ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2018, том 28, № 4, с. 119–122

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 629.76/ 78.018.4

© С. И. Досько, В. В. Киренков, Е. В. Юганов

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ КОНТРОЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРЯМЫМИ И ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Статья посвящена сопоставлению численных и прямых методов решения обратных задач контроля технических систем. Несмотря на большую популярность замены численными методами решения прямых методов, нецелесообразным является отказ от прямых методов решения. Рассмотрен класс обратных задач, при решении которых использование прямых методов является целесообразным. К таким задачам отнесены условно корректные задачи, в соответствии с терминологией, предложенной акад. М.М. Лаврентьевым.

Кл. сл.: обратные задачи, условно корректные обратные задачи, существенно некорректные обратные задачи

ВВЕДЕНИЕ

Постановке и методам решения обратных задач контроля технических систем уделяется все большее внимание как в нашей стране, так и за рубежом. Об этом свидетельствует постоянно увеличивающийся поток литературы и проводимых конференций по этой тематике. Так, в 2017 г. в Новосибирске прошла очередная международная конференция по теме "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". Проведение такой конференции, с одной стороны, показывает важность проблемы обратных задач, а с другой, — место численных методов как основных при их решении.

В то же время известно, что прямые методы при ограниченности их применения по ряду признаков могут быть предпочтительнее численных. Настоящая статья отчасти посвящена и вопросу, в каких случаях решение обратной задачи может быть достигнуто прямыми, а не численными методами.

Контроль состояния технических систем по результатам испытаний предполагает оценку наиболее критичных параметров их математических моделей. Поскольку, как подчеркивает акад. А.Н. Тихонов, "свойства многих объектов природы недоступны для непосредственного изучения" [1, 2], т. е. контроля, оценка этих параметров может быть произведена только в результате решения так называемых обратных задач. Имеется в виду их определение по другим параметрам, доступным для контроля, т. е. решение операторного уравнения, имеющего следующий общий вид:

$$Aq = f. \qquad (1)$$

Здесь A — некий оператор (матричный, дифференциальный, интегральный и т. д.), переводящий оцениваемые элементы q множества Q в элементы f множества измерений F. Для большинства обратных задач (такие и рассматриваются далее) считается, что математическая модель оператора A известна. Решение обратной задачи в общем виде тогда может быть записано как

$$q = A^{-1} f. \qquad (2)$$

В следующем разделе остановимся на тех трудностях, которые сопутствуют такому решению, и методах их преодоления.

ОБЩИЙ ПРИНЦИП РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Трудности решения задачи в такой постановке связаны в основном с тем, что в исходном виде она может быть некорректно поставленной, т. е. не удовлетворять трем классическим требованиям Ж. Адамара для обратных задач — условиям разрешимости, единственности и устойчивости (непрерывности). Требуется поэтому так называемая регуляризация задачи (по выражению А.Н. Тихонова [2]), т. е. перевод ее в разряд корректно поставленных путем удовлетворения этих требований.

Основным общим принципом решения такой прикладной задачи является минимизация нормы невязок ρ между данными измерений f — правой части операторного уравнения (1) и результатами оценки q_T, т. е. [1–3]

$$\left\| \rho(Aq_T, f) \right\| = \inf \left\| \rho(Aq, f) \right\|. \qquad (3)$$

Считается, что этим достигается максимально возможная достоверность оценок.

ПРЯМЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ

Общим принципом решения задачи регуляризации считается формирование и последующая минимизация так называемого целевого функционала, что позволяет построить оператор M, выполняющий уже корректную функцию обратного оператора A^{-1}. Мы не будем анализировать существующие методы построения оператора M, остановимся только на одном практически важном вопросе: к какой группе методов, прямых или численных (итерационных), их можно отнести.

Основным достоинством прямых методов является то, что они дают решение после выполнения заранее известного числа операций [3]. Алгоритмы этих операций обычно бывают заданными, вследствие чего при наличии современных ЭВМ реализация методов этой группы не представляет трудностей. Итерационные (численные) методы — это в основном методы последовательных приближений, где заранее определить число операций не представляется возможным. При своей универсальности по сравнению с прямыми методами они имеют и ряд других недостатков, например необходимость выбора метода приближений — сопряженных градиентов, наискорейшего спуска и т. д.

