ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2017, том 27, № 4, с. 63–71

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 537.534.7

© А. С. Бердников, Н. К. Краснова, К. В. Соловьев

АНАЛИЗ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ УИТТЕКЕРА ОБЩЕГО ВИДА ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ, ОДНОРОДНЫХ ПО ЭЙЛЕРУ

Электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру, являются удобным инструментом для разработки электронно- и ионно-оптических систем. Принцип подобия траекторий в таких полях, впервые примененный Ю.К. Голиковым, позволяет более осмысленно и целенаправленно синтезировать нужные исследователю оптические схемы при использовании полей, принадлежащих этому классу. Данная работа посвящена анализу общей формулы Уиттекера для трехмерных гармонических функций, однородных по Эйлеру. Она является продолжением цикла работ по исследованию свойств гармонических потенциалов, являющихся однородными по Эйлеру функциями, и их применению для синтеза эффективных электронно- и ионно-оптических систем.

Кл. сл.: электрические поля, магнитные поля, однородные по Эйлеру функции, принцип подобия траекторий в оптике заряженных частиц, аналитические решения уравнения Лапласа

ВВЕДЕНИЕ

Электростатическими и магнитостатическими полями, однородными по Эйлеру, называются поля, напряженность или индукция которых является функцией, однородной по Эйлеру в смысле, который придается этому термину в общих курсах математического анализа [1, 2]. Электростатическое или магнитное поле является однородным по Эйлеру, если его напряженность $\mathbf{E}(x,y,z)$ (для магнитного поля — индукция $\mathbf{B}(x,y,z)$) удовлетворяет тождеству $\mathbf{E}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^{k-1}\mathbf{E}(x,y,z)$ (для магнитного поля — тождеству $\mathbf{B}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)= =\lambda^{k-1}\mathbf{B}(x,y,z)$) в области, в которой происходит движение заряженных частиц, при всех $\lambda>0$. Число k, которое не обязательно является целым, называется порядком однородности поля, и оно в значительной мере определяет свойства траекторий заряженных частиц.

В этом цикле работ [3–18] рассматриваются вспомогательные инструменты для синтеза электронно- и ионно-оптических устройств с помощью электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру с заданным порядком однородности k. Принцип подобия траекторий [13, 19–24] позволяет использовать электростатические поля, однородные по Эйлеру, как эффективные энергоспектрографы [3, 19–24], а магнитостатические поля, однородные по Эйлеру, — как эффективные масс-спектрографы [7–10]. Однако этим не ограничиваются перспективы использования полей, однородных по Эйлеру, для создания разнообразных приборов с полезными свойствами.

Готовые аналитические выражения, задающие скалярные потенциалы для электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру, являются полезным инструментом при синтезе корпускулярно-оптических систем рассматриваемого типа [4, 5, 11, 12, 14, 15, 18]. Они позволяют с самого начала задавать искомую систему электродов или магнитных полюсов в параметризованном виде так, что на выходе получаются поля, заведомо удовлетворяющие наложенным требованиям "быть однородными по Эйлеру с заданным порядком однородности". В этой работе анализируются интегральные формулы Уиттекера для трехмерных гармонических потенциалов, однородных по Эйлеру, которые были предложены в [25].

ОБЩАЯ ФОРМУЛА УИТТЕКЕРА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В монографии [25] (гл. 18) устанавливается полезная связь между трехмерными гармоническими функциями и аналитическими функциями комплексного переменного. Пусть $F(z,t)$ — однопараметрическое семейство аналитических функций комплексного переменного z, зависящее от вещественного параметра $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда функция

$$V(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} F(z + \mathrm{i}\,x\cos t + \mathrm{i}\,y\sin t, t)\,\mathrm{d}t, \qquad (1)$$

