ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2018, том 28, № 2, с. 36–44

ФИЗИКА ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

УДК 534.143+532.5.032+541.13+534.23

© В. А. Сергеев, Б. П. Шарфарец

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ТЕОРИЯ, ОСНОВАННАЯ НА ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ. Ч. II. АКУСТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

Предложены необходимые уравнения и краевые условия для описания акустических полей, вызываемых электрокинетическими явлениями: наличием двойного электрического слоя и приложенного электрического поля, являющегося суммой постоянного поля и электрического поля, несущего акустическую информацию. Уравнения рассматриваются для вязкой несжимаемой и сжимаемой жидкостей при условии расчета соответственно гидродинамики стационарного электроосмотического процесса и акустического процесса. Из полученных выражений видно, что процессы, происходящие при акустическом электроосмосе, имеют как много общего, так и содержат некоторые отличия от процессов классического электроосмоса. Разработанная в работе физическая модель и полученные соответствующие математические выражения позволяют рассчитывать акустические характеристики излучателя, основанного на наличии электрокинетических явлений, и оптимизировать его устройство. Полученные результаты могут использоваться в научном приборостроении.

Кл. сл.: электроакустическое преобразование, электрокинетические явления, гидродинамика электроосмоса, акустика электроосмоса, уравнения движения акустического электроосмоса

ВВЕДЕНИЕ

В патенте [1] был предложен новый метод генерации акустических волн. Настоящая работа является продолжением работы [2], в которой было начато альтернативное физическое обоснование предложенного в [1] изобретения в части его гидродинамического аспекта. Здесь рассмотрим акустический аспект описанного в [1] изобретения.

В работе [2] приведена система уравнений Навье—Стокса [2, (3а), (6), (7)], позволяющая описать гидродинамику стационарных электроосмотических процессов в капилляре. При этом само уравнение [2, (6)], полученное из уравнения Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, описывает течение стационарной вязкой несжимаемой жидкости при условии баланса сил трения и электрических сил. Краевое условие [2, (7)] говорит о равенстве нулю тангенциальной составляющей скорости жидкости на границе скольжения $v_t = 0$. Кроме того, в общем случае должна быть равна нулю нормальная составляющая скорости жидкости на границе скольжения $v_n = 0$ [3, с. 36]. Наконец, возникает еще одно краевое условие для нормальной производной потенциала φ стороннего электрического поля $\mathbf{E}$: на поверхностях скольжения должно выполняться условие $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ [3, с. 37].

УСЛОВИЯ, ПРИ КОТОРЫХ СРЕДУ МОЖНО СЧИТАТЬ НЕСЖИМАЕМОЙ

Остановимся на критериях, когда среду можно считать несжимаемой. Свойство сжимаемости среды характеризуется величиной $\Delta\rho / \rho$ относительного изменения плотности среды ρ в гидродинамическом процессе. Величина $\Delta\rho / \rho \ll 1$ при выполнении следующих условий [4, с. 253]:

1) $|\mathbf{v}| \ll c$; 2) $L \ll t^* \cdot c$;
3) $gL \ll c^2$; 4) $\beta \cdot \Delta T \ll 1$.

Здесь $|\mathbf{v}|$, c, L, t^* и ΔT — соответственно характерные для рассматриваемого процесса скорость среды, скорость звука, длина, время и изменение температуры; $\beta = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial T}$ — коэффициент теплового расширения; g — ускорение силы тяжести. В случае незначительного влияния изменения температуры ΔT на параметры среды, а также возможности пренебрежения силой тяжести существенными условиями несжимаемости среды остаются условия 1), 2). Однако при изучении явлений, само существование которых обусловлено способностью среды изменять плотность (распространение звука, конвекция и т. д.), нельзя пренебрегать величиной $\Delta\rho / \rho$, *как бы мала она ни была*.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

С учетом того, что в акустических процессах жидкость нельзя считать несжимаемой, закон сохранения импульса запишем применительно к движению вязкой сжимаемой однородной жидкости (без учета силы тяжести) [5, с. 73]

$$\rho_\Sigma \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\Sigma}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_\Sigma \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_\Sigma \right) =$$

$$= -\nabla p_\Sigma + \eta \Delta \mathbf{v}_\Sigma + \left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \nabla\nabla \cdot \mathbf{v}_\Sigma + \rho_{\text{el}} \mathbf{E}_\Sigma. \quad (1)$$

