

---



---

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

---



---

УДК 517.958 : 532.5

© А. Л. Буляница, К. И. Белоусов, А. А. Евстапов

**ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕРНИЗИРОВАННОЙ МОДЕЛИ  
СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЯ  
ФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ЖИВОМ ОРГАНИЗМЕ**

Для описания движения физиологических жидкостей в организме в ряде случаев можно использовать модель струйного течения, например, для перемещения крови из капилляра в вену или артерию. Геометрическая схема движения представляет собой объединение канала малого сечения с камерой, существенно больших размеров. В работе рассматривается применимость модели затопленной струи. Результаты расчета скоростей движения, основанные на моделях, допускающих аналитическое решение, а именно первое и второе приближения струйного течения, сопоставляются с результатами численного решения уравнения Навье—Стокса методом конечных элементов с использованием пакета программ COMSOL MULTIPHYSICS. Обсуждается идея корректировки параметра струи с учетом дополнительно составляющей потока импульса.

*Кл. сл.:* движение крови, струйное течение, поток импульса, приближенное аналитическое решение, COMSOL MULTIPHYSICS

### ВВЕДЕНИЕ

Подавляющее большинство физиологических процессов в человеческом организме требует переноса жидкостей по длинным тонким каналам широкого диапазона размеров: диаметр сечения — от нескольких мкм до мм, длина — десятки мм. При этом во многих случаях обоснованно применяется приближение пуазейлевого профиля скорости. В том случае, когда происходит переход узкого канала (например, капилляра) в более широкий (вена, артерия и т. д.), представляется допустимым использовать схемы струйного течения. При изучении движения крови в легких (т. н. малый круг кровообращения), т. е. в условиях малых давлений (15–25 мм рт. ст.), при диаметрах капилляров порядка 3–11 мкм, диаметры артерий и вен — от 4 мм до 25–30 мм. Малые давления соответствуют относительно широким струям.

Некоторые аспекты формирования струйного течения рассмотрены в нашей работе [1]. За основу была взята модель затопленной струи Л.Д. Ландау и ее развитие [2]. Альтернативным подходом, по-видимому, может явиться фокусировка потока [3]. Правда, в этом случае физические механизмы в малой степени соответствуют процессам, проходящим в организме. Задачи, связанные с гемодинамикой, и ряд родственных задач традиционно решаются с применением программного пакета COMSOL MULTIPHYSICS, например в [4, 5]. В частности, в [4] рассматривается возможность

использования не только естественных для крови моделей неньютоновской жидкости, но и приближения ньютоновской жидкости. Основная проблема заключается в том, что данные расчета в COMSOL и по модели затопленной струи имеют существенные расхождения. В то же время для ряда задач желательно иметь простое адекватное аналитическое решение.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЕ

Имеется потребность в простой оценочной формуле на основе струйного течения, т. к. основные особенности геометрической схемы (тонкий канал, входящий в более широкий канал или камеру) хорошо согласуются с предпосылками модели. Рассматриваются режимы движения с поперечными числами Рейнольдса порядка 0.01, продольными — не превосходящими 1.

Согласно [3], радиальная компонента вектора скорости течения

$$V_r = \frac{1}{r} F(\theta), \quad F(\theta) = 2\nu \left( \frac{A^2 - 1}{(A - \cos(\theta))^2} - 1 \right), \quad (1)$$

где  $\theta$  — угол от оси струи,  $r$  — радиальное перемещение,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. Для модели неньютоновской жидкости с учетом не очень большого диапазона изменения рассматриваемых скоростей можно изначально

