

УДК 03; 09

© Я. А. Фофанов, В. В. Манойлов, И. В. Заруцкий, Б. В. Бардин

О ПОДОБИИ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИХ ОТКЛИКОВ МАГНИТНЫХ НАНОЖИДКОСТЕЙ. Ч. II. ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ

Произведена количественная оценка статистической значимости коэффициентов регрессии при полиномиальной аппроксимации экспериментальных данных о слабых поляризационных откликах магнитных наножидкостей. С помощью проверки статистических гипотез показана значимость, во-первых, коэффициентов корреляции между объясняющей, т. е. независимой переменной (в данном случае — значениями магнитного поля), и объясняемой переменной (поляризационными магнитооптическими откликами), во-вторых, показана статистическая значимость коэффициентов аппроксимирующих полиномов различных степеней. Приведены результаты оценок ошибок регрессии для наножидкостей разных концентраций.

Кл. сл.: магнитные наножидкости, поляризационно-оптический анализ, аппроксимация экспериментальных данных, проверка статистических гипотез

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время продолжается изучение и расширяется область применений магнитных наножидкостей [1, 2]. В работах [2–7] продемонстрирована эффективность, показаны перспективы развития и применения высокочувствительных лазерных методов количественного поляризационно-оптического анализа слабых магнитооптических откликов упорядоченных сред. Получена база данных, и сделаны выводы о подобии поляризационных откликов магнитных наножидкостей в широком диапазоне концентраций [2].

В работе [8] экспериментальная база данных, полученная в [2], использована в качестве модельной. Путем сравнения математических ожиданий отклонений экспериментальных данных от аппроксимирующих полиномов второй степени количественно показано, что отклики на воздействие магнитного поля для образцов с концентрациями в диапазоне от 1 до 0.003 % обладают определенным подобием при условии вычитания из экспериментальных данных постоянной составляющей. В то же время сравнение коэффициентов при второй степени показало, что для опытов с разной концентрацией они отличаются на 10 % и более [8].

Настоящая работа посвящена статистическому анализу магнитооптических откликов упорядоченных сред. Целью работы является количественная

оценка статистической значимости коэффициентов регрессии, полученных при полиномиальной аппроксимации рассмотренных ранее экспериментальных данных о магнитном поведении наножидкостей [2, 8].

Отметим, что здесь мы осознанно не используем каких-либо физических (модельных) предположений о характере анализируемых нами зависимостей, т. к. вопрос о процессах формирования поляризационно-оптических откликов магнитных наножидкостей не следует, по-видимому, считать окончательно решенным [2]. Единственное априорное предположение, используемое в данной работе, заключается в выборе полиномов в качестве аппроксимирующих функций. Это предположение представляется достаточно естественным и обосновано в работе [2].

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ И ДЕТЕРМИНАЦИИ

Первым этапом оценки значимости коэффициентов регрессии является определение статистической связи между зависимой переменной y (отклик) и независимой переменной B (магнитное поле). Статистическая связь определяется путем вычисления коэффициентов корреляции и детерминации. В табл. 1 приведены значения коэффициентов корреляции между зависимой переменной

Табл. 1. Коэффициенты корреляции между откликами y и значениями магнитного поля B для опытов 1, ..., 9

Функция	Номер опыта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значение коэффициента корреляции	0.987	0.988	0.986	0.990	0.986	0.988	0.983	0.977	0.974

y (отклик) и независимой переменной B (магнитное поле) для опытов 1, ..., 9 с магнитными жидкостями разных концентраций [2, 8] (в Приложении воспроизведена таблица из [8] с указанием концентраций в опытах).

Приведенные в табл. 1 коэффициенты корреляции близки к единице, что дает основание утверждать о наличии сильной функциональной связи (практически неслучайной) между значениями магнитного поля B и откликами y . Кроме того, указанное утверждение позволяет производить дальнейшие исследования значимости коэффициентов регрессии в полиномах, аппроксимирующих экспериментальные данные.