Здесь η, ς — по-прежнему динамическая и объемная вязкости соответственно; p_Σ — давление; $\mathbf{v}_\Sigma$ — вектор скорости в среде; ρ_Σ — плотность среды; ρ_{el} — объемная плотность заряда в двойном электрическом слое (ДЭС); $\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}$, где постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ модулируется коллинеарным ему электрическим, зависящим от времени вектором $\mathbf{E}$ ($\mathbf{E} \times \mathbf{E}_0 = 0$); величины, помеченные индексом Σ, обозначают поля, возбужденные полем $\mathbf{E}_\Sigma$. Пометим поля, вызванные электрическим полем $\mathbf{E}_0$, нижним индексом 0: p_0, $\mathbf{v}_0$. Кроме того, обозначим через ρ_0 невозмущенное значение плотности, имеющее место в том числе и при воздействии только поля $\mathbf{E}_0$, поскольку при стационарном электроосмосе среда считается несжимаемой. Тогда, если принять во внимание допущение о том, что скорости процессов соответствуют малым значениям числа Рейнольдса $\text{Re} \ll 1$,[1)] то в (1) можно пренебречь конвективным членом $\rho_\Sigma \left(\mathbf{v}_\Sigma \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_\Sigma$ [5, с. 89], что превращает нелинейное уравнение (1) в его линеаризованную версию

[1)] Число Рейнольдса — безразмерная величина, характеризующая отношение нелинейного и диссипативного членов в уравнении Навье—Стокса $\text{Re} = \rho v D / \eta = v D / \nu$, где ρ — плотность среды; v — характерная скорость; D — характерный размер; $\nu = \eta / \rho$ — кинематическая вязкость.

$$\rho_\Sigma \frac{\partial \mathbf{v}_\Sigma}{\partial t} = -\nabla p_\Sigma + \eta \Delta \mathbf{v}_\Sigma + \left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \nabla\nabla \cdot \mathbf{v}_\Sigma + \rho_{\text{el}} \mathbf{E}_\Sigma. \quad (2)$$

Поскольку в линейном случае справедлив принцип суперпозиции, то можно записать, что $\rho_\Sigma = \rho_0 + \rho$, $p_\Sigma = p_0 + p$, $\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$.

Пусть стационарный электроосмос подчиняется усеченному уравнению Навье—Стокса (1) (см. [2])

$$\eta \Delta \mathbf{v}_0 + \rho_{el} \mathbf{E}_0 = 0, \quad (3)$$

(что означает баланс сил трения и постоянных электрических сил), т. е. постоянная разность давления отсутствует $\nabla p_0 = 0$, член с временнóй производной равен нулю из-за стационарности процесса, член, содержащий дивергенцию $\left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \nabla\nabla \cdot \mathbf{v}_0$, равен нулю вследствие соглашения о несжимаемости стационарного процесса. Или формально

$$\nabla p_0 = 0; \qquad \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = 0; \qquad \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0. \quad (4)$$

Система (3), (4) описывает стационарное электроосмотическое течение под воздействием постоянного электрического поля при рассмотрении баланса электрических сил и сил трения.

На долю возмущенного решения приходится остающаяся часть уравнения

$$\rho_\Sigma \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \nabla\nabla \cdot \mathbf{v} + \rho_{\text{el}} \mathbf{E}. \quad (5)$$

Для придания уравнению (5) линейного акустического вида необходимо линеаризовать член $\rho_\Sigma \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ до акустических величин первого порядка, а именно

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \nabla\nabla \cdot \mathbf{v} + \rho_{el} \mathbf{E}. \quad (6)$$

Часто для быстроразвивающихся процессов принимается предположение о справедливости соотношения Стокса [6, с. 385], сводящееся к равенству нулю объемной вязкости $\varsigma = 0$.

В этом случае уравнение (6) упрощается

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \frac{\eta}{3} \nabla\nabla \cdot \mathbf{v} + \rho_{\text{el}} \mathbf{E}, \quad (6\text{a})$$

позволяя обходиться только значением динамической вязкости η. Впрочем, о правомерности применения соотношения Стокса см. рассуждения в работе [7, с. 208, 209].

