ISSN 0868–5886 *НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2017, том 27, № 4, с. 72–89*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 537.534.7

© **А. С. Бердников, Н. К. Краснова, К. В. Соловьев**

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА УИТТЕКЕРА ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ С НУЛЕВЫМ ПОРЯДКОМ ОДНОРОДНОСТИ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Данная работа посвящена анализу формулы Уиттекера для трехмерных гармонических функций нулевого порядка и некоторым ее следствиям. Она является продолжением цикла работ, посвященных исследованию свойств гармонических потенциалов, являющихся однородными по Эйлеру функциями, и их применению для синтеза эффективных электронно- и ионно-оптических систем.

Кл. сл.: электрические поля, магнитные поля, однородные по Эйлеру функции, принцип подобия траекторий в оптике заряженных частиц, аналитические решения уравнения Лапласа, формула Донкина

ВВЕДЕНИЕ

Данная публикация является продолжением цикла работ, и естественно начать ее цитированием вводной части предыдущей работы.

"Электростатическими и магнитостатическими полями, однородными по Эйлеру, называются поля, напряженность или индукция которых является функцией, однородной по Эйлеру в смысле, который придается этому термину в общих курсах математического анализа [1, 2]. Электростатическое или магнитное поле является однородным по Эйлеру, если его напряженность $\mathbf{E}(x,y,z)$ (для магнитного поля — индукция $\mathbf{B}(x,y,z)$) удовлетворяет тождеству $\mathbf{E}(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \lambda^{k-1}\mathbf{E}(x,y,z)$ (для магнитного поля — тождеству $\mathbf{B}(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \lambda^{k-1}\mathbf{B}(x,y,z)$) в области, в которой происходит движение заряженных частиц, при всех $\lambda > 0$. Число k, которое не обязательно является целым, называется порядком однородности поля, и оно в значительной мере определяет свойства траекторий заряженных частиц". Электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру, являются полезным инструментом при разработке разнообразных электронно- и ионно-оптических систем [3–11].

Данная работа является прямым продолжением публикации [12], которая анализирует общую интегральную формулу Уиттекера для трехмерных гармонических функций общего вида

$$V(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} F(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t, t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

и формулу Уиттекера для однородных гармонических функций с заданным порядком однородности

$$V(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} (z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t)^n\, h(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (2)$$

которые приводятся в монографии [13]. Эта работа также входит в цикл публикаций [14–29], в которых анализируются электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру с заданным порядком однородности, а также их применение для синтеза электронно- и ионно-оптических устройств с полезными свойствами.

ФОРМУЛА УИТТЕКЕРА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

В монографии [13] приводится (без доказательства) следующая формула для однородных гармонических функций нулевого порядка:

$$\begin{gathered} V(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \log(x\cos t + y\sin t + \mathrm{i}z)\, g(t)\,\mathrm{d}t, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = 0. \end{gathered} \qquad (3)$$

Предполагается, что при любом выборе функции $g(t)$ на выходе получается однородная гармоническая функция нулевого порядка (легко проверяется прямой подстановкой) и что любая однородная гармоническая функция нулевого порядка может быть выражена с помощью (3) при надлежащем выборе функции $g(t)$ (требует доказательства).

В [30] отмечается, что условие $\int_{-\pi}^{+\pi} g(t)\mathrm{d}t = 0$ эквивалентно тому, что у функции $g(t)$ существует первообразная $G(t)$, удовлетворяющая условиям $G'(t) = g(t)$, $G(-\pi) = 0$, $G(+\pi) = 0$. Если проинтегрировать (3) по частям, получим эквивалентное выражение более простого вида:

$$V(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x\sin t - y\cos t}{x\cos t + y\sin t + \mathrm{i}z} G(t)\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Легко убедиться с помощью прямой подстановки, что на самом деле при *любом* выборе функции $G(t)$ формула (4) порождает однородную гармоническую функцию нулевого порядка. Поэтому условие $G(-\pi) = G(+\pi) = 0$, вообще говоря, не является обязательным, но и избавление от него не приводит к появлению новых однородных гармонических функций нулевого порядка: при $G(t) = \mathrm{const}$ формула (4) дает тождественный ноль. Дополнительное удобство формулы (4) состоит в том, что при работе с нею не возникает технических проблем, связанных с неоднозначностью логарифмической функции на комплексной плоскости.

Но действительно ли *все* однородные гармонические функции нулевого порядка могут быть получены с помощью (3) и (4)? И если да, то действительно ли при разных функциях получаются *разные* однородные гармонические функции нулевого порядка?

Для исследования этой задачи воспользуемся формулой Донкина [4, 5, 13, 31–33]:

$$V(x,y,z) = F\left(\frac{x}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \tag{5}$$

где $F(p,q)$ — произвольная функция, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа $\partial^2 F/\partial p^2 + \partial^2 F/\partial q^2 = 0$. При любом выборе функции $F(p,q)$, удовлетворяющей двумерному уравнению Лапласа, формула (5) порождает однородную гармоническую функцию нулевого порядка, и любая однородная гармоническая функция нулевого порядка может быть представлена в виде (5) при надлежащем выборе функции $F(p,q)$, удовлетворяющей двумерному уравнению Лапласа. Действительно, любая функция $V(x,y,z)$, однородная по Эйлеру с нулевым порядком однородности, может быть представлена в виде (5) с помощью подходящим образом заданной функции $F(p,q)$ двух переменных (формула (5) — это модифицированный вариант записи однородных функций $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ порядка k в виде $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1^k g(x_2/x_1,\ldots,x_n/x_1)$ [1, 2]). При подстановке (5) в трехмерное уравнение Лапласа немедленно получаем, что для того, чтобы функция $V(x,y,z)$ удовлетворяла трехмерному уравнению Лапласа $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $F(p,q)$ удовлетворяла двумерному уравнению Лапласа $F_{pp} + F_{qq} = 0$:

$$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{\left(1-p^2-q^2\right)^2}{4z^2}\left(\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2}\right),$$

$$\begin{cases} p = \dfrac{x}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ q = \dfrac{y}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2pz}{1-p^2-q^2}, \\ y = \dfrac{2qz}{1-p^2-q^2}. \end{cases}$$

При этом можно показать, что все формулы вида $V(x,y,z) = \rho(x,y,z) F(\phi(x,y,z), \psi(x,y,z))$, которые для любых двумерных гармонических функций $F(p,q)$ порождают однородные гармонические функции нулевого порядка, сводятся к формуле (5) с точностью до конформной замены аргументов у функции F [22].

Связь между комплекснозначной функцией $G(t)$ в формуле (4) и аналитической функцией $F(p+\mathrm{i}q)$ в формуле (5) приводит к уравнению

$$F\left(\frac{x+\mathrm{i}y}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x\sin t - y\cos t}{x\cos t + y\sin t + \mathrm{i}z} G(t)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

После замены $x = \dfrac{2x'z'}{1-x'^2-y'^2}$, $y = \dfrac{2y'z'}{1-x'^2-y'^2}$, $z = z'$ уравнение приобретает вид:

$$F\left(x' + \mathrm{i}y'\right) = \\ = 2\mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{y'\cos t - x'\sin t}{\left(1-x'^2-y'^2\right) - 2\mathrm{i}\left(x'\cos t + y'\sin t\right)} G(t)\,\mathrm{d}t. \quad (7)$$

С помощью подстановки $x' = -\mathrm{i}r\cos\phi$, $y' = -\mathrm{i}r\sin\phi$ (переход от вещественных переменных (x', y') к вещественным полярным координатам (r,ϕ) содержит скрытое конформное преобразование) это выражение приводится к виду

$$F(r,\phi) = U(r,\phi) + \mathrm{i}V(r,\phi) = \\ = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2r\sin(\phi - t)}{\left(1+r^2\right) - 2r\cos(\phi - t)} G(t)\,\mathrm{d}t. \quad (8)$$

Однако выражение (8) — это с точностью до интегрирования по частям интеграл для потенциала простого слоя

$$\log\left(\left(x - R\cos t\right)^2 + \left(y - R\sin t\right)^2\right)$$

с плотностью $G(t)$, записанный для окружности радиуса $R = 1$. Решение же $F(p,q)$ внутренней задачи Дирихле для двумерного уравнения всегда может быть выражено как интеграл от распределения заряда (плотности потенциала простого слоя) вдоль границы [34, 35]. Это значит, что для заданной гармонической функции $F(p,q)$ всегда можно восстановить вещественную и мнимую части функции $G(t)$, которые обеспечат справедливость формулы (8). В результате множество однородных гармонических функций вида (4) и множество однородных гармонических функций вида (5) совпадут между собой, если наложить дополнительное условие, что гармонические функции $F(p,q)$, используемые в формуле Донкина (5), не имеют особых точек внутри круга $p^2 + q^2 < 1$.