В экспериментальной работе [2], в работе [8], описывающих статистическую методику количественной оценки подобия откликов наножидкостей различных концентраций на воздействие магнитного поля, а также в теоретической работе [9] показано, что функциональная зависимость величины поляризованного отклика (объясняемой переменной) от магнитного поля (объясняющей переменной) является нелинейной. В данной статье нами использованы термины "объясняемая" и "объясняющая" переменные, поскольку подобная терминология используется в большинстве литературных источников по регрессионному анализу [10], [11, Pt 5], [14–16]. В связи с нелинейностью рассматриваемой функциональной зависимости сначала вычислим коэффициент детерминации по формуле (1), представленной в работе [12]:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum_i (f(x_i) - \hat{y})^2}{\sum_i (y_i - \hat{y})^2}, \quad (1)$$

y — отклик, объясняемая переменная; \hat{y} — среднее значение объясняемой переменной; $f(x_i)$ — рассчитанное с использованием уравнения регрессии значение в x_i -й точке; Explained Sum of Squares: $ESS = \sum_i (f(x_i) - \hat{y})^2$ — объясненная сумма квадратов; Total Sum of Squares: $TSS = \sum_i (y_i - \hat{y})^2$ — общая сумма квадратов; в дальнейшем тексте будет использоваться также Residual Sum Squares: $RSS = \sum_i (f(x_i) - y_i)^2$ —

сумма квадратов отклонений.

Значения коэффициентов детерминации для 9 опытов, указанных в работе [8] для разных степеней аппроксимирующих полиномов показаны в табл. 2. Согласно [12], для линейной функции значения коэффициентов детерминации равны квадрату коэффициентов корреляции. В этом можно убедиться, если выполнить возведение в квадрат чисел, указанных в строке табл. 1, а затем сравнить с числами, указанными в первой строке табл. 2.

Из представленных в таблицах данных видно, что для опытов 1, ..., 9 коэффициенты детерминации близки или равны 1. Согласно [10, 12], это дает основание заключить, что зависимость y от магнитного поля B сильная. Даже для опыта 9 с наименьшим коэффициентом детерминации, равным 0.97 (в последней строке табл. 2), можно утверждать, что в 97 % случаев изменения B приводят к изменению отклика y . Другими словами, точность подбора параметров в уравнении регрессии высокая.

ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ

Коэффициент корреляции ρ — это статистический показатель зависимости двух случайных величин. Коэффициент корреляции ρ может принимать значения от -1 до $+1$. При этом значение 0 говорит о нулевой корреляции, а $+1$ — о полной корреляции. То есть чем ближе значение коэффициента корреляции к $+1$, тем сильнее связь между двумя случайными величинами. При значении коэффициента корреляции -1 связь между величинами существует, но ее действие противоположное по сравнению с действием для величин, у которых корреляция положительна. Поскольку мы имеем дело со случайными величинами, то всегда существует вероятность, что замеченная нами связь — случайное обстоятельство. Причем вероятность найти связь там, где ее нет, особенно велика тогда, когда точек в выборке мало. Для двух случайных векторов $\mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_n]$

Табл. 2. Коэффициенты детерминации между откликами y и значениями магнитного поля B для опытов 1, ..., 9 для аппроксимирующих полиномов различных степеней

Функция	Номер опыта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значение коэффициента детерминации для линейной функции	0.974	0.976	0.972	0.980	0.973	0.976	0.966	0.955	0.948
Значение коэффициента детерминации для полинома 2-й степени	0.998	0.998	0.999	0.994	0.999	0.999	0.992	0.959	0.952
Значение коэффициента детерминации для полинома 3-й степени	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.963	0.967	0.954
Значение коэффициента детерминации для полинома 4-й степени	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.971	0.968

и $\mathbf{Y} = [y_0, y_1, \dots, y_n]$ оценка выборочного коэффициента корреляции r вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (2)$$

\bar{x} и \bar{y} — средние значения указанных векторов, n — объем выборки для каждого из векторов. В нашем случае $\mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ — вектор значений магнитного поля, а $\mathbf{Y} = [y_0, y_1, \dots, y_n]$ — значения откликов.