К уравнению движения (6) либо (6а) необходимо добавить линеаризованное уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{7}$$

а для замыкания системы четырех уравнений для пяти неизвестных добавить уравнение состояния. Для простоты принимаем среду баротропной, что означает однозначную зависимость между давлением в среде и ее плотностью.[2)] Для давления p и соответствующей ей плотности ρ это означает

$$p_\Sigma = f\left(\rho_\Sigma\right),$$

или в линеаризованном виде

$$p = \left.\frac{\partial p_\Sigma}{\partial \rho_\Sigma}\right|_{\rho_\Sigma = \rho_0} \rho = c^2 \rho, \tag{8}$$

где c — скорость звука в среде. Из (8) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{8a}$$

Система (6)–(8) представляет собой замкнутую систему линейных уравнений акустики для однородной, вязкой, баротропной среды (см., например, [8, § 1]), где $\mathbf{v}$ — вектор колебательной скорости, p — акустическое давление, ρ_0 — равновесное значение плотности, а ρ — возмущение плотности, вызванное возмущением давления, т. е. акустическим давлением p.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ (6)–(8)

Способ решения

Удобный способ решения системы (6)–(8) состоит в том, что на основании известной теоремы Гельмгольца векторного анализа принимается стандартное представление вектора скорости $\mathbf{v}$ в виде суммы потенциальной $\mathbf{v}_l$ и соленоидальной $\mathbf{v}_t$ частей (см., например, [9, с. 345])

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{v}_l = \nabla\Phi, \quad \mathbf{v}_t = \nabla \times \mathbf{\Psi}, \quad \nabla \cdot \mathbf{\Psi} = 0. \tag{9}$$

Здесь Φ и $\mathbf{\Psi}$ — соответственно скалярный и векторный потенциалы поля скоростей $\mathbf{v}$. При этом вектора $\mathbf{v}_l$ и $\mathbf{v}_t$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \times \mathbf{v}_l = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{v}_t = 0.$$

Подстановка (9) в уравнение (6) с учетом известного равенства из векторного анализа $\nabla\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — некоторый вектор, дает[3)]

$$\left[\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial t} + \nabla p - \left(\varsigma + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\mathbf{v}_l - \rho_{el}\mathbf{E}\right] + \\ + \left[\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} - \eta\Delta\mathbf{v}_t\right] = 0. \tag{10}$$

Здесь в первой квадратной скобке стоят потенциальные, а во второй квадратной скобке — соленоидальные вектора. Напомним, что $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ — потенциальный вектор, где φ — скалярный потенциал электрического поля $\mathbf{E}$. Применяя к (10) стандартную процедуру разделения потенциальных и соленоидальных составляющих, описанную, например, в работе [10, с. 54], получаем уравнение для потенциального течения

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_l}{\partial t} = -\nabla p + \left(\varsigma + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\mathbf{v}_l + \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{E} \tag{11}$$

и соленоидального течения

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} = \eta\Delta\mathbf{v}_t. \tag{12}$$

Подставляя в (11), (12) значения для $\mathbf{v}_l$ и $\mathbf{v}_t$ из (9), преобразуем их к виду

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla\Phi}{\partial t} = -\nabla p + \left(\varsigma + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\nabla\Phi - \rho_{\mathrm{el}}\nabla\varphi,$$

или

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p + \left(\varsigma + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi - \rho_{\mathrm{el}}\varphi \tag{13}$$

для скалярного потенциала и

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} = \eta\Delta\mathbf{\Psi} \tag{14}$$

для векторного потенциала.

Учитывая соотношение (8) между акустическим давлением p и акустическим возмущением плотности ρ, трансформируем (13) к виду

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c^2\rho + \left(\varsigma + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi - \rho_{\mathrm{el}}\varphi. \tag{15}$$

---

2) В данном случае это означает изотермичность процесса [7, с. 351].

3) $\nabla\nabla \cdot \mathbf{v}_t = 0$ вследствие соленоидальности вектора $\mathbf{v}_t$, а $\nabla\nabla \cdot \mathbf{v}_l = \Delta\mathbf{v}_l$ вследствие потенциальности вектора $\mathbf{v}_l$.

Пусть вектора $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}$ направлены вдоль оси Oz ($\mathbf{E}_0=(0,0,E_0)$, $\mathbf{E}=(0,0,E)$) и вектор $\mathbf{E}$, вызывающий акустические колебания, имеет гармоническую зависимость от времени $E=\bar{E}e^{-\mathrm{i}\omega t}$, где $\bar{E}=\mathrm{const}$ — амплитуда колебаний. Тогда потенциал φ вектора $\mathbf{E}$ в этом случае определяется из соотношения

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\bar{E}e^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Интегрируя последнее равенство, имеем

$$\varphi=-\bar{E}ze^{-\mathrm{i}\omega t}+\varphi(0)e^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{16}$$

где $\varphi(0)=\varphi(z)\big|_{z=0}$. В дальнейшем полагаем $\varphi(0)=0$.