Примечание. В работе [16] доказательство связи между формулой Донкина (5) и интегральной формулой Уиттекера (4) содержит досадные неточности. В данной публикации эти недочеты исправлены.

ТЕОРЕМА О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Рассмотрим функцию $V(x,y,z)$, которая является гармонической и однородной по Эйлеру с порядком однородности k. Тогда ее частные производные $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$, $\partial V/\partial z$ являются гармоническими функциями, однородными по Эйлеру с порядком однородности $(k-1)$ [1, 2]. Справедливо и обратное утверждение: у любой функции $V(x,y,z)$, которая является гармонической и однородной по Эйлеру с порядком однородности, равным k, существуют функции-прототипы $W^{(x)}(x,y,z)$, $W^{(y)}(x,y,z)$, $W^{(z)}(x,y,z)$, которые являются гармоническими и однородными по Эйлеру с порядком однородности $(k+1)$ и связаны с функцией $V(x,y,z)$ соотношениями $V \equiv \partial W^{(x)}/\partial x$, $V \equiv \partial W^{(y)}/\partial y$, $V \equiv \partial W^{(z)}/\partial z$ [28, 33].

Из этой теоремы следует, что если организовать исчерпывающее описание гармонических однородных функций фиксированного порядка k, то, например, с помощью оператора дифференцирования $\partial/\partial z$ можно организовать исчерпывающее описание гармонических однородных функций с ниспадающими порядками $(k-1)$, $(k-2)$, …, причем ни одна однородная гармоническая функция не будет пропущена. Операция дифференцирования не является в этом смысле уникальной: например, имеется иерархия дифференциальных операторов [31, 32], которая приводит к тому же самому результату.

Кроме дифференцирования, для генерирования новых однородных гармонических функций может использоваться формула Томсона (преобразование Кельвина) [34, 36–39] $H(x,y,z) = r^{-2k-1}V(x,y,z)$ (где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$). Она позволяет из однородных гармонических функций $V(x,y,z)$ с порядком однородности k получать однородные гармонические функции $H(x,y,z)$ с порядком однородности $(-k-1)$. Легко проверить, что функция $H(x,y,z) = r^{-2k-1}V(x,y,z)$ действительно будет однородной с порядком однородности $(-k-1)$. Гармоничность же функции $H = r^{-2k-1}V$ следует из того факта, что функция V обязана удовлетворять как уравнению Лапласа $\partial^2 V/\partial x^2 + \partial^2 V/\partial y^2 + +\partial^2 V/\partial z^2 = 0$, так и дифференциальному соотношению Эйлера $x(\partial V/\partial x) + y(\partial V/\partial y) + +z(\partial V/\partial z) = kV$ [1, 2, 37].

Преобразование Кельвина позволяет генерировать из однородных функций с последовательно убывающими порядками однородности, полученными в результате дифференцирования, однородные функции с последовательно возрастающими порядками однородности. В этом процессе ни одна однородная гармоническая функция не будет пропущена, поскольку у каждой однородной гармонической функции H имеется однородная гармоническая функция-прототип V — она получается из функции H с помощью все того же преобразования Кельвина (преобразование Кельвина является обратным для самого себя, и при повторном применении преобразования Кельвина из функции H получается исходная функция V).

Используя формулу Донкина (5) в качестве стартовой точки, получим на выходе универсальные формулы для всех целочисленных порядков однородности, как положительных, так и отрицательных [22, 33]. К любому порядку однородности можно организовать множество цепочек из элементарных шагов, состоящих из дифференцирования и умножения на нужные степени r, поэтому для каждого порядка однородности имеется широкое разнообразие формул, генерирующих полный набор трехмерных гармонических однородных функций с помощью двумерных гармонических функций. Следует, однако, заметить, что это, отнюдь, не означает, что при применении этих формул разные двумерные гармонические функции будут приводить обязательно к разным трехмерным гармоническим однородным функциям. Более того разнообразие возможных универсальных формул никак не сказывается на разнообразии получаемых в результате их применения однородных гармонических функций.

Применим описанный процесс дифференцирования по z и умножения на нужную степень r к однородным гармоническим функциям нулевого порядка, задаваемым интегральной формулой (4). Получим следующий результат.

А. При любом натуральном $k > 0$ выражение

$$V(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x\sin t - y\cos t}{(x\cos t + y\sin t + \mathrm{i}z)^{k+1}} G(t)\,\mathrm{d}t \qquad (9,\ \text{а})$$

обеспечивает интегральную формулу вида (4) для однородных гармонических функций с отрицательным порядком однородности, равным $(-k)$.

Б. При любом натуральном $k > 0$ выражение

$$V(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{2k+1}(x\sin t - y\cos t)}{(x\cos t + y\sin t + \mathrm{i}z)^{k+2}} G(t)\,\mathrm{d}t \qquad (9,\ \text{б})$$

обеспечивает интегральную формулу для однородных гармонических функций с положительным порядком однородности, равным k.

Степень общности у формул (9, а) и (9, б) будет такой же, что и у исходной формулы (4). То есть формулы (9, а) и (9, б) позволяют перебирать все имеющиеся однородные гармонические функции порядков k и $-k$ тогда и только тогда, когда (4) позволяет перебирать все однородные гармонические функции нулевого порядка.

Аналогичные по смыслу выражения можно получить, если для формулы (4) вместо дифференцирования по z использовать дифференцирование по x или по y. Также можно использовать в качестве дифференциального оператора k-го порядка любую смешанную композицию, составленную из элементарных дифференцирований по разным направлениям. Также можно использовать преобразование Кельвина для повышения порядка однородности в сочетании с многократным дифференцированием, чтобы вернуть порядок однородности к исходному. Однако все эти формулы будут на самом деле эквивалентны друг другу, и разнообразие математических выражений, отнюдь, не приводит к разнообразию получаемых на выходе однородных гармонических функций.

Например, при однократном дифференцировании формулы (4) и немедленном умножении ее на r снова будет получена формула для однородной гармонической функции нулевого порядка, но уже другая. Повторяя этот процесс, можно получить цепочку интегральных формул все возрастающей сложности, которые на самом деле будут все эквивалентны друг другу:

$$V(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x\sin t - y\cos t}{(x\cos t + y\sin t + \mathrm{i}z)} G(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$V(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(x\sin t - y\cos t)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x\cos t + y\sin t + \mathrm{i}z)^2} G(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$V(x,y,z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{(x\sin t-y\cos t)\left(2x^2+2y^2+z^2+\mathrm{i}xz\cos t+\mathrm{i}yz\sin t\right)}{(x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z)^3}G(t)\,\mathrm{d}t,$$

……………

Легко проверить, что формулы (9) сохраняют свою работоспособность и при нецелочисленных значениях параметра k. Однако, как и в случае с формулой (2), остается неизвестным, как много из существующих в природе однородных гармонических функций будет упущено из вида, если ограничиться для нецелочисленных значений параметра k только такими выражениями.

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Можно получить и другие интегральные формулы, аналогичные формулам (3) и (4). Идея состоит в том, чтобы представить двумерную гармоническую функцию $F(p,q)$ с помощью подходящей интегральной формулы, имеющей достаточную степень общности, после чего подставить результат в формулу (5).

Например, вместо потенциала простого слоя можно использовать потенциал двойного слоя, с помощью которого для произвольной односвязной области всегда может быть выражено решение внутренней задачи Дирихле для двумерной гармонической функции [34, 35]. В равной степени можно использовать интеграл Пуассона (потенциал двойного слоя) [40–42] для вычисления в явном виде решения внутренней краевой задачи Дирихле, когда рассматриваемая область является кругом:

$$U(\rho,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\phi-\alpha)+\rho^2}u(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \quad \text{при } \rho<R, \tag{10}$$

где $\rho=\sqrt{p^2+q^2}$; $\phi=\mathrm{Arg}(p,q)$ (использована подстановка $p=\rho\cos\phi$, $q=\rho\sin\phi$); R — радиус окружности с центром в начале координат, которая является границей круга; $u(\phi)$ — известное значение потенциала $U(\rho,\phi)$ на границе круга $\rho=R$, $0\le\phi\le 2\pi$.