Величина r является случайной, и ее близость к истинному значению коэффициента корреляции ρ зависит от законов распределения случайных величин, входящих в формулу (2), и от объема выборки n . Чем ближе величина r к истинному значению коэффициента корреляции ρ , тем более значимой является его оценка, вычисляемая по формуле (2). Для доказательства того, что связь между значениями магнитного поля B и откликами его влияния на магнитные наножидкости является неслучайной, мы должны проверить

статистические гипотезы о том, что коэффициент корреляции близок к 0 или к 1. Нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что коэффициент корреляции равен нулю, альтернативная H_1 — не равен нулю, т. е. $H_0: \rho = 0$, $H_1: \rho \neq 0$.

Очевидно, достаточно большое по абсолютной величине значение величины r будет стремиться опровергнуть нулевую гипотезу. Возникает вопрос, насколько большое должно быть абсолютное значение величины r ? Для того чтобы проверить гипотезу, мы должны знать распределение величины r . Собственное распределение величины r довольно сложное, поэтому мы применим преобразование, показанное в [13]:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} \approx t_{n-2}. \quad (3)$$

Выборочное распределение этой статистики есть распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы [13]. При заданном уровне значимости α , определяем критическое значение $t_{кр}$. Принимаем решение об отклонении или неотклонении нулевой гипотезы: $|t| > t_{кр}$ — отклоняем H_0 , $|t| < t_{кр}$ — не отклоняем H_0 .

Табл. 3. Значения статистики t коэффициентов корреляции опытов 1, ..., 9 для аппроксимирующих полиномов различных степеней

Функция	Номер опыта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значение статистики t	39.03	40.10	37.29	44.25	37.73	40.21	33.55	29.12	27.15

В табл. 3 приведены значения статистики t для коэффициентов корреляции экспериментальных данных опытов 1, ..., 9.

По значениям распределения Стьюдента для $n - 2$ степеней свободы, для объема выборки $n = 42$ и уровня значимости 0.05 находим $t_{кр}(40; 0.05) = 1.68$.

Поскольку $t > t_{кр}$ для всех опытов, то отклоняем гипотезу о равенстве 0 коэффициентов корреляции. Другими словами, коэффициенты корреляции являются статистически значимыми для всех опытов 1, ..., 9.

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ

Несмещенная оценка дисперсии отклонений экспериментальных данных y_i от аппроксимирующего полинома $f(x)$ вычисляется по формуле (4) [14–16]:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2, \quad (4)$$

где n — число экспериментальных точек; k — число коэффициентов, входящих в аналитическое выражение регрессии $f(x)$; если $f(x)$ — полином m -й степени, то $k = m + 1$.

В табл. 4 приведены результаты расчета оценок дисперсии отклонений от полиномов различных степеней для опытов 1, ..., 9.

На рис. 1 приведены результаты расчета оценок дисперсии отклонений от полиномов различных степеней для опытов 1, ..., 6, а на рис. 2 — результаты расчета оценок дисперсии отклонений от полиномов различных степеней для опытов 7, ..., 9. По вертикальной оси на рисунках показаны десятичные логарифмы дисперсий отклонений от полиномов, по горизонтальной оси показаны степени аппроксимирующих полиномов. Цифрами на рисунках обозначены номера экспериментов.

Из данных, представленных в таблицах и на рисунках видно, что с увеличением степени полинома оценки ошибок регрессии уменьшаются и минимальная величина этих ошибок достигается для полинома 4-й степени. Дальнейшее увеличение степени полинома нецелесообразно, т. к. увеличение степени полинома приводит к плохой

Табл. 4. Результаты расчета оценок дисперсии отклонений от полиномов различных степеней для опытов 1, ..., 9