Все это делает целесообразным выделить класс обратных задач, решение которых может быть достигнуто не итерационными, а более доступными для реализации прямыми методами.

УСЛОВНО КОРРЕКТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Наиболее типичными в этом отношении являются обратные задачи, которые относятся к числу так называемых условно корректных (по терминологии акад. М.М. Лаврентьева [1]). Решение таких задач прямыми методами оказывается возможным благодаря тому, что они (решения) могут быть отнесены к классу компактных множеств Q. И если эти множества к тому же оказываются конечномерными с известными весовыми функциями, то решения сводятся к классической методологии наименьших квадратов МНК. Например, когда в соотношении (1) под A понимается матричный оператор размерности $m \times n$ ($m \geq n$), то это решение может быть записано как

$$q = (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}} f . \quad (4)$$

Из этого соотношения следует, что регуляризирующий оператор M для такой задачи, когда $A^{\mathrm{T}} A$ невырожденная квадратная матрица, имеет вид

$$M = (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}}. \quad (5)$$

Методы решения условно корректных обратных задач получили название квазирешений [1–3]. Типовые примеры решения таких задач при оценке результатов испытаний изделий РКТ приведены в [4] и [5].

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ СУЩЕСТВЕННО НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Однако далеко не всегда решение может быть представлено в виде конечномерного компакта. Характерна обратная ситуация — задача относится не к типу условно корректных, а к существенно некорректным [1, 3]. Общепринятый метод решения таких задач — итеративный метод последовательных приближений, о трудностях реализации которого говорилось выше. Тем не менее есть типы и существенно некорректных задач, решение которых, т. е. их регуляризация, может быть достигнуто прямыми методами. К таким можно отнести обратные задачи, которые по своей постановке обладают свойством двойственности с некоторыми задачами теории оптимального управления. Эти задачи должны удовлетворять следующим признакам:

– линейность постановки,
– квадратичная форма целевого функционала,
– известный конечный интервал реализации.

При выполнении этих условий математическая постановка обратной задачи оказывается идентичной постановке некоторого класса задач оптимального управления (в частности с квадратичным критерием качества), имеющих прямое решение [6]. Поскольку исторически проблемы задач оптимального управления появились существенно раньше обратных задач идентификации параметров динамических систем, целесообразно для решения последних использовать методологию оптимального управления

Из их числа наиболее соответствующими поставленным задачам являются методы формирования оптимальных следящих систем, которые носят название задач слежения [4, 5]. Они ставятся следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t} = A(t) \cdot \mathbf{X} + B(t) \cdot \mathbf{U}, \\ \mathbf{Y}(t) = C(t) \cdot \mathbf{X}. \end{gathered} \quad (6)$$

В этом соотношении $\mathbf{X}$ ($m \times 1$) — вектор состояния, $\mathbf{U}$ ($n \times 1$) — вектор управления, $\mathbf{Y}(t)$ ($v \times 1$) — вектор измерений, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — нестационарные матрицы соответствующих размерностей.

Задачей слежения является формирование вектора управления $\mathbf{U}(t)$, который обеспечит отслеживание системой (6) желаемого выходного сигнала $Z(t)$ с заданным критерием качества (в частности, квадратичным). Приняв в качестве этого сигнала данные измерений дополненного вектора

$\mathbf{Y}(t)$, и при выполнении оговоренных выше условий методология решения такой задачи управления, как показано в [7] и [8], может использоваться и при решении обратных существенно некорректных задач. Это достигается прямыми, а не численными методами посредством составления системы дифференциальных уравнений, некоторые из которых (для вспомогательных переменных Л.С. Понтрягина) решаются в обращенном времени [5]. Начальные и конечные условия для такой системы определяются условиями, которые в теории оптимальных систем называются условиями трансверсальности [6].