будет, как легко убедиться, комплекснозначной трехмерной гармонической функцией (а ее вещественная и мнимая части — соответственно вещественными трехмерными гармоническими функциями), поскольку вещественная и мнимая части функции F по отдельности удовлетворяют уравнению Лапласа в силу ее аналитичности. Замечательное свойство формулы (1) состоит в том, что справедливо и обратное утверждение: для любой трехмерной гармонической функции $V(x,y,z)$ найдется такая функция $F(z,t)$, для которой будет выполнено соотношение (1). Вместо однопараметрического семейства $F(z,t)$ аналитических функций комплексного переменного z в формуле (1) можно использовать однопараметрическое семейство двумерных гармонических функций $U(x,y,t)$:

$$V(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} U(z, x\cos t + y\sin t, t)\,\mathrm{d}t, \qquad (2)$$

поскольку между аналитическими функциями комплексного переменного и двумерными гармоническими функциями существует взаимнооднозначное соответствие.

Пусть $x = y = z = 0$ — регулярная точка для гармонической функции $V(x,y,z)$, что означает, что в окрестности начала координат функция $V(x,y,z)$ может быть представлена в виде сходящегося степенного ряда $V(x,y,z) = \sum c_{ijk} x^i y^j z^{k-i-j}$. Подстановка этого ряда в уравнение Лапласа показывает, что суммы $V_k(x,y,z) = \sum_{i,j\le k} c_{ijk} x^i y^j z^{k-i-j}$ будут удовлетворять уравнению Лапласа не только в сумме, но и по отдельности, т. е. являться однородными гармоническими полиномами степени k. Но для каждого $k \ge 0$ есть ровно $2k+1$ линейно независимых гармонических полиномов, где в качестве базисных функций можно выбрать (см. далее) полиномы

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (z + \mathrm{i}\,x\cos t + \mathrm{i}\,y\sin t)^k\,\mathrm{d}t, \qquad (3,\text{ а})$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (z + \mathrm{i}\,x\cos t + \mathrm{i}\,y\sin t)^k \cos(mt)\,\mathrm{d}t, \qquad (3,\text{ б})$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (z + \mathrm{i}\,x\cos t + \mathrm{i}\,y\sin t)^k \sin(mt)\,\mathrm{d}t, \qquad (3,\text{ в})$$

где $m = 1,2,\ldots,k$. Если разложить трехмерную гармоническую функцию в ряд по гармоническим однородным полиномам с множителями c_{0k}, c_{mk}, s_{mk} ($1 \le m \le k$, $0 \le k < \infty$), подставить в этот ряд для эталонных гармонических полиномов параметризацию (3) и просуммировать этот ряд по степеням $(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t)^k$ при фиксированных тригонометрических множителях 1, $\cos mt$, $\sin mt$, это даст аналитические функции $F_0(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t)$, $F_{mc}(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t)$, $F_{ms}(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t)$. Если теперь просуммировать полученный ряд Фурье с коэффициентами $F_0(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t)$, $F_{mc}(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t)$, $F_{ms}(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t)$, получим функцию $F(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t, t)$ для соотношения (1).

Остается обосновать, что параметризация (3) действительно обеспечивает полный набор гармонических потенциалов. Действительно, функция $(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t)^k$ после раскрытия скобок и тригонометрических преобразований представляет собой усеченный ряд Фурье по базису 1, $\cos m\phi$, $\sin m\phi$, где $m = 1,2,\ldots,k$, а все коэффициенты существенно ненулевые: чтобы в этом убедиться, достаточно подставить в выражение $(z + \mathrm{i}x\cos t + \mathrm{i}y\sin t)^k$ значения $y = z = 0$, либо $x = z = 0$, либо $x = y = 0$. Из линейной зависимости выражений (3) для базисных полиномов следовала бы линейная зависимость базисных тригонометрических функций, что неверно.