После элементарных преобразований из (10) с учетом формулы Донкина (5) получается новая формула для однородных гармонических функций нулевого порядка:

$$V(x,y,z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z}G(t)\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Легко проверить, что (11) действительно является гармонической однородной функцией нулевого порядка. Несмотря на то что прямой связи между функциями, используемыми в (4) и в (11) нет, эти формулы эквивалентны друг другу и имеют одну и ту же степень общности. Это следует из того, что соответствующие функции $G(t)$ однозначным образом связаны с аналитическими функциями $F(p+\mathrm{i}q)$, регулярными во всех точках круга $p^2+q^2<1$, которые подставляются в формулу Донкина (5). Дифференцирование по z и умножение на надлежащие степени r позволяет получить из формулы (11) интегральные формулы для однородных гармонических функций с целочисленными порядками однородности, аналогичные формулам (9, а) и (9, б).

Полезно также исследовать формулы

$$\begin{aligned}V(x,y,z)&=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{x+\mathrm{i}z\cos t}{x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z}G(t)\,\mathrm{d}t,\\ V(x,y,z)&=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{y+\mathrm{i}z\sin t}{x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z}G(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{12}$$

которые, как легко убедиться, при произвольных функциях $G(t)$ также порождают однородные гармонические функции нулевого порядка. Сравнение с формулой Донкина (5) показывает, что и здесь формулы (12) сводятся к неким интегральным выражениям, которые позволяют описывать произвольные функции $F(p,q)$, гармонические внутри круга $p^2+q^2<1$, с помощью интеграла по границе круга. Вся разница заключается в конкретном виде интегрального ядра, конструируемого как суперпозиция касательной производной для потенциала простого слоя, потенциала двойного слоя и константы. Дифференцирование первой из формул (12) по y, а второй по x приводит к новым выражениям для гармонических однородных функций с целочисленным порядком однородности, которые схожи с формулами (9).

Сравнение формул (4), (11) и (12) наводит на мысль исследовать формулу

$$V(x,y,z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{G(t)\,\mathrm{d}t}{x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z}, \tag{13}$$

которая (предположительно) обеспечивает параметризацию однородных гармонических функций порядка $k=-1$. Рассматриваемая формула совпадает с формулой Уиттекера (2) для $n=-1$, однако явная неполнота формулы Уиттекера при натуральных порядках однородности [12] заставляет с подозрительностью относиться к гипотезе об ее эффективности при других значениях n. Здесь полезным подспорьем служит то, что для однородных гармонических функций порядка $k=-1$ справедлива алгебраическая формула, являющаяся аналогом формулы Донкина (5) [15, 22, 33]:

$$V(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\times$$
$$\times F\left(\frac{x}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \tag{14}$$

где $F(p,q)$ — произвольная функция, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа $\partial^2F/\partial p^2+\partial^2F/\partial q^2=0$ (доказательство универсальности формулы (14) аналогично доказательству универсальности формулы (5)). Если приравнять формулы (13) и (14) и сделать замену $x=\dfrac{2x'z'}{1-x'^2-y'^2}$, $y=\dfrac{2y'z'}{1-x'^2-y'^2}$, $z=z'$, получим соотношение

$$F(x'+\mathrm{i}y')=$$
$$=-\mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+x'^2+y'^2}{\left(1-x'^2-y'^2\right)-2\mathrm{i}\left(x'\cos t+y'\sin t\right)}G(t)\,\mathrm{d}t,$$

которое после подстановки $x'=-\mathrm{i}r\cos\phi$, $y'=-\mathrm{i}r\sin\phi$ приобретает вид

$$F(r,\phi)=U(r,\phi)+\mathrm{i}V(r,\phi)=$$
$$=-\mathrm{i}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(\phi-t)+1}G(t)\,\mathrm{d}t.$$

С точностью до обозначений эта формула совпадает с интегралом Пуассона (10), устанавливающего связь между функцией, гармонической внутри круга радиуса $R=1$, и значением этой функции на границе круга. Поэтому множество однородных гармонических функций, описываемых формулой (13), и множество однородных гармонических функций (14), которые получаются, когда функции $F(p,q)$ не имеют особых точек внутри круга $p^2+q^2<1$, совпадают между собой. В частности, это позволяет упростить формулы (9).

А. При любом натуральном $k>0$ выражение

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{G(t)\,\mathrm{d}t}{\left(x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z\right)^k} \tag{15}$$

задает однородные гармонические функции с отрицательным порядком однородности, равным $(-k)$.

Б. При любом натуральном $k>0$ выражение

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{2k+1}G(t)\,\mathrm{d}t}{\left(x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z\right)^{k+1}} \tag{16}$$

задает однородные гармонические функций с положительным порядком однородности, равным k.

В. Любое из выражений

$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{x\sin t-y\cos t}{x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z}G(t)\,\mathrm{d}t,\\ \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z}G(t)\,\mathrm{d}t,\\ \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{x+\mathrm{i}z\cos t}{x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z}G(t)\,\mathrm{d}t,\\ \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{y+\mathrm{i}z\sin t}{x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z}G(t)\,\mathrm{d}t\end{gathered} \tag{17}$$

может с одинаковой степенью общности использоваться для задания однородных гармонических функций нулевого порядка.

ФОРМУЛЫ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К сожалению, не только формула Уиттекера (2) для однородных гармонических функций оказывается ущербной, но и формула Уиттекера (3) не обеспечивает полного перебора однородных гармонических функций нулевого порядка. Как следствие, приведенные выше формулы не обеспечивают полного перебора однородных гармонических функций с целочисленными порядками однородности. Действительно, в формуле Донкина

(5) могут использоваться в том числе и те гармонические функции $F(p,q)$, которые имеют особенности внутри круга $p^2+q^2<1$. Наличие особенностей у функций $F(p,q)$ (в виде изолированных точек или в виде непрерывных линий) не мешает получать на их основе однородные гармонические функции нулевого порядка. Однако потенциал простого слоя (8), как и интеграл Пуассона (10) или иные интегральные формулы для задачи Дирихле с границей в виде окружности $p^2+q^2=1$, не могут применяться для описания гармонических функций с особыми точками внутри круга $p^2+q^2<1$. Поэтому однородные гармонические функции нулевого порядка, задаваемые с помощью формул (3), (4), (11), (12), имеют лишь те особенности в начале координат и/или вдоль прямых линий и плоскостей, проходящих через начало координат, которые связаны с особенностями аргументов

$$p=\frac{x}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ q=\frac{y}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

но не с особенностями функции $F(p,q)$.

Реальное же разнообразие особых точек у однородных гармонических функций, как легко понять, будет много шире. Поэтому формулы (3), (4), (11), (12), (13), а также выводимые из них формулы вида (9) *не обеспечивают* исчерпывающего перебора имеющихся в природе однородных гармонических функций. Следует, правда, отметить, что, несмотря на указанную неполноту полученных формул, этот результат будет все же более утешительным, чем формула Уиттекера (2). При этом алгебраическая формула Донкина (5) и выводимые из нее алгебраически-дифференциальные формулы [22, 33] для функций с целочисленными порядками однородности работают безупречно.

То же самое касается вопроса о том, все ли однородные гармонические функции целочисленного порядка могут быть получены из соотношений (9) и родственных им формул при надлежащем выборе функций $G(t)$. Очевидно, что степень универсальности у формул (9) такая же, что и у формулы (4). Так что с их помощью можно получить те и только те однородные гармонические функции, которые не имеют других особенностей, кроме естественных особенностей в начале координат, вытекающих из формулы Донкина (5) при подстановке в нее функций $F(p,q)$, регулярных в круге $p^2+q^2<1$. Никаких других однородных гармонических функций с более разнообразными особыми точками из этих формул получить нельзя ни при каком выборе функций $G(t)$.