Преобразуем уравнение (13). Для этого воспользуемся условием непрерывности (7) и соотношением (8) между величинами избыточной плотности ρ и акустического давления p: $p=c^2\rho$. Получаем $\frac{\partial p}{\partial t}=-\rho_0c^2\nabla\cdot\mathbf{v}$. Подстановка в последнюю формулу выражений (9) дает

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\rho_0c^2\nabla\cdot\mathbf{v}=-\rho_0c^2\nabla\cdot\mathbf{v}_l=-\rho_0c^2\Delta\Phi.$$

Случай гармонического стационарного процесса

В гармоническом случае сохраняем для полей те же обозначения для амплитуд, подразумевая наличие гармонического множителя $e^{-\mathrm{i}\omega t}$. Из последнего уравнения имеем для амплитуд

$$-\mathrm{i}\omega p=-\rho_0c^2\Delta\Phi,$$

или окончательно

$$p=\frac{\rho_0c^2}{\mathrm{i}\omega}\Delta\Phi. \tag{17}$$

С учетом (17) выражение (13) для гармонического сигнала примет вид

$$-\mathrm{i}\omega\rho_0\Phi=-\frac{\rho_0c^2}{i\omega}\Delta\Phi+\left(\varsigma+\frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi-\rho_{\mathrm{el}}\varphi. \tag{18}$$

С учетом (16) выражение (18) переписывается так:

$$-\mathrm{i}\omega\rho_0\Phi=-\frac{\rho_0c^2}{i\omega}\Delta\Phi+\left(\varsigma+\frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi+\rho_{\mathrm{el}}\bar{E}z. \tag{19}$$

ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЗАРЯДА

Остановимся на величине ρ_{el} — объемной плотности заряда, соответствующей распределению зарядов в диффузионном слое электроосмотического процесса при различных поверхностях раздела фаз. Наиболее легко вычисляется распределение ρ_{el} в случае т. н. приближения Дебая. Так, для плоской границы раздела фаз (плоскость $x=0$) величина ρ_{el} на расстоянии x от плоскости раздела вычисляется по формуле [11, с. 148], [12]

$$\rho_{\mathrm{el}}(x)=-\varepsilon\varepsilon_0\Delta\varphi=-\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=$$
$$=-\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\xi}}{\lambda_D^2}\exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right), \tag{20}$$

а для круговой цилиндрической поверхности раздела фаз — по формуле [11, с. 149], [12]

$$\rho_{\mathrm{el}}(r)=-\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\xi}}{\lambda_D^2}\frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)}. \tag{21}$$

Здесь I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; z — текущее расстояние от плоскости скольжения в случае плоской границы; r — текущее значение радиуса капилляра радиусом a (здесь под a понимается радиус до поверхности скольжения капилляра); λ_D — длина Дебая. ς-потенциал [2] здесь обозначен через $\tilde{\xi}$ во избежание путаницы с устоявшимся обозначением для объемной вязкости ς. Все остальные обозначения соответствуют обозначениям, принятым в работе [2].

В случае плоской границы раздела уравнение (19) с учетом (20) запишется так:

$$-\mathrm{i}\omega\rho_0\Phi=-\frac{\rho_0c^2}{i\omega}\Delta\Phi+\left(\varsigma+\frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi-$$
$$-\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\xi}}{\lambda_D^2}\exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right)\bar{E}z,$$

или в каноническом виде

$$\left[\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{i}\omega\left(\varsigma+\frac{4}{3}\eta\right)}{\rho_0c^2}\right)^{-1}\right]\Phi=$$

$$= -\frac{\mathrm{i}\omega}{\rho_0 c^2}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\varsigma}}{\lambda_D^2}\left(1-\frac{\mathrm{i}\omega\left(\varsigma+\frac{4}{3}\eta\right)}{\rho_0 c^2}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right)\bar{E}z.$$

Введем обозначение для волнового числа потенциальных волн (см., например, [13, 14])

$$k=\frac{\omega}{c}\left(1-\frac{\mathrm{i}\omega\left(\varsigma+\frac{4}{3}\eta\right)}{\rho_0 c^2}\right)^{-1/2}.$$