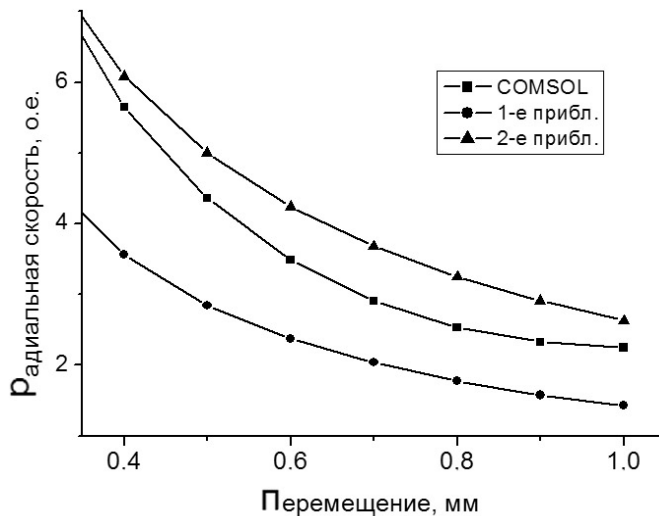
использовать кажущуюся, или пластическую, вязкость. Параметр  $A$  — константа интегрирования, определяется через радиальную компоненту тензора потока импульса в струе  $\Pi_{rr} = p + \rho V_r V_r$ , где  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости. Для полной неусеченной струи получим полный поток импульса  $W$ :

$$W = 2\pi \int_0^\pi r^2 \Pi_{rr} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta, \text{ поскольку} \quad (2)$$

$$\Pi_{rr} = \frac{4v^2 \rho}{r^2} \left( \frac{(A^2 - 1)^2}{(A - \cos(\theta))^4} - \frac{A}{A - \cos(\theta)} \right).$$

Данная формула основывается на первом приближении затопленной струи. В [1] была предложена модификация модели, состоящая в учете вертикального среза струи, корректировке потока импульса на неполную площадь сечения, и пересчет на энергетически эквивалентную неусеченную струю с другой константой  $A$  и, как следствие, с другим значением радиальной скорости. В нашем случае имеет место иной эффект, условно называемый влиянием задней стенки.

Наблюдается отклонение первого приближения от численного решения уравнения Навье—Стокса с помощью метода конечных элементов с применением программного пакета COMSOL (см. рис. 1). Первым вариантом модификации модели является использование второго струйного приближения. Коэффициенты зависимости формально определены по первым двум отсчетам. Таким образом, на рис. 1 наблюдается существенно лучшая



**Рис. 1.** Расчеты радиальной скорости ввода жидкости в камеру глубиной 2 мм, выполненные по различным методикам

сходимость оценок к результатам счета в сравнении с первым приближением.

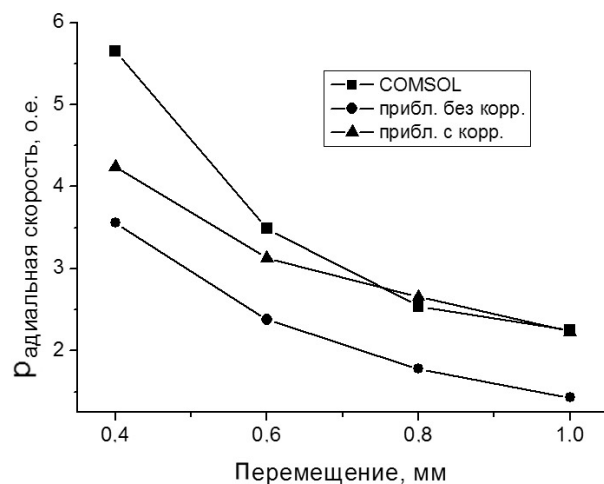
Однако этот результат, во-первых, достигается чисто формально: аппроксимирующая функция с двумя параметрами практически всегда обеспечивает качество аппроксимации более высокое по сравнению с однопараметрической зависимостью. Во-вторых, для камеры с более далекой задней стенкой (4 мм по сравнению с 2 мм) необходимость второго приближения существенно меньшая, т. к. и первое приближение обеспечивает большую точность аналитического решения.

Таким образом, модификация должна касаться базового физического принципа — постоянства потока импульса, который при наличии близко расположенной задней стенки нарушается.