Пусть функция $F(p,q)$ не имеет внутри круга $p^2+q^2<1$ особых точек, кроме начала координат $p=q=0$. Окружим начало координат окружностью радиуса $R_\varepsilon \ll 1$ и воспользуемся тем, что решение внешней задачи Дирихле для этой окружности может быть записано с помощью интеграла Пуассона [40–42]

$$\begin{gathered}W(\rho,\phi)=\\ =\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^2-R_\varepsilon^2}{R_\varepsilon^2-2R_\varepsilon\rho\cos(\phi-\alpha)+\rho^2}w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\ \text{при}\quad \rho>R_\varepsilon,\end{gathered} \tag{18}$$

где $w(\phi)$ — известное значение потенциала $W(\rho,\phi)$ на внешней границе круга $\rho=R_\varepsilon$, $0\le\phi\le 2\pi$. В конечном счете решение задачи Дирихле в кольце $R_\varepsilon<\rho<R$ в самом общем виде может быть записано как [43]

$$\begin{gathered}F(\rho,\phi)=U(\rho,\phi)+W(\rho,\phi)+C\cdot H(\rho,\phi)\\ \text{при}\quad R_\varepsilon<\rho<R,\end{gathered} \tag{19}$$

где $U(\rho,\phi)$ определяется по формуле (10), $W(\rho,\phi)$ определяется по формуле (18), $H(\rho,\phi)\equiv\log\rho$, $u(\phi)$ и $w(\phi)$ — свободно варьируемые функции, C — свободная константа. После подстановки $R=1$, $R_\varepsilon=\varepsilon$, $\rho=\mathrm{i}\sqrt{p^2+q^2}$, $\cos\phi=p/\sqrt{p^2+q^2}$, $\sin\phi=q/\sqrt{p^2+q^2}$, $p=$ $=x/(z+r)$, $q=y/(z+r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ формула (19) приобретает вид

$$\begin{gathered}U(\rho,\phi)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x\cos t+y\sin t+\mathrm{i}z}u(t)\,\mathrm{d}t,\\ W(\rho,\phi)=\\ =\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(1+\varepsilon^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\left(1-\varepsilon^2\right)z}{\Xi}w(t)\,\mathrm{d}t,\\ H(\rho,\phi)=\log\left(\frac{x+\mathrm{i}y}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\end{gathered} \tag{20, a}$$

где $\Xi=2\varepsilon(x\cos t+y\sin t)+\mathrm{i}\left(1+\varepsilon^2\right)z-$ $-\mathrm{i}\left(1-\varepsilon^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Первая из этих функций совпадает с (11), одной из разновидностей формулы Уиттекера. Остальные являются сингулярными добавками и с помощью канонических формул Уиттекера (3), (4) или их аналогов (19, 20) не могут быть описаны. Если нет желания использовать комплексную запись, то вещественная замена $R=1$, $R_\varepsilon=\varepsilon$, $\rho=\sqrt{p^2+q^2}$, $\cos\phi=p\big/\sqrt{p^2+q^2}$, $\sin\phi= =q\big/\sqrt{p^2+q^2}$, $p=x/(z+r)$, $q=y/(z+r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ обеспечит нам более практичные чисто вещественные формулы:

$$U(\rho,\phi)=\int_0^{2\pi}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x\cos t-y\sin t}u(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$W(\rho,\phi)=\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-\varepsilon^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}-2\varepsilon^2 z}{\left(1+\varepsilon^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}-2\varepsilon\left(x\cos t+y\sin t\right)-\left(1-\varepsilon^2\right)z}w(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (20,\ б)$$
$$H(\rho,\phi)=\log\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}\right).$$

Следует, в частности, обратить внимание, что формула для $U(\rho,\phi)$ *не является* вещественной или мнимой частью одной из формул (4), (11), (12).

Строго говоря, итоговая форма не должна зависеть от параметра ε. Поскольку гармоническая функция $F(\rho,\phi)$ не имеет других особых точек, кроме начала координат, радиус ε может быть выбран сколь угодно малым. При этом для каждого фиксированного значения $\varepsilon>0$ значения свободных функций и свободных констант в (20, а) и (20, б) должны быть, вообще говоря, различными, чтобы обеспечить выполнение равенства (19) для заданной (фиксированной) функции $F(\rho,\phi)$. Но когда $\varepsilon\to 0$, все свободные параметры, кроме $w(\phi)$, стремятся к конечному пределу, а $w(\phi)$ ведет себя сингулярным образом. Представим свободный параметр $w(\phi)$ как $w(\phi,\varepsilon)\approx w_0(\phi)+w_1(\phi)/\varepsilon+w_2(\phi)/\varepsilon^2+\cdots$, подставим в (20, б) и устремим ε к нулю. Тогда функция $W(\rho,\phi)$ принимает вид:

$$W(\rho,\phi)=\int_0^{2\pi}w_0(t)\,\mathrm{d}t+\frac{x}{r-z}\int_0^{2\pi}w_1(t)\cos t\,\mathrm{d}t+$$
$$+\frac{y}{r-z}\int_0^{2\pi}w_1(t)\sin t\,\mathrm{d}t+\frac{x^2-y^2}{(r-z)^2}\int_0^{2\pi}w_2(t)\cos 2t\,\mathrm{d}t+$$
$$+\frac{2xy}{(r-z)^2}\int_0^{2\pi}w_2(t)\sin 2t\,\mathrm{d}t+\frac{x^3-3xy^2}{(r-z)^3}\int_0^{2\pi}w_3(t)\cos 3t\,\mathrm{d}t+$$
$$+\frac{3x^2y-y^3}{(r-z)^3}\int_0^{2\pi}w_3(t)\sin 3t\,\mathrm{d}t+\cdots,$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

где, как легко видеть, существенны только коэффициенты Фурье $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}w_k(t)\cos kt\,\mathrm{d}t$ и $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}w_k(t)\sin kt\,\mathrm{d}t$, а не сами свободные функции $w_k(\phi)$.

Этот результат можно получить проще, если учесть, что гармоническая функция $F(p,q)$, регулярная в кольце $\varepsilon^2<p^2+q^2<1$ и подставляемая в формулу Донкина (5), может быть представлена как [43]

$$F(p,q)=C\log\sqrt{p^2+q^2}+\mathrm{Re}\,\Phi(p+\mathrm{i}q),$$

где аналитическая функция комплексного переменного $\Phi(p+\mathrm{i}q)$ может быть разложена в рассматриваемой нами области в ряд Лорана [40–42]:

$$\Phi(p+\mathrm{i}q)=\sum_{k=1}^{\infty}s_k\frac{\exp(\mathrm{i}k\phi)}{\rho^k}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\rho^k\exp(\mathrm{i}k\phi),$$
$$\rho=\sqrt{p^2+q^2},\ \phi=\mathrm{Arg}(p,q).$$

Компонента $\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \exp(\mathrm{i}k\phi)$ является регулярной в круге $p^2+q^2<1$ и, следовательно, после донкиновской подстановки $p=x/(z+r)$, $q=y/(z+r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ превращается в однородную гармоническую функцию нулевого порядка, которую можно выразить с помощью интегральных формул Уиттекера (3), (4) или их аналогов (11), (12). Логарифм же $C\log\sqrt{p^2+q^2}$ и элементарные сингулярные члены вида $s_k \exp(\mathrm{i}k\phi)/\rho^k$ могут быть подставлены непосредственно в формулу Донкина (5). Это дает нам список из эталонных изолированных сингулярностей в начале координат, представленный в виде элементарных гармонических функций нулевого порядка. Такие эталонные функции можно с произвольными весами прибавлять к "обычной" однородной гармонической функции нулевого порядка, которая выражается с помощью интегральных формул (3), (4), (11), (12).

Очевидно, что особенности, связанные с точкой $p=q=0$, не единственные, которые могут обнаружиться у гармонической функции $F(p,q)$ внутри круга $p^2+q^2<1$. В простом случае мы имеем набор изолированных особых точек с координатами $p=p_j$, $q=q_j$ и эталонные гармонические особенности аналогичного типа, связанные с такими точками:

$$\begin{aligned}
&\Phi_j(p+\mathrm{i}q)=C_j\log\rho_j+\sum_{k=1}^{\infty}s_{kj}\frac{\exp(\mathrm{i}k\phi_j)}{\rho_j^k},\\
&\rho_j=\sqrt{(p-p_j)^2+(q-q_j)^2},\\
&\phi_j=\operatorname{Arg}(p-p_j,q-q_j).
\end{aligned} \tag{21}$$

Подстановка этих гармонических функций в формулу Донкина (5) дает дополнительные наборы однородных гармонических функций нулевого порядка, которые можно прибавлять к "обычным" однородным гармоническим функциям нулевого порядка, выражаемым с помощью интегральных формул Уиттекера (3), (4), (11), (12).