Тогда последнее выражение запишется в виде

$$\left[\Delta+k^2\right]\Phi=-\frac{\mathrm{i}k^2}{\omega\rho_0}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\varsigma}}{\lambda_D^2}\exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right)\bar{E}z\,. \qquad (22)$$

В случае круговой симметрии задачи (ось цилиндра совпадает с осью Oz) лапласиан равен $\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ и уравнение (19) с учетом (21) преобразуется к виду

$$\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]+k^2\right\}\Phi=$$
$$=-\frac{\mathrm{i}k^2}{\omega\rho_0}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\varsigma}}{\lambda_D^2}\frac{I_0\left(r/\lambda_D\right)}{I_0\left(a/\lambda_D\right)}\bar{E}z. \qquad (23)$$

Таким образом, для амплитуды скалярного потенциала скорости Ф получены неоднородные уравнения Гельмгольца (22), (23). Правая часть этих уравнений, как и в случае стационарного электроосмоса ([2, выражение (9)]), пропорциональна амплитуде электрического потенциала $\bar{E}$ и величине дзета-потенциала $\tilde{\varsigma}$, а также обратно пропорциональна величинам динамической вязкости η и объемной вязкости ς. Кроме того, Φ, как и в стационарном случае, пропорциональна произведению диэлектрической проницаемости среды и электрической постоянной $\varepsilon\varepsilon_0$.

Замечание. Как отмечалось в [2], в моделях электроосмотических процессов принимается допущение, что распределение заряда ρ_{el} в ДЭС является стационарным и не зависит от приложения стороннего стационарного электрического поля, в данном случае $\mathbf{E}_0$. В случае добавления переменного поля $\mathbf{E}$, даже если предположить, что оно влияет на структуру ДЭС, возможное влияние его на структуру ДЭС на акустических частотах можно не учитывать, т. к. [15, с. 27]: "Во всех, даже плохих проводниках, время релаксации заряда τ достаточно мало. Так, в морской воде время релаксации порядка $\tau=2\cdot10^{-10}$ с; даже в таком плохом проводнике, как дистиллированная вода, оно не более 10^{-6} с". Эти величины соответствуют частотам от 1 МГц до 10 ГГц, что явно далеко выходит за границы акустического диапазона.

Формально задача считается решенной, если определены скалярный Ф и векторный $\mathbf{\Psi}$ потенциалы. Вектор колебательной скорости $\mathbf{v}$ определяется после этого из (9). Поле акустического возмущения плотности может далее быть определено из выражения (8). Скалярный потенциал определяется выражением (19), векторный — выражением (14). Поле давления определяется из (17), однако может быть определено иначе с помощью выражений (17) и (22) или (23) в виде

$$p=-\frac{\rho_0 c^2}{\mathrm{i}\omega}\left(k^2\Phi+\frac{\mathrm{i}k^2}{\omega\rho_0}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\varsigma}}{\lambda_D^2}\bar{E}z\exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right)\right) \qquad (24)$$

для плоской границы раздела фаз и

$$p=-\frac{\rho_0 c^2}{\mathrm{i}\omega}\left(k^2\Phi+\frac{\mathrm{i}k^2}{\omega\rho_0}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\varsigma}}{\lambda_D^2}\bar{E}z\frac{I_0\left(r/\lambda_D\right)}{I_0\left(a/\lambda_D\right)}\right) \qquad (25)$$

для цилиндрической границы раздела фаз.

ВЛИЯНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Уравнение (14) для векторного потенциала в гармоническом случае записывается так:

$$\Delta\mathbf{\Psi}+\frac{\mathrm{i}\omega\rho_0}{\eta}\mathbf{\Psi}=0\,, \qquad (26)$$

или в виде уравнения Гельмгольца

$$\Delta\mathbf{\Psi}+k_t^2\mathbf{\Psi}=0\,.$$

Здесь $k_t=\left(1+\mathrm{i}\right)/\delta$, где $\delta=\sqrt{2\frac{\eta}{\rho_0\omega}}=\sqrt{2\nu/\omega}$, где ν — кинематическая вязкость, а величина δ называется глубиной проникновения вязких волн (см., например, [13, 14], [16, с. 63]). Решение уравнений типа (26) разобрано, например, в [16, § 19]. Его решение для плоской волны представляет собой неоднородную плоскую волну с экспоненциально убывающей амплитудой $e^{-\frac{x}{\delta}}$, где x — длина пути прохождения плоской волны от плоскости $x=0$.

Глубина проникновения вязкой волны δ для воздуха при температуре 20 ºС равна $\delta=$ $=\sqrt{2\cdot1.51\cdot10^{-5}/\omega}$.