Степень полинома	Номер опыта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Линейная функция	2.6e-3	2.5e-3	2.9e-3	2.3e-3	2.7e-3	2.4e-3	3.8e-3	5.8e-3	5.1e-3
Полином 2-й степени	1.7e-4	1.8e-4	1.3e-4	7.2e-4	1.4e-4	1.1e-4	8.2e-4	4.9e-3	4.9e-3
Полином 3-й степени	9.7e-7	1.3e-6	1.9e-6	1.2e-5	1.6e-5	4.4e-5	7.2e-4	4.1e-3	4.8e-3
Полином 4-й степени	7.1e-7	1.1e-6	1.9e-6	4.5e-6	1.7e-5	4.5e-5	4.1e-4	3.7e-3	3.4e-3

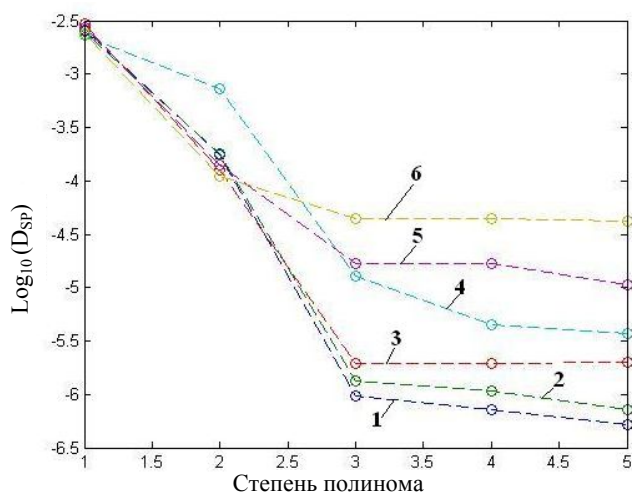


Рис. 1. Результаты расчета оценок дисперсии отклонений от полиномов различных степеней для опытов 1, ..., 6

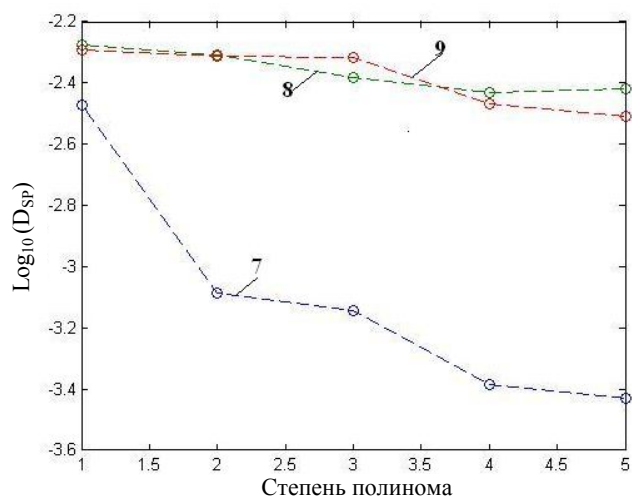


Рис. 2. Результаты расчета оценок дисперсии отклонений от полиномов различных степеней для опытов 7, ..., 9

Табл. 5. Результаты расчета статистики Фишера (F-statistics) для полиномов различных степеней для опытов 1, ..., 9

Степень полинома	Номер опыта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Линейная функция	1.5e+3	1.6e+3	1.4e+3	1.9e+3	1.4e+3	1.6e+3	1.1e+3	0.8e+3	0.7e+3
Полином 2-й степени	1.2e+4	1.1e+4	1.6e+4	0.3e+4	1.4e+4	1.8e+4	0.2e+4	4.6e+2	3.9e+2
Полином 3-й степени	1.4e+6	1.0e+6	0.7e+6	0.1e+6	0.7e+5	0.3e+5	1.8e+3	4.0e+2	3.0e+2
Полином 4-й степени	1.4e+6	0.9e+6	0.5e+6	2.5e+5	5.9e+4	2.2e+4	2.4e+3	3.0e+2	3.0e+2

обусловленности матрицы, получающейся при реализации метода наименьших квадратов, при которой вычислительная погрешность расчета коэффициентов полиномов повышается.

ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМОВ ПО КРИТЕРИЮ ФИШЕРА

Критерий Фишера предназначен для оценки того, является ли статистически значимой получен-

ная методом наименьших квадратов зависимость. Исходными данными служат коэффициент детерминации R^2 , число параметров k (для линейной зависимости $y = ax + b$ — $k = 2$) и число экспериментальных точек n . На их основе рассчитываем величину F_{emp} , являющуюся соотношением объясненной дисперсии величины y к необъясненной. Статистика или критерий Фишера вычисляется по формуле (5)

Табл. 6. Значения критических уровней распределения Фишера для уровня значимости 0.05 для полиномов различных степени

Степень полинома	1	2	3	4
Значение критического уровня	4.08	3.24	2.86	2.63

$$F_{\text{emp}} = \frac{\left[\sum_i (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2 \right] / (k-1)}{\left[\sum_i (\hat{y}_i - y_i)^2 \right] / (n-k)} = \frac{\text{ESS}}{\text{RSS}} \cdot \frac{n-k}{k-1} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k-1} \approx F(\alpha, k-1, n-k). \quad (5)$$

В табл. 5 приведены значения статистики Фишера для разных опытов и полиномов разных степеней. В табл. 6 приведены критические уровни распределения Фишера для уровня значимости 0.05 полиномов различных степеней.

Все приведенные значения статистики Фишера превышают критические уровни, что позволяет утверждать, что вычисленные коэффициенты регрессии статистически значимы.

ВЫВОДЫ

1. По статистическому критерию Стьюдента гипотеза о коррелированности откликов от магнитного поля подтверждается.

2. По критерию Фишера установлено, что вычисленные коэффициенты регрессии статистически значимы

3. Сравнение результатов оценок ошибок регрессии для аппроксимирующих полиномов различных степеней для опытов 1, ..., 9 показывает, что эти ошибки уменьшаются при увеличении степени полинома и минимальная величина этих ошибок достигается для полинома 4 степени. Дальнейшее увеличение степени полинома нецелесообразно, т. к. увеличение степени полинома приводит к плохой обусловленности матрицы, получающейся при реализации метода наименьших квадратов, при которой вычислительная погрешность расчета коэффициентов полиномов повышается.

4. Величины оценок ошибок регрессии для аппроксимирующих полиномов 4-й и 5-й степеней для опытов 1, ..., 6, т. е. для опытов с высокой концентрацией магнитной наножидкости (от 1 до 0.003 %) приблизительно на 3 порядка, меньше чем ошибки для опыта 7 для магнитной наножидкости с концентрацией 0.001 и примерно на 4 порядка, меньше чем для опытов 8 и 9 с наименьшей концентрацией магнитной наножидкости, равной 0.0001 %.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Номера экспериментов с разными концентрациями магнитных наножидкостей (НЖ) [8]

Характеристика	Номер эксперимента								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Концентрация магнитной НЖ в %	1	1	0.2	0.04	0.01	0.003	0.001	0.0001	0.0001

Работа поддержана РФФИ, проект № 15-02-08703, и ФАНО, гос. задание № 007-00229-18-00.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bitar A., Kaewsaneha C., Eissa M.M., Jamshaid T., Tangboriboonrat P., Polpanich D., Elaissari A. Ferrofluids: from preparation to biomedical applications // Journal of Colloid Science and Biotechnology. 2014. Vol. 3, no. 1. P. 3–18.
2. Фофанов Я.А., Плешаков И.В., Прокофьев А.В. Исследование поляризационных магнитооптических откликов слабоконцентрированной феррожидкости // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, вып. 20. С. 66–72.
3. Fofanov Ya.A. Threshold sensitivity in optical measure-

ments with phase modulation // Proc. SPIE. The Report of tenth Union Symposium and School on High Resolution Molecular Spectroscopy. 1992. Vol. 1811. P. 413–414. Doi: 10.1117/12.131190.

4. Фофанов Я.А. Методы и приборы для количественного анализа структурного двулучепреломления материалов и веществ // Научное приборостроение. 1999. Т. 9, № 3. С. 104–110.