При выводе соотношения (1) весьма ограничительным условием является требование регулярности функции $V(x,y,z)$ в начале координат. От требования регулярности функции $V(x,y,z)$ в начале координат (или, что то же самое, отсутствия особых точек у функции $V(x,y,z)$ в начале координат) можно избавиться, если выполнить сдвиг $x \to x - x_0$, $y \to y - y_0$, $z \to z - z_0$ и переобозначить функцию $F(z,t)$ так, чтобы перенести зависимость первого аргумента от параметра t во второй аргумент функции. Это завершает доказательство формулы (1): ведь в ненулевой окрестности хотя бы одной точки функция $V(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, и из выполнения уравнения Лапласа следует, что в окрестности этой точки она обязана разлагаться в сходящийся степенной ряд. Чтобы доказать это, вокруг выбранной точки выделяется шар, внутри которого во всех точках функция удовлетворяет уравнению Лапласа. Затем значения функции внутри шара записываются с помощью интеграла типа Пуассона по поверхности шара, получаемого из функции Грина для внутренней задачи Дирихле на сфере [26–28]. Полученный интеграл разлагается в формальный ряд Тейлора в окрестности центра шара, после чего доказывается, что этот ряд сходится во всех точках внутри шара. Идея доказательства полностью аналогична доказательству с помощью интеграла Коши регулярности (разложимости в сходящийся степенной ряд и, как следствие, бесконечной дифференцируемости) для аналитических функций комплексного переменного, удовлетворяющих условию Коши—Римана [29, 30].

Формула (1) не является взаимно-однозначной: для одной и той же функции $V(x,y,z)$ существует бесконечное разнообразие допустимых функций $F(z,t)$, обеспечивающих выполнение соотношения (1). Это связано с тем, что один и тот же однородный гармонический полином можно представить в виде $\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k h(t)\mathrm{d}t$ с помощью весьма разных функций $h(t)$. Действительно, функции (3, б), (3, в) при $m>k$ тождественно равны нулю. Добавив к списку суммируемых функций произвольные наборы функций (3, б), (3, в) с $m>k$ и повторно выполнив суммирование ряда, как это описано выше, мы получим на выходе совсем другую функцию

$$F(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t,\, t),$$

однако сам интеграл (1) при этом не изменится.

С помощью мультипольного разложения можно сконструировать форму, в которой до определенной степени будет устранена многовариантность выбора функции $F(s,t)$ в формуле (1) для одной и той же трехмерной гармонической функции $V(x,y,z)$:

$$V(x,y,z)=\sum_{k=0,\infty}c_{k0}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k\,\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{k=0,\infty}\sum_{m=1,k}c_{km}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k\cos mt\,\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{k=0,\infty}\sum_{m=1,k}s_{km}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k\cos mt\,\mathrm{d}t=$$
$$=\sum_{k=0,\infty}c_{k0}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k\,\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{m=1,\infty}\sum_{k=m,\infty}c_{km}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k\cos mt\,\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{m=1,\infty}\sum_{k=m,\infty}s_{km}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k\cos mt\,\mathrm{d}t=$$
$$=\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\sum_{k=0,\infty}c_{k0}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k\right)\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{m=1,\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\cos mt\;(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^m\times\right.$$
$$\left.\times\left(\sum_{k=0,\infty}c_{k+m,m}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k\right)\right]\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{m=1,\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\sin mt\;(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^m\times\right.$$
$$\left.\times\left(\sum_{k=0,\infty}s_{k+m,m}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k\right)\right]\mathrm{d}t=$$
$$=\int_{-\pi}^{+\pi}F_0(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{m=1,\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^m\times\right.$$
$$\left.\times F_{cm}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)\cos mt\right]\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{m=1,\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^m\times\right.$$
$$\left.\times F_{sm}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)\sin mt\right]\mathrm{d}t,$$

где $F_0(s)$, $F_{cm}(s)$, $F_{sm}(s)$ — произвольные аналитические функции комплексного переменного s, регулярные в точке $s=0$. Если же отказаться от требования регулярности гармонической функции $V(x,y,z)$ в начале координат, формула приобретает вид

$$V(x,y,z)=\int_{-\pi}^{+\pi}F_0(s(x,y,z,t))\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{m=1,\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mt\;s^m(x,y,z,t)F_{cm}(s(x,y,z,t))\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{m=1,\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mt\;s^m(x,y,z,t)F_{sm}(s(x,y,z,t))\mathrm{d}t, \quad (4)$$