Глубина проникновения вязкой волны в воздухе и воде на разных звуковых частотах

Частота, Гц	Воздух		Вода	
	δ, м	$x_{0.1}$, м	δ, м	$x_{0.1}$, м
20	$5\cdot10^{-4}$	$1.1\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$
100	$2.2\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-4}$	$5.7\cdot10^{-5}$	$1.3\cdot10^{-4}$
1000	$7\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-4}$	$1.8\cdot10^{-5}$	$4.2\cdot10^{-5}$

Глубина проникновения вязкой волны δ для воды при температуре 20 ºC равна $\delta = \sqrt{2\cdot1.06\cdot10^{-6}/\omega}$. В таблице представлены величины δ для воздуха и воды на частотах 20, 100 и 1000 Гц, а также соответствующие значения величины $x_{0.1}$, при которой экспоненциальный множитель $e^{-\frac{x_{0.1}}{\delta}} = 1/10$ (т. е. амплитуда волны падает на порядок).

Как видно из приведенных формул и из таблицы, глубина проникновения вязкой волны δ в воздухе больше, чем в воде, и обратно пропорциональна корню квадратному из частоты. Характер изменения величины $x_{0.1}$ примерно повторяет поведение величины δ.

Поведение величин δ и $x_{0.1}$ следует учитывать при расчетах полевых характеристик акустического поля через скалярный и векторный потенциалы. В случае, если $x_{0.1} \ll a$, можно ограничиваться при расчетах учетом только скалярного потенциала. В противном случае необходимо учитывать оба потенциала.

ОТЛИЧИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРООСМОСА ОТ КЛАССИЧЕСКОГО

Уравнения

Классический электроосмос в отличие от акустического предполагает временну́ю стационарность, несжимаемость жидкости и присутствие сторонней силы только в виде постоянного электрического поля. Отсюда — использование простой математической модели в виде упрощенного уравнения Навье—Стокса, решением которого является стационарное течение $\mathbf{v}$ с единственной составляющей v_z, совпадающей по направлению с действием внешнего вектора электрической напряженности $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_{0z})$. Решение этого уравнения тривиально [3, с. 34], [17, с. 218] и не нуждается в использовании векторного потенциала $\mathbf{\Psi}$.

В акустическом электроосмосе уравнение Навье—Стокса много сложнее. Во-первых, оно нестационарно в смысле зависимости от времени, во-вторых, жидкость уже нельзя считать несжимаемой и, в третьих, нельзя обойтись простым балансом сил между электрическим полем и силами трения, необходимо учитывать также и силу акустического давления. Ниже рассматриваются следствия этого усложнения.

Принимаем для простоты, что задача расчета полевых характеристик в акустическом электроосмосе описывается потенциалом Φ, а потенциалом $\mathbf{\Psi}$ можно пренебречь. Тогда, как видно из (22)–(26), поля Φ, $\mathbf{v}$ и p для плоской границы раздела фаз зависят от переменных x и z, а для цилиндрической поверхности раздела фаз — от переменных r и z.

Согласно (6), наличие зависимости акустического давления p от двух координат ($p = p(x,z)$ для плоской границы либо $p = p(r,z)$ для цилиндрической границы) приводит к появлению, кроме v_z, еще одной составляющей скорости — соответственно v_x или v_r, что отличает от случая классического электроосмоса, где существует только одна составляющая вектора скорости v_z.

В случае, когда $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| \sim \left|\frac{\partial p}{\partial z}\right| \gg \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|$ для плоской границы или $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| \sim \left|\frac{\partial p}{\partial z}\right| \gg \left|\frac{\partial p}{\partial r}\right|$ для цилиндрической, можно считать, что присутствует одна составляющая течения v_z. Здесь φ — потенциал вектора электрической напряженности $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

Краевые условия

В классическом электроосмосе ставятся следующие краевые условия [3, с. 34], [17, с. 218]:

1) вектор скорости $\mathbf{v}$ на плоскости скольжения равен нулю; для плоской границы раздела это означает $\mathbf{v}\big|_{x=a} = 0$, или, учитывая что $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$: $v_z\big|_{x=a} = 0$; для цилиндрической границы раздела соответственно $\mathbf{v}\big|_{r=a} = 0$, или $v_z\big|_{r=a} = 0$;

2) вне диффузного слоя производные электроосмотических скоростей $\dfrac{\partial v_z}{\partial x} = 0$ и $\dfrac{\partial v_z}{\partial r} = 0$ соответственно для плоской и цилиндрической границ;

3) вне диффузного слоя потенциал Φ_{eo} двойного электрического слоя стабилизируется и становится равным нулю, что отражается равенствами $\dfrac{\partial \Phi_{\text{eo}}}{\partial x} = 0$ и $\dfrac{\partial \Phi_{\text{eo}}}{\partial r} = 0$ соответственно для плоской и цилиндрической границ раздела; кроме того, вне диффузного слоя $\Phi_{\text{eo}} = 0$.