Примеры решения задач, в исходной постановке являющихся существенно некорректно поставленными (при оценке результатов испытаний изделий РКТ), приведены в упомянутых выше статьях [7, 8].

В заключение отметим, что настоящая статья написана под влиянием идей акад. А.Н. Тихонова, который в своих работах и статьях обращал внимание на идентичность некоторых методов теории оптимального управления и методов решения обратных некорректно поставленных задач — их регуляризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
2. *Тихонов А.Н.* Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2001. 485 с.
3. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009. 457 с.
4. *Ройтенберг Я.И.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
6. *Брайсон А., Ю-Ши Хо.* Прикладная теория оптимальных процессов. М.: Мир, 1972. 544 с.
7. *Киренков В.В., Микитенко В.Г.* Решение обратных задач оценки испытаний изделий ракетно-космической техники с использованием методов теории оптимального управления // Космическая техника и технологии. РКК "Энергия" им. С.П. Королева, 2015. № 4. С. 50–57.
8. *Досько С.И., Киренков В.В., Микитенко В.Г.* Использование принципа двойственности при решении обратных задач оценки результатов испытаний // Вестник БГТУ. 2017. № 2. С. 185–190.

Институт конструкторско-технологической информатики РАН, Москва (*Досько С.И.*)

РКК "Энергия" им. С.П. Королева, г. Королев (*Киренков В.В.*)

АО РАСУ, Москва (*Юганов Е.В.*)

Контакты: *Досько Сергей Иванович*, dosko@mail.ru

Материал поступил в редакцию 2.07.2018

SOLVING THE INVERSE PROBLEMS OF CONTROL OF TECHNICAL SYSTEMS BY DIRECT AND NUMERICAL METHODS

S. I. Dosko[1], V. V. Kirenkov[2], E. V. Yuganov[3]

[1]*IKTI RAS, Moscow, Russia*
[2]*RSC Energia named after S.P. Korolev, Korolev, Russia*
[3]*JSC "Rusatom Automated Control Systems", Moscow, Russia*

The article is devoted to the comparison of numerical and direct methods for solving inverse problems of control of technical systems. Despite the great popularity of numerical methods for solving direct methods, it is not appropriate to reject direct methods of solution. A class of inverse problems is considered, in the solution of which the use of direct methods is expedient. To these problems are conditionally correct tasks in accordance with the terminology proposed by Academician M. Lavrentiev.

Keywords: inverse problems, conditionally correct inverse problems, essentially incorrect inverse problems

REFERENCES

1. Tichonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnych zadach* [Methods of the solution of incorrect tasks]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 286 p. (In Russ.).
2. Tichonov A.N. *Izbrannye trudy* [Chosen works]. Moscow, MAKS Press Publ., 2001. 485 p. (In Russ.).
3. Kabanichin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Return and incorrect tasks]. Novosibirsk, 2009. 457 p. (In Russ.).
4. Roytenberg Ya.I. *Avtomaticheskoe upravlenie* [Automatic control]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 552 p. (In Russ.).
5. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.V. *Matematicheskaya teoriya optimal'nych prozessov* [Mathematical theory of optimum processes]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 393 p. (In Russ.).
6. Brayson A., Yu-Shi Cho. *Prikladnaya teoriya optimal'nych prozessov* [Applied theory of optimum processes]. Moscow, Mir Publ., 1972. 544 p. (In Russ.).
7. Kirenkov V.V., Mikitenko V.G. [The solution of the return problems of assessment of tests of products of the missile and space equipment with use of methods of the theory of optimum control]. *Kosmicheskaya technika i technologii* [Space equipment and technologies]. RKK "Energiya" im. S.P. Koroleva, 2015, № 4, pp. 50–57. (In Russ.).
8. Dos'ko S.I., Kirenkov V.V., Mikitenko V.G. [Use of the principle of duality at the solution of the return problems of assessment of results of tests]. *Vestnik BGTU* [BGTU bulletin], 2017, no. 2, pp. 185–190. (In Russ.).

Contacts: *Dosko Sergey Ivanovich,*
dosko@mail.ru

Article received in edition 2.07.2018