где

$$s(x,y,z,t)=(z-z_0)+\mathrm{i}(x-x_0)\cos t+\mathrm{i}(y-y_0)\sin t,$$

(x_0,y_0,z_0) — произвольно выбранная регулярная точка трехмерной гармонической функции $V(x,y,z)$. В таком случае для фиксированной точки (x_0,y_0,z_0) разные наборы функций $F_0(s)$, $F_{cm}(s)$, $F_{sm}(s)$ ($m=1,2,\ldots,\infty$), которые являются аналитическими функциями комплексной переменной s и регулярными в точке $s=0$, будут порождать существенно разные гармонические функции $V(x,y,z)$: разложение в ряд по эталонным гармоническим полиномам в окрестности точки (x_0,y_0,z_0) у этих функций будет очевидным образом различным. Однако при одновременном варьировании и базовой точки (x_0,y_0,z_0), и базовых функций $F_0(s)$, $F_{cm}(s)$, $F_{sm}(s)$ не исключен вариант, что на выходе будет получена одна и та же гармоническая функция $V(x,y,z)$.

Такое представление удобно, если заранее известно, что интересующая нас гармоническая функция принадлежит к классу мультипольных функций или представима в виде короткой суммы мультипольных функций. Однако в общем случае вполне компактные (с точки зрения записи в виде аналитической формулы) гармонические функции $V(x,y,z)$ могут приводить к весьма длинным и неудобным мультипольным разложениям. Соответственно сложно считать, что проблема универсальной параметризации трехмерных гармонических функций успешно разрешена с помощью формулы Уиттекера (1).

ФОРМУЛА УИТТЕКЕРА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПО ЭЙЛЕРУ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОРЯДКОМ ОДНОРОДНОСТИ

Рассмотрим функцию $V(x,y,z)$, однородную по Эйлеру с порядком однородности, равным n (который не обязательно является целочисленным), и регулярную в начале координат (т. е. представимую в окрестности начала координат сходящимся степенным рядом $V(x,y,z)=$ $=\sum c_{ijk}x^i y^j z^{k-i-j}$). Дифференцируемая однородная функция обязана удовлетворять соотношению Эйлера $x(\partial V/\partial x)+y(\partial V/\partial y)+z(\partial V/\partial z)-nV=0$ [1, 2]. Подставив в него степенной ряд для функции V, немедленно получим, что порядок однородности n обязан быть неотрицательным целым числом, а все однородные функции указанного типа будут представлять собой однородные полиномы степени n от x,y,z.

Поэтому однородные гармонические функции, регулярные в начале координат, — это гармонические однородные полиномы и только они. Для каждого $n\ge 0$ есть ровно $2n+1$ линейно независимых гармонических полиномов степени n. Гармонические однородные полиномы можно выразить в общем виде через многочлены Лежандра $P_n(\tau)$ и присоединенные многочлены Лежандра $P_n^m(\tau)$ ($m=1,2,\ldots,n$) [25, 31–34]. В результате любой однородный гармонический многочлен степени n может быть представлен в виде взвешенной суммы эталонных линейно-независимых гармонических полиномов [25, 35, 36]:

$$U(x,y,z)=a_0r^nP_n(\sin\theta)+$$
$$+\sum_{m=1,n} r^{n-m}P_n^m(\sin\theta)\left(a_m r^m\cos m\phi+b_m r^m\sin m\phi\right),$$

где a_m,b_m — произвольные коэффициенты, r,ϕ,θ — сферические координаты ($x=$ $=r\cos\theta\cos\phi$, $y=r\cos\theta\sin\phi$, $z=r\sin\theta$), а выражения $r^nP_n(\sin\theta)$, $r^{n-m}P_n^m(\sin\theta)$, $r^m\cos m\phi$, $r^m\sin m\phi$ — однородные многочлены соответствующей степени от x,y,z.