Очевидно, что в случае акустического электроосмоса при наличии второй составляющей вектора скорости, кроме условий 1–3, ко второму краевому условию для классического электроосмоса необходимо добавить условие равенства нулю второй составляющей скорости на поверхности скольжения: $v_x\big|_{x=0} = 0$ и $v_r\big|_{r=0} = 0$ соответственно. Учитывая краевое условие 1), последние краевые условия и то, что составляющие вектора скорости $\mathbf{v}$ нулевые — $v_y = 0$ и $v_\varphi = 0$ для плоского и цилиндрического случаев соответственно, можно в общем виде записать краевое условие для акустического электроосмоса

$$\nabla\Phi\big|_a = 0,$$

т. е. равенство нулю градиента скалярного потенциала на поверхности скольжения.

ВЫВОДЫ

В работе предложены необходимые уравнения и краевые условия для описания акустических полей, вызываемых электрокинетическими явлениями: наличием двойного электрического слоя и приложенного электрического поля, являющегося суммой постоянного поля и электрического поля, несущего акустическую информацию. Уравнения рассматриваются для условий вязкой несжимаемой и сжимаемой жидкости для условий расчета соответственно гидродинамики стационарного электроосмотического процесса и зависящего от времени акустического процесса. Как видно из полученных выражений, процессы, происходящие при акустическом электроосмосе, имеют как много общего, так и содержат некоторые отличия от процессов классического электроосмоса. Разработанная в работе физическая модель и полученные соответствующие математические выражения позволяют рассчитывать акустические характеристики излучателя, основанного на наличии электрокинетических явлений, и оптимизировать его устройство.

Работа выполнена в ИАП РАН в рамках НИР по государственному заказу ФАНО 0074-2014-0010, государственный регистрационный номер: АААА-А16-116041310008-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shishov S.V., Andrianov S.A., Dmitriev S.P., Ruchkin D.V.* Method of converting electric signal sinto acoustics oscillations and an electric gas-kinetic transducer. US Patent no. US 8,085,957,B2 Dec. 27, 2011.
2. *Сергеев В.А., Шарфарец Б.П.* Об одном новом методе электроакустического преобразования. Теория, основанная на электрокинетических явлениях. Ч. I. Гидродинамический аспект // Научное приборостроение. 2018. Т. 28, № 2. С. 25–35.
3. *Духин С.С., Дерягин Б.В.* Электрофорез. М.: Наука, 1976. 332 с.
4. Механика сплошных сред в задачах / Под общ. ред. М.Э. Эглит. М.: ЛЕНАНД, 2017. 640 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
6. *Кочин Н.Е., Кибель Е.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМЛ, 1963. 728 с.
7. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Иностр. лит-ра, 1963. 256 с.
8. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
9. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
10. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред в приложении к теории волн. М.: Наука, 1982. 336 с.
11. *Bruus H.* Theoretical Microfluidics. Oxford University Press, 2008. 346 p.
12. *Князьков Н.Н., Шарфарец Б.П., Шарфарец Е.Б.* Базовые выражения, используемые в электрокинетических явлениях. Обзор // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 4. С. 13–21. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/abst4.php#abst2.
13. *Doinikov A.A.* Acoustic radiation pressure on a rigid sphere in a viscous fluid // Proc. R. Soc. Lond. 1994. Vol. 447, no. 1931. P. 447–466. Doi: 10.1098/rspa.1994.0150.
14. *Doinikov A.A.* Acoustic radiation pressure on a compressibl sphere in a viscous fluid // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 267. P. 1–22. Doi: 10.1017/S0022112094001096.

15. *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.: ОГИЗ, 1948. 539 с.
16. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
17. *Ньюмен Дж.* Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 464 с.