Более интересен случай, когда особые точки функции $F(p,q)$ образуют непрерывные отрезки кривых типа бесконечно тонкого разреза. Из результатов монографии [44] следует, что эталонные сингулярности для функции $F(p,q)$, связанные с такими кривыми Γ_j, могут быть представлены как

$$\begin{aligned}
&\Phi_j(p,q)=\\
&=C_j\int_{\Gamma_j}\sigma_j(s)\log\sqrt{\left(p-p_j(s)\right)^2+\left(q-q_j(s)\right)^2}\,\mathrm{d}s+\\
&+\int_{\Gamma_j}A_j(s)\frac{p_j'(s)\left(p-p_j(s)\right)+q_j'(s)\left(q-q_j(s)\right)}{\left(p-p_j(s)\right)^2+\left(q-q_j(s)\right)^2}\mathrm{d}s+\\
&+\int_{\Gamma_j}B_j(s)\frac{p_j'(s)\left(q-q_j(s)\right)-q_j'(s)\left(p-p_j(s)\right)}{\left(p-p_j(s)\right)^2+\left(q-q_j(s)\right)^2}\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{22}$$

где $p=p_j(s), q=q_j(s)$ — параметрическое представление кривой Γ_j на комплексной плоскости $p+\mathrm{i}q$; $p_j'(s)$ и $q_j'(s)$ — производные функций $p_j(s)$ и $q_j(s)$; $\sigma_j(s)$ — произвольная фиксированная функция, заданная вдоль кривой Γ_j и удовлетворяющая условию $\int_{\Gamma_j}\sigma_j(s)\mathrm{d}s\neq 0$; C_j — константа, определяющая асимптотическое поведение функции $F(p,q)$ вдали от кривой Γ_j; $A_j(s)$ — функция, заданная вдоль кривой Γ_j, которая характеризует полусумму предельных значений функции $F(p,q)$ справа и слева от кривой; $B_j(s)$ — функция, заданная вдоль кривой Γ_j, которая характеризует скачок предельных значений функции $F(p,q)$ справа и слева от кривой. Ядро интеграла с участием функции $A_j(s)$ представляет собой касательную производную от ядра, соответствующего потенциалу простого слоя, т. е. модифицированный потенциал простого слоя [34, 35, 44]. Ядро интеграла с участием функции $B_j(s)$ представляет собой нормальную производную от ядра, соответствующего потенциалу простого слоя, т. е. потенциал двойного слоя [34, 35, 44]. Свойства гармонических функций вида (22) подробно исследуются в монографии [44].

Константа C_j и функции $A_j(s)$, $B_j(s)$ в формуле (22) являются свободными параметрами. Для того чтобы на концах кривой отсутствовали изолированные особые точки, необходимо и достаточно, чтобы на концах кривой Γ_j функции $A_j(s)$ и $B_j(s)$ обращались в ноль. Как только свободные параметры заданы, с помощью формулы (22) можно вычислить соответствующую им гармоническую функцию $F(p,q)$ с особыми точками в виде кривой Γ_j. При разных значениях свободных параметров будут получаться разные гармонические функции $F(p,q)$. Если же подставить выражение (22) в формулу Донкина (5), то это позволит определить новые сингулярные гармонические добавки, отсутствующие у "обычных" однородных гармонических функций нулевого порядка, выражаемых с помощью интегральных формул (3), (4), (11), (12). Как легко видеть, эти добавки будут иметь вид интегральных формул, интегрирующих вдоль кривой Γ_j произвольно заданные плотности распределения $A_j(s)$ и $B_j(s)$, умноженные на соответствующие фиксированные интегральные ядра. Существенно, что такие однородные гармонические функции нулевого порядка с помощью формул (3), (4), (11), (12) выражены быть не могут.

Условием применимости формулы (22) является то, что при приближении к кривой Γ_j справа и слева у функции $F(p,q)$ имеются конечные пределы (точнее, предельные значения вдоль кривой оказываются абсолютно интегрируемой функцией). Если предельные значения функции $F(p,q)$ в отдельных точках ведут себя сингулярным образом, то, по-видимому, это означает, что на той же кривой присутствуют изолированные особые точки. Особенности, связанные с такими точками, описываются с помощью уже известных нам формул (21). Случай же, когда *вся* кривая Γ_j состоит из особых точек высокого порядка, выпадает из рассмотренной теории. По-видимому, полноценное описание таких функций требует добавления к формуле (22) дополнительных интегральных членов, ядра которых представляют собой нормальные производные от потенциала простого слоя старших порядков. Насколько известно авторам, в настоящий момент теория соответствующих гармонических функций разработана не слишком глубоко.

Таким образом, добавляя новые эталонные гармонические функции с сингулярным поведением к уже имеющимся однородным гармоническим функциям нулевого порядка, описываемым интегральными формулами Уиттекера (3), (4), (11), (12), можно получить расширенную теорию однородных гармонических функций нулевого порядка. С помощью теоремы о дифференцировании однородных гармонических функций и формулы Томсона из расширенной теории однородных гармонических функций нулевого порядка можно вывести расширенную теорию однородных гармонических функций с целочисленными порядками однородности, степень общности которой будет соответствовать общности теории однородных гармонических функций нулевого порядка. Однако вполне возможно, что далеко не все получаемые таким образом электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру, будут представлять практический интерес для оптики заряженных частиц, поскольку сингулярное поведение гармонических функций, как правило, сопровождается сингулярной же структурой электродов, создающих соответствующие электрические и магнитные поля.

НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ КЛАССИФИКАЦИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ДОНКИНА

Из доказательства общей формулы Уиттекера в [12, 13] следует, что единственная однородная гармоническая функция нулевого порядка, не имеющая особенностей в начале координат — это константа. Более того, из свойства однородности следует, что если у однородной функции точка, отличная от начала координат, является особой, то и весь луч, соединяющий эту точку с началом координат, будет состоять из плотно расположенных особых точек. Тем самым во многих случаях начало координат становится не просто особой точкой, но центром сгущения особых точек исследуемых однородных гармонических функций.

Рассмотренное выше разбиение однородных гармонических функций на "обычные", особенности которых связаны с особенностями "донкиновской" подстановки $p = x\Big/\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, $q = y\Big/\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, и "специальные", особенности которых связаны с особенностями гармонической функции $F(p,q)$, используемой в формуле (5), достаточно условно. Такая классификация была бы оправдана, если бы формула Донкина (5) была уникальной. Однако это не так. Очевидно, что универсальными свойствами формулы (5) будет обладать также любая формула вида $F(\tilde{p},\tilde{q}) = F\big(f(p,q), g(p,q)\big)$, где $\tilde{p}(x,y,z) = f(p,q)$ и $\tilde{q}(x,y,z) = g(p,q)$ — функции, полученные в результате применения конформной замены переменных $\{f(p,q), g(p,q)\}$ к донкиновской подстановке

$$p = x\Big/\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),$$
$$q = y\Big/\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Понятно, что все эти формулы будут равносильны друг другу из-за обратимости конформных преобразований координат. Немногим сложнее показать, что *любые* алгебраические формулы типа Донкина могут быть выведены из формулы (5) с помощью подходящим образом подобранной конформной замены переменных $\{f,g\}$ [22].

Однако конформность замены переменных $\{f,g\}$ играет в данном случае второстепенную роль. Легко проверить, что для того, чтобы формула вида $F\left(f(p,q),g(p,q)\right)$ для всех двумерных гармонических функций F порождала трехмерную однородную гармоническую функцию нулевого порядка, требуется, чтобы были выполнены соотношения $f_p^2+f_q^2=g_p^2+g_q^2$, $f_p g_p+f_q g_q=0$. Отсюда сразу следует, что должны быть выполнены соотношения Коши—Римана $f_p=g_q, f_q=-g_p$ либо $f_p=-g_q, f_q=g_p$. Однако, например, ни отсутствие у подстановки $\{f,g\}$ особых точек внутри круга $p^2+q^2<1$, ни взаимная однозначность подстановки $\tilde{p}=f(p,q),\tilde{q}=g(p,q)$ для работоспособности формулы $F\left(f(p,q),g(p,q)\right)$, отнюдь, не требуются. Поэтому после перехода от одной формулы к другой у аргументов $f(p,q)$ и $g(p,q)$ особые точки могут как появляться, так и исчезать.

Рассмотрим, например, формулу

$$V(x,y,z)=\\
=F\left(\log\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right), \qquad (23)$$

которая, как легко проверить, также создает из двумерных гармонических функций $F(p,q)$ трехмерные однородные гармонические функции нулевого порядка и работает ничуть не хуже, чем формула (5). Эта формула получается из (5) с помощью конформной замены переменных $\tilde{p}=\log\sqrt{p^2+q^2}$, $\tilde{q}=\operatorname{arctg}(p/q)$. Как легко видеть, структуры аргументов у формулы (5) и у формулы (23) различны: для формулы (5) особыми точками являются точки луча $x=y=0, z\le 0$, а для формулы (23) такими точками является вся прямая $x=y=0$. Поэтому некоторые однородные гармонические функции нулевого порядка, которые будут "специальными" с точки зрения формулы (5), окажутся "обычными" для формулы (23).