URL: <http://iairas.ru/mag/1999/full3/Art10.pdf>.

5. Фофанов Я.А., Плешаков И.В., Кузьмин Ю.И. Лазерное поляризационно-оптическое детектирование процесса намагничивания магнитоупорядоченного кри-

- сталла // Оптический журнал. 2013. Т. 80, № 1. С. 88–93.
6. Прокофьев А.В., Фофанов Я.А., Пешаков И.В., Бибики Е.Е. Лазерное поляризационно-оптическое наблюдение агломерации магнитных наночастиц в жидкой среде // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 4. С. 3–7. URL: <http://213.170.69.26/mag/2017/abst4.php#abst1>.
 7. Fofanov Ya.A., Sokolov I.M., Pleshakov I.V., Vetrov V.N., Prokofiev A.V., Kuraptev A.C., Bibik E.E. On the criteria for strong and weak polarization responses of ordered objects and systems // EPJ Web of Conferences PECS-2017. 2017. Vol. 161, 01003, P. 1–2. DOI: 10.1051/epjconf/201716101003.
 8. Фофанов Я.А., Манойлов В.В., Заруцкий И.В., Бардин Б.В. О подобию поляризационно-оптических откликов магнитных наножидкостей. Ч. I. Аппроксимация для слабых полей // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 1. С. 45–52. URL: <http://213.170.69.26/mag/2018/abst1.php#abst6>.
 9. Davis H.W., Llewellyn J.P. Magnetic birefringence of ferrofluids: I. Estimation of particle size // J. Phys. D: Appl. Phys. 1979. Vol. 12, no. 2. P. 311–319.
 10. Дрейнер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Кн. 1. М.: Финансы и статистика, 1986. 369 с.
 11. Krzanowski W.J. Principles of Multivariate Analysis: A User's Perspective. New York: Oxford University Press, 1988. 563 p.
 12. Восков А.Л. Статистическая обработка эксперимента. URL: http://td.chem.msu.ru/uploads/files/courses/general/statexp/lsq_descr.pdf.
 13. Значимость коэффициента корреляции, доверительный интервал. URL: <http://statistica.ru/theory/znachimost-koeffitsienta-korrelyatsii-doveritelnyu-interval/>.
 14. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. М.: Физматлит, 2006. 816 с.
 15. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1970. 295 с.
 16. Box G.E.P., Hunter J.S., Hunter W.G. Statistics for Experiments A. John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2005. 655 p.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург (Фофанов Я.А., Манойлов В.В., Заруцкий И.В., Бардин Б.В.)

ИТМО, Санкт-Петербург (Манойлов В.В., Заруцкий И.В.)

Контакты: Манойлов Владимир Владимирович, manoilov_vv@mail.ru

Материал поступил в редакцию 12.03.2018

ON THE SIMILARITY OF THE POLARIZATION-OPTICAL RESPONSES OF MAGNETIC NANOFUIDS. PART II. ASSESSMENT OF THE STATISTICAL SIGNIFICANCE OF REGRESSION COEFFICIENTS

Ya. A. Fofanov¹, V. V. Manoilov^{1,2}, I. V. Zarutskiy^{1,2}, B. V. Bardin¹

¹*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*

²*ITMO University, Saint-Petersburg, Russia*

The statistical significance of the regression coefficients for polynomial approximation of the experimental data on the weak polarization responses of magnetic nanofluids is quantified. By checking the statistical hypotheses, the correlation coefficients between the explanatory, that is, the independent variable (in this case, the magnetic field values), and the variable explained (polarization magneto-optical responses) are shown to be significant, and secondly, the statistical significance of the coefficients approximating polynomials of different degrees. The results of estimating regression errors for nanofluids of different concentrations are presented.