Как показано в [25], в качестве базиса для однородных гармонических полиномов можно использовать функции

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^n\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^n\cos(mt)\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^n\sin(mt)\,\mathrm{d}t\quad(m=1,2,\ldots,n).$$

Поэтому любые однородные, гармонические и регулярные в начале координат функции $V(x,y,z)$ могут быть заданы как

$$V(x,y,z)=\int_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^n h(t)\,\mathrm{d}t,\qquad(5)$$

где $n\ge 1$ — натуральное число (порядок однородности), а $h(t)$ — надлежащим образом выбранная функция, вообще говоря комплекснозначная.

Легко проверить, что при любом выборе функции $h(t)$ формула (5) будет порождать однородную гармоническую функцию. Указанная формула называется формулой Уиттекера для однородных гармонических функций. Важным фактом является то, что при использовании представления (5) мы не упустим ни одной однородной гармонической функции, регулярной в начале координат. Правда, следует отметить, что формула (5) может при существенно разных функциях $h(t)$ приводить к одним и тем же однородным гармоническим функциям $V(x,y,z)$.

К сожалению, устоявшейся ошибкой является распространение формулы (5) на *все* однородные гармонические функции. Легко понять (если раскрыть степень в формуле (5) в сумму одночленов и выполнить интегрирование, вынося множители $x^i y^j z^{k-i-j}$ за знак интеграла), что при всей свободе выбора функций $g(t)$ единственные функции, которые можно получить с помощью формулы (5) при натуральных n, — это однородные полиномы. Однако, например, дробно-рациональная функция

$$U(x,y,z)=\frac{(x+y)\left(x^2+y^2-4xy\right)\left(8z^4+12z^2\left(x^2+y^2\right)+3\left(x^2+y^2\right)^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} \qquad (6)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа, является однородной по Эйлеру с показателем однородности, равным единице, и отнюдь не сводится к линейной комбинации однородных гармонических полиномов x,y,z.

Вывод: к сожалению, формула (5) не решает проблему полноценного перебора однородных гармонических потенциалов с заданным порядком однородности, которая возникает при задачах синтеза корпускулярно-оптических систем с электрическими и магнитными полями, однородными по Эйлеру. Требование регулярности (разложимости в сходящийся ряд) в начале координат определенно оказывается слишком сильным и основательно ограничивает множество допустимых электрических и магнитных потенциалов. Более пригодную для практики теорию гармонических функций, однородных по Эйлеру с натуральными (целочисленными) порядками однородности, можно найти, например, в [11, 36–38]. Насколько известно авторам, общая теория гармонических функций, однородных по Эйлеру с нецелочисленными порядками однородности, в настоящий момент отсутствует. Отдельные примеры таких функций можно найти в [4, 5, 12, 14, 15, 18].

Очевидно, что функции вида

$$\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t\right)^k h(t)\,\mathrm{d}t,$$

получаемые из формулы (5), и при нецелых значениях k будут гармоническими и однородными по Эйлеру, а список из функций вида

$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t\right)^k \cos(mt)\,\mathrm{d}t,\\ \int_{-\pi}^{+\pi}\left(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t\right)^k \sin(mt)\,\mathrm{d}t\quad (m=0,1,2,\ldots)\end{gathered} \qquad (7)$$

будет содержать в себе линейный базис, по которому такие функции можно разложить в ряд. Однако когда k не является натуральным числом, то неизвестно, все ли функции вида (7) являются линейно-независимыми, а если нет, то какие именно значения m соответствуют базисным функциям. В частности, неизвестно, является ли базис, выбранный из списка (7), конечным, как при натуральных значениях k, или же бесконечным.