Идея состоит во внесении следующей поправки: суммирование части потока импульса, дополнительно отраженного от стенки и исходного потока. Полученное увеличение потока пересчитывается в изменение (уменьшение) константы  $A$  и увеличение скорости. Уточненное значение  $A$  находится как решение обратной задачи через (2).

Дополнительный поток вычисляется через интеграл, аналогичный (2), с пределами  $[0; \theta^*]$ . Здесь  $\text{tg}(\theta^*) = r/L$ , где  $r$  — глубина входа струи в камеру,  $L$  — расстояние до задней стенки.

Эффект изменения скорости при учете данного фактора иллюстрирует рис. 2. Протяженность или глубина камеры (максимальная величина осевого перемещения жидкости) предполагается 2 мм, начальное значение параметра  $A$  равно 1.5.



**Рис. 2.** Иллюстрация эффекта коррекции параметров струи

Зависимость на интервале радиальных перемещений от 0 до 0.4 мм практически является формальным следствием "обучения" модели по первым 1–2 отсчетам. Таким образом, этот участок нерепрезентативен для анализа точности аппроксимации. Влияние коррекции параметра  $A$  на погрешность аппроксимации можно оценить на основе критерия Фишера значимости дисперсий двух случайных величин. В этом случае среднеквадратичная величина разности приближенного аналитического решения и численного решения с помощью COMSOL рассматривается как дисперсия соответствующей случайной величины. Для обоих вариантов приближения расчет по 12 точкам дает значения среднеквадратичной погрешности 2.28 и 0.71, а их отношение — примерно 3.21. Процентные точки распределения Фишера для двух выборок объемом по 12 измерений составят: для  $\alpha = 0.05$  — значение 2.82 и для  $\alpha = 0.01$  — значение 4.46. Таким образом, нашему случаю соответствует очень высокий уровень значимости (порядка 4 %). Это статистически подтверждает существенно более высокую точность аппроксимации при использовании модели струи с коррекцией параметра  $A$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из рис. 2 следует, что для области камеры, не слишком удаленной от задней стенки, т. е. при сопоставимости осевого перемещения жидкости и расстояния до задней стенки, корректировка величины  $\Pi_{rr}$  (2) и далее параметра  $A$  (1) позволяют уточнить оценку величины радиальной скорости на оси струи и многократно уменьшить расхождение численной оценки и аналитического решения на основе первого струйного приближения. В случае "пульсирующего" течения вместо радиальной скорости скорее всего потребуется рассматривать усредненное по периоду пульсации значение.

Ответ на вопрос, в какой мере данный подход применим к иным геометрическим схемам переноса вещества, пульсирующего режима течения и неньютоновской жидкости, требует дальнейшего анализа и расчета. Однако идея коррекции параметров при сохранении в модернизированном варианте закона сохранения радиальной компоненты потока импульса показала состоятельность на рассмотренном примере.

При движении крови в легких диаметры капилляров — порядка 10 мкм, диаметры артерий и вен — от 4 мм до 30 мм. По сопоставлению размеров кровеносных сосудов видно, что схема ввода

узкого потока в камеру практически неограниченных размеров, характерная для затопленной струи, не противоречит геометрическим параметрам сосудов кровеносной системы. Малые давления (15–25 мм рт. ст.) соответствуют относительно широким струям с параметром  $A$ , равным 1.4 и более. Тем самым предложенный алгоритм построения приближенного аналитического оценочного решения можно считать применимым.