Keywords: magnetic nanofluids, polarization-optical analysis, approximation of experimental data, verification of statistical hypotheses

REFERENCES

1. Bitar A., Kaewsaneha C., Eissa M.M., Jamshaid T., Tangboriboonrat P., Polpanich D., Elaissari A. Ferrofluids: from preparation to biomedical applications. *Journal of Colloid Science and Biotechnology*, 2014, vol. 3, no. 1, pp. 3–18.
2. Fofanov Ya.A., Pleshakov I.V., Prokofiev A.V. [Investigation of polarization magneto-optic responses of a low-concentration ferrofluid]. *Pis'ma v ZhTF* [Technical Physics Letters], 2016, vol. 42, no. 20, pp. 66–72. (In Russ.).
3. Fofanov Ya.A. Threshold sensitivity in optical measurements with phase modulation. *Proc. SPIE. The Report of tenth Union Symposium and School on High Resolution Molecular Spectroscopy*, 1992, vol. 1811, pp. 413–414. Doi: 10.1117/12.131190.
4. Fofanov Ya.A. Methods and devices for quantitative analysis of the structural birefringence of materials and substances. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 1999, vol. 9, no. 3, pp. 104–110. (In Russ.). URL: <http://iairas.ru/en/mag/1999/full3/Art10.pdf>.
5. Fofanov Ya.A., Pleshakov I.V., Kuzmin Yu.I. Laser polarization-optical detection of the magnetization process of a magnetically ordered crystal. *Opticheskiy zhurnal* [J. Opt. Technol.], 2013, vol. 80, no. 1, pp. 88–93. (In Russ.).
6. Prokofiev A.V., Fofanov Ya.A., Pleshakov I.V., Bibik E.E. Laser polarization-optical observation of magnetic nanoparticles agglomeration in a liquid medium. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 4, pp. 3–7. (In Russ.). Doi: 10.18358/np-27-4-i37.
7. Fofanov Ya.A., Sokolov I.M., Pleshakov I.V., Vetrov V.N., Prokofiev A.V., Kuraptsev A.C., Bibik E.E. On the criteria for strong and weak polarization responses of ordered objects and systems. *EPJ Web of Conferences PECS-2017*, 2017, vol. 161, 01003, pp. 1–2. Doi: 10.1051/epjconf/201716101003.
8. Fofanov Ya.A., Manoilov V.V., Zarutskiy I.V., Bardin B.V. [On the similarity of the polarization-optical responses of magnetic nanofluids. Part I. Approximation for weak fields]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 1, pp. 45–52. (In Russ.). Doi: 10.18358/np-28-1-i4552.
9. Davis H.W., Llewellyn J.P. Magnetic birefringence of ferrofluids: I. Estimation of particle size. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1979, vol. 12, no. 2, pp. 311–319. Doi: 10.1088/0022-3727/12/2/018.
10. Dreyper N., Smit G. *Prikladnoy regressionnyy analiz. Kn. 1* [Application-oriented regression analysis. Book 1]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1986. 369 p. (In Russ.).
11. Krzanowski W.J. *Principles of Multivariate Analysis: A User's Perspective*. New York, Oxford University Press, 1988. 563 p.
12. Voskov A.L. *Statisticheskaya obrabotka eksperimenta* [Statistical processing of an experiment]. (In Russ.). URL: http://td.chem.msu.ru/uploads/files/courses/general/statexp/lsq_descr.pdf.
13. *Znachimost' koeffitsienta korrelyatsii, doveritel'nyy interval* [Significance of correlation coefficient, confidential interval]. (In Russ.). URL: <http://statistica.ru/theory/znachimost-koeffitsienta-korrelyatsii-doveritelny-interval/>.
14. Kobzar' A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika* [Application-oriented mathematical statistics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 816 p. (In Russ.).
15. Chudson D. *Statistika dlya fizikov* [Statistics for physicists]. Moscow, Mir Publ., 1970. 295 p. (In Russ.).
16. Box G.E.P., Hunter J.S., Hunter W.G. *Statistics for Experiments A*. John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2005. 655 p.

Contacts: *Manoylov Vladimir Vladimirovich*,
manoilov_vv@mail.ru

Article received in edition: 12.03.2018