Также неясно, исчерпывается ли функциями вида (5) *все* семейство гармонических функций, однородных по Эйлеру с заданным нецелочисленным показателем однородности k. По всей видимости, ответ на этот вопрос является отрицательным по крайней мере для некоторых значений порядков однородности (см. выше пример для порядка однородности $n=1$, который не может быть выражен через формулу Уиттекера). Однако строгого доказательства данного факта в настоящий момент нет, так что неизвестно, существуют ли такие значения k (и если существуют, то какие именно), когда формула Уиттекера обеспечивает *все* возможные гармонические и однородные по Эйлеру функции соответствующего порядка.

Можно убедиться, что при произвольном выборе, вообще говоря, комплекснозначных функций $f(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющих условию $f^2(t)+g^2(t)\equiv 1$, функции

$$V(x,y,z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\left(z+\mathrm{i}xf(t)+\mathrm{i}yg(t)\right)^k h(t)\,\mathrm{d}t \qquad (8)$$

будут однородными и гармоническими. Неизвестно, раскладываются ли такие однородные гармонические функции в ряд по функциям вида (7), когда k не является натуральным числом (и тем самым попадают ли они в класс однородных гармонических функций, описываемых формулой Уиттекера (5)).

Открытым остается вопрос, как следует выбирать в формулах (5) и (8) функции $h(t)$, чтобы гарантированно получать разные однородные гармонические функции. Также необходимо отметить, что вычисление интегралов (5), (7) и (8) в аналитической форме при нецелочисленных порядках однородности вызывает значительные технические сложности.

МЕТОД Ю. К. ГОЛИКОВА

Рассмотрим, следуя работе [39], как из общей формулы (1) можно получить интегральное выражение похожего вида для гармонических функций, однородных по Эйлеру. Для того, чтобы функция $V(x,y,z)$ была однородной по Эйлеру с порядком однородности m, *необходимо и достаточно*, чтобы во всех точках рассматриваемой области выполнено было дифференциальное соотношение Эйлера [1, 2]

$$x\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}+y\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}+$$
$$+z\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}-mV(x,y,z)\equiv 0. \qquad (9)$$

Если подставить в (9) общую формулу (1) для трехмерных гармонических функций, получим необходимое и достаточное условие:

$$s\frac{\mathrm{d}F(s,t)}{\mathrm{d}s}-mF(s,t)=g(s,t), \qquad (10,\ \text{а})$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} g(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t,t)\,\mathrm{d}t\equiv 0, \qquad (10,\ \text{б})$$

где s — независимая свободная комплексная переменная, а $F(s,t)$ и $g(s,t)$ — аналитические комплекснозначные функции комплексной переменной s и вещественной переменной t.

Из уравнения (10, а) сразу следует общее выражение для функции $F(s,t)$:

$$F(s,t)=h(t)s^m+s^m\int_{s_0}^{s} g(\hat{s},t)\hat{s}^{-m-1}\mathrm{d}\hat{s}\,, \qquad (11)$$

где $h(t)$ — произвольная комплекснозначная функция, а $g(s,t)$ — любая функция, удовлетворяющая тождеству (10, б). Выбор $F(s,t)=h(t)s^m$ (что соответствует тривиальному случаю $g(s,t)\equiv 0$), как легко заметить, в точности приводит к формуле Уиттекера (5). Подстановка в (11) любой функции $g(s,t)$, удовлетворяющей условию (10, б), с последующей подстановкой полученной функции $F(s,t)$ в интегральное соотношение Уиттекера (1) позволяет получить новые интегральные выражения для однородных гармонических функций с заданным порядком однородности. К сожалению, поиск всех тех и только тех аналитических функций $g(s,t)$, для которых выполняется тождество (10, б), не так-то прост.