Конечно, можно сконструировать и обратный пример, когда некоторые функции, являющиеся "специальными" для новой формулы, окажутся "обычными" с точки зрения формулы (5). Наконец, возможен вариант, когда классы "обычных" однородных функций для двух формул вообще никак не пересекаются (примером является подстановка

$$p=x\Big/\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z\right),\; q=y\Big/\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z\right),$$

возникающая как результат конформной замены переменных $\tilde{p}=p\big/\left(p^2+q^2\right)$, $\tilde{q}=q\big/\left(p^2+q^2\right)$). При этом в связи с тем, что, вообще говоря, любая точка "донкиновского" круга $p^2+q^2<1$ может оказаться особенной для аргументов какой-либо формулы Донкина, полученной после конформной подстановки, то не существует универсальной алгебраической формулы, объединяющей в единое целое особенности всех аргументов всех алгебраических формул. Впрочем, не существует не только объединения всех возможных формул, но и пересечения всех возможных формул, т. е. алгебраической формулы типа Донкина, у аргументов которой имеется только одна особая точка в начале координат (см. Приложение).

СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗНООБРАЗИЕМ ФОРМУЛ УИТТЕКЕРА И РАЗНООБРАЗИЕМ ФОРМУЛ ДОНКИНА

Из любой алгебраической формулы типа Донкина получаются соответствующие ей вещественные и комплексные интегральные формулы типа Уиттекера, причем это соответствие может быть сделано взаимнооднозначным. Возьмем любую формулу $F\left(f(p,q),g(p,q)\right)$, где $p=\\=x\Big/\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, $q=y\Big/\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, а $\tilde{p}=f(p,q)$ и $\tilde{q}=g(p,q)$ — фиксированная конформная замена переменных. Используем интеграл Пуассона (10), или интеграл модифицированного потенциала простого слоя (8), или интеграл простого слоя [34, 35], или интеграл двойного слоя [34, 35] для того, чтобы описать в виде интегральной формулы класс гармонических функций $F(p,q)$ без особенностей в круге $p^2+q^2<1$ (тем более, что нет никакой необходимости ограничиваться задачей Дирихле именно для круга). Скомбинировав эти две формулы, получим на выходе очередную интегральную формулу типа Уиттекера для гармонических однородных функций нулевого порядка в комплексной или же в чисто вещественной форме в зависимости от использованной подстановки. В результате на выходе будут получаться выражения, не слишком похожие на прародителей, но обладающие точно такой же универсальностью.

Действительно, есть множество интегральных ядер, обеспечивающих представление в интегральной форме полного набора гармонических функций $F(p,q)$, не имеющих особенностей внутри круга $p^2+q^2<1$. В частности, такими ядрами будут линейные комбинации приведенных классических интегральных ядер с произвольными коэффициентами, зависящих от переменной t. Конечно, все получаемые на выходе интегральные формулы, будут в конечном счете эквивалентны друг другу, но зачастую эта эквивалентность будет весьма неявной. В частности, если взять какое-либо обратимое интегральное уравнение первого рода [45], выразить с его помощью подставляемую в интегральную формулу произвольную функцию и изменить порядок интегрирования, мы всегда получим "новую" интегральную формулу типа Уиттекера, совершенно не похожую на прародителя, но полностью ему эквивалентную.

В силу этого формулы Уиттекера (3), (4), (11), (12) не могут служить сколько-нибудь весомым аргументом в пользу преимущества формулы (5) по сравнению с другими алгебраическими формулами типа Донкина. Разнообразие возможных интегральных формул типа Уиттекера оказывается ничуть не меньше разнообразия возможных алгебраических формул. На этом бесконечном фоне изначальные формулы Уиттекера (3), (4), (11), (12), по всей видимости, не будут иметь каких-либо заметных преимуществ.

Само по себе разнообразие интегральных формул не является криминалом, если бы они приводили к одному и тому же результату. Но разные алгебраические формулы, характеризуемые разными особенностями своих аргументов, при подстановке в них гармонических функций без особенностей (т. е. неполного подмножества всех возможных гармонических функций) будут порождать на выходе разные подмножества полного семейства трехмерных однородных гармонических функций нулевого порядка.

Соответственно, хотя получаемые из разных алгебраических формул интегральные формулы на каком-то подмножестве однородных гармонических функций, вероятно, будут пересекаться, но при этом также найдутся однородные гармонические функции, генерируемые первой формулой и не генерируемые второй формулой, и наоборот. В такой ситуации выбор какой-то одной интегральной формулы для поиска оптимального электрического поля у исследуемой электронно-оптической системы эйлеровского типа означает априорный волюнтаристский отказ от рассмотрения каких-то электрических полей, при этом не вполне представляется, от каких именно электрических полей мы отказываемся (тем более, что такие выпадающие из поля зрения поля будут разными для разных интегральных формул).

Как и в случае алгебраических формул типа Донкина, у объединенной совокупности интегральных формул типа Уиттекера не может быть ни такой формулы, частными случаями которой являются все остальные, ни такой формулы, которая включена во все остальные. При переходе от формулы к формуле мы будем присоединять какие-то новые электрические поля, но при этом будем отбрасывать и какие-то прежние электрические поля. Исключением являются случаи, когда несколько формул типа Уиттекера выводятся с помощью эквивалентных интегральных ядер из одной и той же алгебраической формулы или же из нескольких алгебраических формул с однотипными особыми точками для аргументов. Такие формулы будут порождать идентичные наборы однородных гармонических функций нулевого порядка, хотя, вероятно, с помощью разных формул одна и та же функция будет получаться при разном выборе свободных функций $G(t)$.

ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ НЕПОЛНОТА ФОРМУЛ ТИПА УИТТЕКЕРА

Отметим следующий момент, для которого в настоящее время конструктивное решение авторам не известно. Вообще говоря, если выбрать некоторую точку, в окрестности которой функция удовлетворяет уравнению Лапласа (двумерному или трехмерному), то из этого "ростка" с помощью процедуры аналитического продолжения можно восстановить всю функцию во всем пространстве, включая и все ее сингулярные точки. Тем самым искусственное выделение эталонных особенностей и добавление таких гармонических функций к решениям, получаемым с помощью рассмотренных выше формул типа Уиттекера, должно быть избыточной процедурой.

Иными словами, должна существовать универсальная формула для однородных гармонических функций с заданным порядком однородности, для которой сингулярные решения должны являться частными случаями, автоматически входящими в общий список решений. С другой стороны, любая интегральная формула вида

$$V(x,y,z)=\int_a^b f(\phi)K(x,y,z,\phi)\,\mathrm{d}\phi \qquad (24)$$

может содержать только те сингулярные точки, которые уже присутствуют в ядре $K(x,y,z,\phi)$, и дополнительные сингулярные точки, связанные с сингулярностями функции $f(\phi)$, положением которых в трехмерном пространстве мы может управлять весьма условно.

Действительно, сингулярные точки, привнесенные конкретным видом функции $f(\phi)$ в формуле (24), оказываются всегда локализованы на некоторой геометрической границе, которая от функции $f(\phi)$ уже никак не зависит. Технически такая граница соответствует в пространстве точек x, y, z процедуре интегрирования по переменной ϕ, — т. е. она состоит из тех точек x, y, z, для которых ядро $K(x, y, z, \phi)$ при определенных значениях параметра ϕ становится сингулярным, хотя эта сингулярность и будет интегрируемой. Наличие же у функции $f(\phi)$ в той же точке дополнительной интегрируемой сингулярности приводит к тому, что суммарная сингулярность перестает быть интегрируемой и тем самым в рассматриваемой точке x, y, z для выражения (24) образуется сингулярная точка, вообще говоря, самому интегральному ядру $K(x, y, z, \phi)$ не свойственная. Как легко понять, положение в трехмерном пространстве подобных (потенциально сингулярных) точек x, y, z действительно не зависит от функции $f(\phi)$, а целиком определяется свойствами ядра $K(x, y, z, \phi)$.

Проблема состоит в том, что описанная выше геометрическая граница, где локализуются возможные сингулярные точки функции $V(x, y, z)$, порождаемые сингулярностями подынтегральной функции $f(\phi)$, жестко фиксирована в геометрическом пространстве точек x, y, z при фиксации формулы (24) и составляет малую долю всего трехмерного пространства. Например, для рассмотренных в этой статье формул типа Уиттекера эта геометрическая граница будет образом условной окружности или иной двумерной кривой, вдоль которой рассматривается интеграл типа Пуассона, определяющий вспомогательную гармоническую функцию двух переменных для формулы типа Донкина. У интегральной формулы для гармонических функций с нецелочисленными порядками однородности из работы [23] такой границей служит плоскость $z = 0$. В результате отмеченная ранее характерная черта подобных формул, что однородные гармонические функции с особенностями, лежащими вне фиксированных геометрических границ и не совпадающими с особенностями, присущими интегральному ядру $K(x, y, z, \phi)$, выпадают из класса функций, описываемых интегральной формулой типа (24), является типичной и неустранимой. В частности, это означает, что интегральные формулы [23] для гармонических функций с нецелочисленными порядками однородности будут в реальности вовсе не настолько универсальными, как это изначально предполагалось (функции, имеющие сингулярные точки за пределами плоскости $z = 0$, с их помощью не могут быть описаны).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для целочисленных порядков однородности задача перечисления всех существующих однородных гармонических функций имеет полное и окончательное решение [22, 31–33]. Поэтому применение интегральных формул Уиттекера и их разнообразных модификаций для целочисленных порядков однородности выглядит излишеством (особенно с учетом принципиальной неполноты таких формул). Однако, вопрос об эффективном представлении однородных гармонических функций с нецелочисленными порядками однородности сохраняет свою актуальность. И здесь интегральные формулы Уиттекера с нецелочисленными порядками однородности могут оказаться полезным инструментом.