*Работа выполнялась в рамках государственного задания по проекту "Микрофлюидные устройства и системы для имитации и исследования процессов в живом организме" (№ 0074-2016-0003).*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bulyanitsa A.L., Belousov K.I., Evstrapov A.A. Applicability of submerged jet model to describe the liquid sample load into measuring chamber of micron and submillimeter sizes // Journal of Physics: Conf. Series. 2017. Vol. 917. P. 042021. Doi: 10.1088/1742-6596/917/4/042021.
2. Маликов З.М., Стасенко А.Л. Асимптотика затопленной струи и процессы переноса в ней // Труды МФТИ. 2013. Т. 5, № 2. С. 59–68.
3. Бердников А.С., Аверин И.А. Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных магнитных полей, однородных по Эйлери // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 89–96.
4. Newtonian and non-Newtonian blood flow over a backward-facing step: steady-state simulation. URL: <https://www.comsol.ru/paper/newtonian-and-non-newtonian-blood-flow-over-a-backward-facing-step-steady-state--6540> (дата обращения 17.08.2018).
5. Numerical aspects of the implementation of artificial boundary. URL: [https://www.comsol.ru/paper/download/152357/boeckle\\_paper.pdf](https://www.comsol.ru/paper/download/152357/boeckle_paper.pdf) (дата обращения 17.08.2018).

**Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург (Буляница А.Л., Евstrapов А.А.)**

**Университет ИТМО, Санкт-Петербург (Белуосов К.И.)**

Контакты: Буляница Антон Леонидович, [antbulyan@yandex.ru](mailto:antbulyan@yandex.ru)

Материал поступил в редакцию 15.10.2018

## APPLICATION OF THE MODERNIZED JET FLOW MODEL TO CALCULATE THE MOVEMENT OF PHYSIOLOGICAL FLUIDS IN THE LIVING BODY

A. L. Bulyanitsa<sup>1</sup>, K. I. Belousov<sup>2</sup>, A. A. Evstrapov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*

<sup>2</sup>*ITMO University, Saint-Petersburg, Russia*

To describe the movement of physiological fluids in the body, in some cases it is possible to use a jet flow model. For example, the movement of blood from the capillary into a vein or artery. The geometric scheme of motion is the Union of a small section channel with a camera of significantly larger dimensions. The paper considers the applicability of the flooded jet model. The results of the calculation of the velocities based on models that allow an analytical solution, namely, the first and second approximation of the jet flow, are compared with the results of the numerical solution of the Navier—Stokes equation by the finite element method using the COMSOL MULTIPHYSICS software package. The idea of adjusting the jet parameter based on the results of taking into account the additional component of the impulse flow is discussed.

*Keywords:* blood motion, jet flow, impulse flow, approximate analytical solution, COMSOL MULTIPHYSICS

### REFERENCES

1. Bulyanitsa A.L., Belousov K.I., Evstrapov A.A. Applicability of submerged jet model to describe the liquid sample load into measuring chamber of micron and submillimeter sizes. *Journal of Physics: Conf. Series*, 2017, vol. 917, pp. 042021. Doi: 10.1088/1742-6596/917/4/042021.
2. Malikov Z.M., Stasenko A.L. [Asymptotics of the flooded stream and processes of transfer in it]. *Trudy MFTI* [Works of Moscow Institute of Physics and Technology], 2013, vol. 5, no. 2, pp. 59–68. (In Russ.).
3. Berdnikov A.S., Averin I.A. [New approach to development of ion-optical schemes of static mass spectrographs on the basis of the non-uniform magnetic fields uniform in Euler]. *Uspechi prikladnoy fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 89–96. (In Russ.).
4. *Newtonian and non-Newtonian blood flow over a backward-facing step: steady-state simulation*. URL: <https://www.comsol.ru/paper/newtonian-and-non-newtonian-blood-flow-over-a-backward-facing-step-steady-state--6540> (accessed 17.08.2018).
5. *Numerical aspects of the implementation of artificial boundary*. URL: [https://www.comsol.ru/paper/download/152357/boeckle\\_paper.pdf](https://www.comsol.ru/paper/download/152357/boeckle_paper.pdf) (accessed 17.08.2018).

Contacts: *Bulyanitsa Anton Leonidovitch*,  
antbulyan@yandex.ru

Article received in edition 15.10.2018