АО "АКВАМАРИН", Санкт-Петербург (*Сергеев В.А.*)

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург (*Шарфарец Б.П.*)

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 5.03.2018

ABOUT ONE NEW METHOD OF ELECTROACOUSTIC TRANSFORMATION. A THEORY BASED ON ELECTROKINETIC PHENOMENA. PART II. THE ACOUSTIC ASPECT

V. A. Sergeev[1], B. P. Sharfarets[2]

[1]*AO "AKVAMARIN", Saint-Petersburg, Russia*
[2]*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*

The necessary equations and boundary conditions are proposed for describing acoustic fields caused by electrokinetic phenomena: the presence of a double electric layer and an applied electric field that is the sum of a constant field and an electric field carrying acoustic information. Equations are considered for viscous incompressible and compressible fluid conditions, provided that the hydrodynamics of the stationary electroosmotic process and the acoustic process are calculated accordingly. From the expressions obtained, it can be seen that the processes occurring during acoustic electroosmosis have as much in common, and contain some differences from the processes of classical electroosmosis. The physical model developed in the work and the corresponding mathematical expressions obtained make it possible to calculate the acoustic characteristics of the radiator based on the presence of electrokinetic phenomena and to optimize its device. The obtained results can be used in scientific instrument making.

Keywords: electroacoustic conversion, electrokinetic phenomena, hydrodynamics of electroosmosis, acoustics of electroosmosis, equations of motion of acoustic electroosmosis

REFERENCES

1. Shishov S.V., Andrianov S.A., Dmitriev S.P., Ruchkin D.V. *Method of converting electric signal sinto acoustics oscillations and an electric gas-kinetic transducer*. US Patent no. US 8,085,957,B2 Dec. 27, 2011.
2. Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [About one new method of electroacoustic transformation. A theory based on electrokinetic phenomena. Part I. The hydrodynamic aspect]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2018, vol. 28, no. 2, pp. 25–35. (In Russ.).
3. Duchin S.S., Deryagin B.V. *Elektroforez* [Electrophoresis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 332 p. (In Russ.).
4. Eglit M.E., eds. *Mechanika sploshnych sred v zadachach* [Mechanics of continuous mediums in the tasks]. Moscow, LENAND Publ., 2017. 640 p. (In Russ.).
5. Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 736 p. (In Russ.).
6. Kochin N.E., Kibel' E.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromechanika* [Theoretical hydromechanics]. Moscow, GIFML Publ., 1963. 728 p. (In Russ.).
7. Serrin J. *Matematicheskie osnovy klassicheskoy mechaniki zhidkosti* [*Mathematical fundamentals of classical mechanics of liquid*]. Moscow, IL Publ., 1963. 256 p. (In Russ.).
8. Rudenko O.V., Soluyan S.I. *Teoreticheskie osnovy nelineynoy akustiki* [Theoretical fundamentals of non-linear acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 288 p. (In Russ.).
9. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarla-

kovskiy D.V. *Volny v sploshnych sredach* [Waves in continuous mediums]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 472 p. (In Russ.).
10. Brechovskich L.M., Goncharov V.V. *Vvedenie v mechaniku sploshnych sred v prilozhenii k teorii voln* [Introduction to mechanics of continuous mediums in application to the theory of waves]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 336 p. (In Russ.).
11. Bruus H. *Theoretical Microfluidics*. Oxford University Press, 2008. 346 p.
12. Knyaz'kov N.N., Sharfarets B.P., Sharfarets E.B. [The basic expressions used in the electrokinetic phenomena (review)]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 4, pp. 13–21. (In Russ.). URL: http://213.170.69.26/en/mag/2014/abst4.php#abst2.
13. Doinikov A.A. Acoustic radiation pressure on a rigid sphere in a viscous fluid. *Proc. R. Soc. Lond.*, 1994, vol. 447, no. 1931, pp. 447–466. Doi: 10.1098/rspa.1994.0150.
14. Doinikov A.A. Acoustic radiation pressure on a compressibl sphere in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 1994. Vol. 267. P. 1–22. Doi: 10.1017/S0022112094001096.
15. Stretton J.A. *Teoriya elektromagnetizma* [Theory of electromagnetism]. Moscow, OGIZ Publ., 1948. 539 p. (In Russ.).
16. Isakovich M.A. *Obschaya akustika* [General acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 496 p. (In Russ.).
17. Newman J. *Elektrochimicheskie sistemy* [Electrochemical Systems]. Moscow, Mir Publ., 1977. 464 p. (In Russ.).

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich,*
sharb@mail.ru

Article received in edition: 5.03.2018