Конечно, нет никакой гарантии, что такие интегральные формулы обеспечат полный перебор однородных гармонических функций с нецелочисленными порядками однородности. Точнее, с учетом приведенных выше рассуждений о геометрии особых точек заведомо известно, что указанные интегральные формулы будут описывать лишь некоторое подмножество из всего разнообразия имеющихся однородных гармонических функций с нецелочисленными порядками однородности, и эти недостатки являются типичными и неустранимыми. Однако если (поскольку) такое подмножество не является чрезмерно узким, в нашем распоряжении оказывается вполне эффективный инструмент для синтеза электронно- и ионно-оптических систем с электростатическими и магнитостатическими полями, однородными по Эйлеру, которым не стоит пренебрегать в случае отсутствия более надежных и эффективных инструментов.

К сожалению, в целом нельзя сказать, что на настоящий момент для проблемы вывода универсальных интегральных формул и для тесно связанной с ней проблемы классификации однородных гармонических функций (в частности, гармонических однородных функций нулевого порядка) и их особенностей удалось найти исчерпывающее и удовлетворяющее всех решение. Возможно, другие исследователи будут удачливее в этом отношении.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В разделе "Неоднозначность классификации особых точек с помощью формул Донкина" высказано утверждение, что не существует алгебраической формулы типа Донкина, у аргументов которой имеется только одна особая точка в начале координат. В данном приложении этот тезис строго доказывается.

Действительно, существование такой формулы означало бы существование однородной гармонической функции нулевого порядка, у которой единственными особыми точками были бы начало координат и бесконечность. Но однородная функция нулевого порядка принимает одно и то же значение для всех точек $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$, где $\lambda \in (0, +\infty)$, (x_0, y_0, z_0) — фиксированная точка сферы $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$. Поэтому ее максимум и ее минимум на сфере $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ и есть глобальные максимум и минимум во всем пространстве (гармоническая функция оказывается глобально ограниченной).

Конечно, здесь можно было бы воспользоваться теоремой Лиувилля, что гармоническая функция, ограниченная во всем пространстве, обязана быть константой [40–42]. Но в начале координат наша функция может и не удовлетворять уравнению Лапласа, тогда как в теореме Лиувилля функция обязана быть гармоничной во всех точках, включая ноль и бесконечность. Поэтому воспользуемся тем фактом, что значение гармонической функции в центре любой сферы, когда сфера не содержит особых точек (в нашем случае — не охватывает начало координат), совпадает со средним значением функции по поверхности сферы [38]. Взяв в качестве центра любую точку глобального максимума на сфере $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, мы получим, что ни в одной точке построенной вокруг нее вспомогательной сферы с радиусом меньше единицы значение функции не может опуститься ниже своего максимума (из-за отсутствия других особых точек функция на сфере по крайней мере непрерывна, и наличие такой точки сразу бы повлекло за собой, что среднее значение функции меньше максимума). Такими перекрывающимися между собой "нашлепками" с фиксированным радиусом и постепенно перемещающимися центрами, в пределах каждой из которых функция равна глобальному максимуму, можно покрыть всю сферу $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$. Значит, рассматриваемая нами однородная гармоническая функция нулевого порядка обязана быть константой во всех точках сферы $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ и, следовательно, и во всем пространстве. Это противоречит предположению, что начало координат — особая точка.

Благодарность

Данная работа стимулировалась публикацией [30] и в определенных аспектах является ее дополнением и продолжением. Авторы выражают свою глубокую признательность ее создателю и своему учителю Юрию Константиновичу Голикову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Москва: Физматлит, 2001. 616 с.
2. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. Москва: Наука, 1974. 480 с.
3. *Голиков Ю.К.* Псевдооднородные электростатические поля с заданными электронно-оптическими характеристиками // Труды ЛПИ. 1983. № 397. С. 82–85.
4. *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.* Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 2. С. 91–94.
5. *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.* Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 3. С. 44–47.
6. *Голиков* Ю.К., *Краснова* Н.К. Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007, № 2. С. 5–11.
7. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.
8. *Краснова Н.К.* Двумерные степенные электронные спектрографы с плоскостью симметрии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 6. С. 97–103.
9. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики 2011, Т. 81, № 2. С. 9–15.
10. *Краснова Н.К.* Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 2013. 259 с.
11. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 1. С. 50–58. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/abst1.php#abst6.
12. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Анализ интегральной формулы Уиттекера общего вида для электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 4. С. 63–71. URL: http://213.170.69.26/mag/2017/abst4.php#abst8.
13. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. Часть 2: Трансцендентные функции. Москва: ГИФМЛ, 1963. 516 с.
14. *Аверин И.А.* Электростатические и магнитостатические электронные спектрографы с однородными по

Эйлеру потенциалами, характеризуемыми нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 3. С. 35–44. URL: http://213.170.69.26/mag/2015/abst3.php#abst5.
15. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Простейшие аналитические электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. С. 17–32.
16. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. С. 147–165.
17. *Аверин И.А., Бердников А.С.* Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 5–8.
18. *Бердников А.С., Аверин И.А.* Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 89–95.
19. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12, № 4. С. 272–281.
20. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 11–20.
21. *Бердников А.С., Аверин И.А.* О невозможности двойной фокусировки в комбинированных электрических и магнитных полях, однородных по Эйлеру // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 62–65.
22. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 13–30. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/abst4.php#abst2.
23. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Интегральные формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 31–42.
URL: http://213.170.69.26/mag/2016/abst4.php#abst3.
24. *Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.* Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, вып. 3. С. 39–43.
25. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Квазиполиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физические и математические науки. 2017. Т. 10, № 1. С. 71–80.
26. *Краснова Н.К., Бердников А.С., Соловьев К.В., Аверин И.А.* О квазиполиномиальных трехмерных потенциалах электрических и магнитных полей // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физические и математические науки. 2017. Т. 10, № 1. С. 81–92.
27. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Об однородности скалярных и векторных потенциалов у электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5, № 1. С. 10–27.
28. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Теорема о дифференцировании и интегрировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 3. С. 107–119.
URL: http://213.170.69.26/mag/2017/abst3.php#abst13.
29. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Гармоническое интегрирование квазиполиномиальных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 3. С. 120–127. URL: http://213.170.69.26/mag/2017/abst3.php#abst14.
30. *Голиков Ю.К.* Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. С. 165–181.
31. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace‘s Functions &c. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. P. 43–57.
32. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace‘s Functions &c. // Proceedings of the Royal Society of London. 1856-1857. Vol. 8. P. 307–310.
33. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.
34. *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.-Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.
35. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953. 415 с.
36. *Thomson W.* Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1847. Tome XII. P. 256–264.
37. *Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.* Трактат по натуральной философии. Часть I. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010. 572 с.
38. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
39. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.
40. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

41. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. Учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 447 с.
42. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967. 486 с. (т. 1), 624 с. (т. 2).
43. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1948. 296 с.
44. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике (3-е изд.). М.: Наука, 1968. 512 с.
45. *Манжиров А.В., Полянин А.Д.* Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. М.: Факториал, 2000. 384 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург (*Бердников А.С.*)

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*Краснова Н.К., Соловьев К.В.*)

Контакты: *Бердников Александр Сергеевич*, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию: 30.05.2017

WHITTAKER' FORMULA FOR 3D ELECTRIC AND MAGNETIC POTENTIALS WITH A ZERO ORDER OF HOMOGENEITY AND ITS CONSEQUENCIES

A. S. Berdnikov[1], N. K. Krasnova[2], K. V. Solovyev[2]

[1]*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*
[2]*Peter The Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia*

Electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms are a useful instrument to design the systems of charge particle optics. The similarity principle for charged particle trajectories in these fields which was realized by Yu.K. Golikov for the first time enables to create spectrographic charge particle optical systems in a more systematic and intelligence way by using the fields which are homogeneous in Euler terms. This paper considers the Whittaker' formula for 3D Laplace potentials of zero order of homogeneity. It also considers some of its important consequences. This paper is the continuation of the cycle of publications devoted to the study of the properties of harmonic functions homogeneous in Euler terms and its applications to create effective electron and ion optical systems.

