrodynamics, ponderomotive forces, electrohydrodynamics, the Navier-Stokes equation, the equation of conservation of energy, equations of continuity, electric strength of working fluid

### REFERENCES

1. Shishov S.V., Andrianov S.A., Dmitriev S.P., Ruchkin D.V. *Method of converting electric signals into acoustics oscillations and an electric gas-kinetic transducer*. United States Patent N US 8,085,957, B2. Dec. 27, 2011.
2. Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [About one new method of electroacoustic transformation. A theory based on electrokinetic phenomena. Part I. The hydrodynamic aspect]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 25–35. Doi: 10.18358/np-28-2-i2535. (In Russ.).
3. Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [About one new method of electroacoustic transformation. A theory based on electrokinetic phenomena. Part II. The acoustic aspect]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 36–44. Doi: 10.18358/np-28-2-i3644. (In Russ.).
4. Prohorov A.M., ed. *Fizicheskaya enciklopediya* [Physical encyclopedia]. Vol. 2. Moscow, Soviet encyclopedia Publ., 1990. 703 p. (In Russ.).
5. Sivuhin D.V. *Obshchij kurs fiziki. T. 3. Elektrichestvo* [General course of physics. Vol. 3. Electricity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 656 p. (In Russ.).
6. Newman J. *Elektrokhimicheskie sistemy* [Electrochemical Systems]. Moscow, Mir Publ., 1977. 464 p. (In Russ.).
7. Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. VIII. Elektrodinamika sploshnyh sred* [Theoretical physics. Vol. VIII. Electrodynamics of continuous environments]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 621 p. (In Russ.).
8. Ostroumov G.A. *Vzaimodejstvie ehlektricheskikh i gidrodinamicheskikh polej: fizicheskie osnovy ehlektrogidrodinamiki* [Interaction of electric and hydrodynamic fields: physical fundamentals of electrohydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (In Russ.).
9. Prohorov A.M. ed. *Fizicheskaya enciklopediya* [Physical encyclopedia]. Vol. 4. Moscow, Soviet encyclopedia Publ., 1994. 703 p. (In Russ.).
10. Stretton J.A. *Teoriya elektromagnetizma* [Theory of electromagnetism]. Moscow, GITTL Publ., 1948. 540 p. (In Russ.).
11. Tamm I.E. *Osnovy teorii elektrichestva* [Bases of the theory of electricity]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 616 p. (In Russ.).
12. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Speranskij A.V., Totyshev K.V. *Algoritmy opredeleniya parametrov skhem tenovogo fotografirovaniya* [Algorithms of determination of parameters of schemes of shadow photography]. Sarov physics and technology institute of NIYaU MEPhI, 2013. 95 p. (In Russ.).



13. Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 736 p. (In Russ.).
14. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E. [To the question about the definition of a stationary temperature field in the capillary during the passage of electric current and the change in water concentration of impurities in the temperature field]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 2, pp. 53–60. (In Russ.).  
URL: <http://213.170.69.26/mag/2015/abst2.php#abst6>.
15. Zhakin A.I. [Electrohydrodynamics. Review]. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* [Achievements of physical sciences], 2012, vol. 182, no 5, pp. 495–520.  
Doi: 10.3367/UFNr.0182.201205b.0495. (In Russ.).
16. Rubashov I.B., Bortnikov Yu.S. *Elektrogazodinamika* [Electrogas dynamics]. Moscow, Atomizdat Publ., 1971. 168 p. (In Russ.).
17. Melcher G., Tejlor G. [Electrohydrodynamics: review of a role of interphase tangent tension]. *Mekhanika: Sbornik perevodov* [Mechanics: Collection of translations], 1971, no. 5, pp. 66–99. (In Russ.).
18. Melcher G.R. [Electrohydrodynamics]. *Magnitnaya gidrodinamika* [Magnetohydrodynamics], 1974, vol. 2, pp. 3–30. (In Russ.).
19. Gogosov V.V., Polyanskij V.A. [Electrohydrodynamics]. *Itogi nauki i tekhniki: Mekhanika Zhidkosti i Gaza* [Results of science and technology: Fluid Dynamics], 1976, vol. 10, pp. 5–85. (In Russ.).
20. Bologa M.N., Grosu F.P., Kozhuhar' I.A. *Elektrokonvekciya i teploobmen* [Electroconvection and heat exchange]. Chisinau, Shtiintsa, 1977. 320 p. (In Russ.).
21. Stishkov Yu.K., Ostapenko A.A. *Elektrohidrodinamicheskie techeniya v zhidkih dielektrikah* [Electro-hydrodynamic currents in liquid dielectrics]. Leningrad, LGU, 1989. 176 p. (In Russ.).
22. Castellanos Antonio, ed. *Electrohydrodynamics*. Vien: Springer-Verlag, 1998. 362 p.
23. Ostroumov G.A. [To a question of hydrodynamics of electric discharges]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of technical physics], 1954, vol. 24, no. 10, pp. 1915. (In Russ.).
24. Ostroumov G.A. [Electric convection (review)]. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 1966, vol. 10, no. 5, pp. 683–695. (In Russ.).
25. Yavorskij B.M., Detlaf A.A. *Spravochnik po fizike dlya inzhenerov i studentov* [The reference book on physics for engineers and students]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 939 p. (In Russ.).
26. Bogorodickij N.P., Pasyukov V.V., Tareev B.M. *Elektrotekhnicheskie materialy. Uchebnik dlya vuzov* [Electrotechnical materials. The textbook for higher education institutions]. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1985. 304 p. (In Russ.).

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,  
sharb@mail.ru

Article received in edition 13.08.2018