Keywords: electric fields, magnetic fields, homogeneity in Euler terms, similarity principle for charged particle trajectories, analytical solutions of Laplace equation, Donkin formula

REFERENCES

1. Fihtengolc G.M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 1* [Course of differential and integral calculus. Vol. 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 616 p. (In Russ.).
2. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki. T. 1* [Course of the higher mathematics. Vol. 1.]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russ.).
3. Golikov Yu.K. [Pseudo-uniform electrostatic fields with the given electron-optical characteristics]. *Trudy LPI* [Proc. of the Leningrad polytechnical institute], 1983, no. 397, pp. 82–85. (In Russ.).
4. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [Application of a formula of Donkin in the theory of energy analyzers. I]. *Zhurnal technicheskoy fiziki* [Journal of technical physics], 2000, vol. 70, no. 2, pp. 91–94. (In Russ.).
5. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [Application of a formula of Donkin in the theory of energy analyzers. II]. *Zhurnal technicheskoy fiziki* [Journal of technical physics], 2000, vol. 70, no. 3, pp. 44–47. (In Russ.).
6. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [The generalized principle of similarity and its application in electronic spectrography]. *Prikladnaya fizika* [Application-oriented physics],

2007, no. 2, pp. 5–11. (In Russ.).

7. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. *Teoriya sinteza elektrostaticheskich energoanalizatorov* [Theory of synthesis of electrostatic energy analyzers]. St. Petersburg Polytechnic University Publ., 2010. 409 p. (In Russ.).
8. Krasnova N.K. [Two-dimensional power-type electronic spectrographs with a symmetry plane]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, 2011, vol. 81, no. 6, pp. 97–103. (In Russ.). (In Eng: Technical Physics, 2011, vol. 56, no. 6, pp. 843–849. Doi: 10.1134/S1063784211060120).
9. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, 2011, vol. 81, no. 2, pp. 9–15. (In Russ.). (In Eng: Technical Physics, 2011, vol. 56, no. 2, pp. 164–170. Doi: 10.1134/S1063784211020149).
10. Krasnova N.K. *Teoriya i sintez dispergiruyuschich i fokusiruyuschich elektronno-opticheskich sred.* Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [The theory and synthesis of the disperse ing and focusing electron-optical environments. Dr. phys. and math. sci. diss.]. St. Petersburg, 2013. 259 p. (In Russ.).
11. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [Analytical structures of electric spectrographs the fields of which are expressed in a uniform generalized form]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 1, pp. 50–58. URL: http://213.170.69.26/en/mag/2014/abst1.php#abst6. (In Russ.).
12. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Analysis of the general Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 4, pp. 63–71. (In Russ.).
13. Whittaker E.T., Watson G. *Kurs sovremennogo analiza. Ch. 2: Transcendentnye funkcii* [Course of the modern analysis. Part 2: Transcendental functions]. Moscow, GIFML Publ., 1963. 516 p. (In Russ.).
14. Averin I.A. [Electrostatic and magnetostatic electron spectrographs based on Euler' homogeneous potentials with non-integer orders]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 3, pp. 35–44. Doi: 10.18358/np-25-3-i3544. (In Russ.).
15. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solov'ev K.V. [The simplest analytical electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2. pp. 17–32. (In Russ.).
16. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solov'ev K.V. [Three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2. pp. 147–165. (In Russ.).
17. Averin I.A., Berdnikov A.S. [Edge fields the bessetochnykh of electronic spectrographs with electrostatic fields, uniform in Euler]. *Uspechi prikladnoy fiziki* [Achievements of application-oriented physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 5–8. (In Russ.).
18. Berdnikov A.S., Averin I.A. [New approach to development of ion-optical schemes of static mass spectrographs on the basis of the non-uniform magnetic fields uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 89–95. (In Russ.).
19. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. I]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2015, vol. 12, no. 4, pp. 272–281. (In Russ.).
20. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. II]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 11–20. (In Russ.).
21. Berdnikov A.S., Averin I.A. [About impossibility of double focusing in the combined electric and magnetic fields uniform in Euler]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 62–65. (In Russ.).
22. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Universal expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 13–30. Doi: 10.18358/np-26-4-i1330. (In Russ.).
23. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Integrated formulas for the three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler with nonintegral orders of uniformity]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 31–42. Doi: 10.18358/np-26-4-i3142. (In Russ.).
24. Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R. [The principle of similarity of trajectories at the movement of charged particles with a different masses in electric and magnetic fields, uniform in Euler]. *Pis'ma v ZhTF* [Letters in ZhTF], 2017, vol. 43, no. 3, pp. 39–43. (In Russ.).
25. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Quasi-polynomial three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 71–80. (In Russ.).
26. Krasnova N.K., Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Averin I.A. [About quasipolynomial three-dimensional potentials of electric and magnetic fields]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 81–92. (In Russ.).
27. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Theorems on the homogeneity of scalar and vector potentials for 3D electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2017, vol. 5, no. 1, pp. 10–27. (In Russ.).
28. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Theorem on integration and differentiation of 3d electric and

magnetic potentials which are homogeneous in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 107–119. Doi: 10.18358/np-27-3-i107119. (In Russ.).
29. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Harmonic integration of quasi polynomial potentials which are homogeneous in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 120–127. Doi: 10.18358/np-27-3-i120127. (In Russ.).
30. Golikov Yu.K. [Analytical ways of the description of harmonious functions]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2, pp. 165–181. (In Russ.).
31. Donkin W.F. On the Equation of Laplace's Functions &c. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1857, vol. 147, pp. 43–57. Doi: 10.1098/rstl.1857.0005.
32. Donkin W.F. On the Equation of Laplace's Functions &c. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1856-1857, vol. 8, pp. 307–310. Doi: 10.1098/rspl.1856.0075.
33. Gobson E.V. *Teoriya sfericheskich i ellipsoidal'nych funkziy* [Theory of spherical and ellipsoidal functions]. Moscow, IIL Publ., 1952. 476 p. (In Russ.).
34. Sretenskiy L.N. *Teoriya n'yutonovskogo potenziala* [Theory of the Newtonian potential]. Moscow, Leningrad, OGIZ-GITTL Publ., 1946. 318 p. (In Russ.).
35. Gyunter N.M. *Teoriya potenziala i ee primenenie k osnovnym zadacham matematicheskoy fiziki* [The potential theory and its application to the main objectives of mathematical physics]. Moscow, GITTL Publ., 1953. 415 p. (In Russ.).
36. Thomson W. Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1847, Tome XII, pp. 256–264.
37. Tomson W. (lord Kel'vin), Tet P.G. *Traktat po natural'noy filosofii. Chast' I* [The treatise on natural philosophy. Part I]. Moskva, Izhevsk, NIZ "Regulyarnaya i chaoticheskaya dinamika" Publ., 2010. 572 p. (In Russ.).
38. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (In Russ.).
39. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki* [Course of the higher mathematics]. Vol. 4, Part 2, Moscow, Nauka Publ., 1981. 297 p. (In Russ.).
40. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funkziy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the function theory of complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 736 p. (In Russ.).
41. Evgrafov M.A. *Analiticheskie funkzii. Ucheb. posobie dlya vuzov. 3-e izd., pererab. i dop.* [Analytic functions. Studies. the manual for higher education institutions. 3rd ed., reslave. and additional]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 447 p. (In Russ.).
42. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskich funkziy. T. 1, 2* [Theory of analytic functions. Vol. 1, 2]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 486 p. (т. 1), 624 p. (т. 2). (In Russ.).
43. Vekua I.N. *Novye metody resheniya ellipticheskich uravneniy* [New methods of the solution of elliptical equations]. Moscow, Leningrad, OGIZ-GITTL Publ., 1948. 296 p. (In Russ.).
44. Muschelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya. Granichnye zadachi teorii funkziy i nekotorye ich prilozheniya k matematicheskoy fizike (3-e izd.)* [Singular integrable equations. Boundary tasks of the function theory and some of their applications to mathematical physics (the 3rd ed.)]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 512 p. (In Russ.).
45. Manzhirov A.V., Polyanin A.D. *Spravochnik po integral'nym uravneniyam: Metody resheniya* [The reference manual on integrable equations: Decision methods]. Moscow, Faktorial Publ., 2000. 384 p. (In Russ.).

Contacts: *Berdnikov Alexander Sergeevich*,
asberd@yandex.ru

Article received in edition: 30.05.2017