В работе [39] рассматривается частный случай, когда $g(s,t)=g_0(t)$ не зависит от переменной s. В таком случае $F(s,t)=h(t)s^m-g_0(t)/m$. Подставив это выражение в формулу (1), с учетом дополнительного условия $\int_{-\pi}^{+\pi} g_0(t)\mathrm{d}t=0$ получаем формулу Уиттекера (5), но не с натуральным, а с произвольным вещественным порядком однородности. (Впрочем то, что формула (1) порождает гармонические однородные функции не только при натуральных, но и при любых вещественных n может быть проверено просто прямой подстановкой). Приведенный здесь способ вывода формулы Уиттекера с помощью специфического выбора функции $g(s,t)$ наглядно показывает, что, по всей видимости, эта формула будет давать далеко не полное множество однородных гармонических функций с заданным порядком однородности. Например, как уже было продемонстрировано выше, при натуральных значениях параметра n из всех возможных однородных гармонических функций эта формула порождает лишь однородные гармонические полиномы заданной степени, упуская из виду функции, получаемые с помощью дифференцирования формулы Донкина [11, 17, 36–38].

К этому же результату, т. е. к формуле (5), приводит представление $g(s,t)$ в виде ряда $g(s,t)=\sum s^k g_k(t)$, составленного из натуральных степеней комплексной переменной s, на который наложено дополнительное условие

$$\forall k: \int_{-\pi}^{+\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^k g_k(t)\mathrm{d}t=0\,. \qquad (12)$$

Существование ненулевых разложений вида (12) следует из того факта, что интегралы (3, б) и (3, в) при натуральных k,m обращаются в тождественный ноль, если $m>k$.

Задача о том, как именно следует подбирать функции $g(s,t)$, чтобы было выполнено условие (10, б), и при этом формула (11) порождала новые нетривиальные интегральные выражения, отличные от формулы Уиттекера (5), а также, как именно будут выглядеть такие формулы в наиболее общем виде, в настоящий момент не решена. Примером того, что такие интегральные выражения существуют, может служить частная формула

$$V_n\left(x,y,z\right)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{(2n+1)/2}}{\left(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t\right)^{n+1}}h\left(t\right)\mathrm{d}t. \qquad (13)$$

Как легко проверить, при любом выборе комплекснозначной функции $h(t)$ и при произвольном вещественном n выражение (13) будет однородной гармонической функцией порядка n. Однако выражение (13) не сводится к формуле Уиттекера (5), а представляет собой независимое от нее интегральное выражение. К сожалению, конструирование в явном виде для выражения (13) функции $g(s,t)$, с помощью которой (13) можно представить в виде (1) с функцией $F(s,t)$, сконструированной согласно рецепту (11), представляет собой достаточно сложную в техническом отношении задачу.

Благодарность

Данная статья была вдохновлена работой [39] и в определенных аспектах является ее дополнением и продолжением. Авторы выражают глубокую признательность ее создателю и своему учителю Юрию Константиновичу Голикову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Москва: Физматлит, 2001. 616 с.
2. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. Москва: Наука, 1974. 480 с.
3. *Аверин И.А.* Электростатические и магнитостатические электронные спектрографы с однородными по Эйлеру потенциалами, характеризуемыми нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 3. С. 35–44. URL: http://213.170.69.26/mag/2015/abst3.php#abst5.
4. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Простейшие аналитические электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. С. 17–32.
5. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. С. 147–165.
6. *Аверин И.А., Бердников А.С.* Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 5–8.
7. *Бердников А.С., Аверин И.А.* Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 89–95.
8. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12, № 4. С. 272–281.
9. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 11–20.
10. *Бердников А.С., Аверин И.А.* О невозможности двойной фокусировки в комбинированных электрических и магнитных полях, однородных по Эйлеру // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 62–65.
11. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 13–30. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/abst4.php#abst2.
12. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Интегральные формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 31–42. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/abst4.php#abst3.
13. *Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.* Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, вып. 3. С. 39–43.
14. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Квазиполиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физические и математические науки. 2017. Т. 10, № 1. С. 71–80.
15. *Краснова Н.К., Бердников А.С., Соловьев К.В., Аверин И.А.* О квазиполиномиальных трехмерных потенциалах электрических и магнитных полей // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физические и математические науки. 2017. Т. 10, № 1. С. 81–92.
16. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Об однородности скалярных и векторных потенциалов у электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5, № 1. С. 10–27.
17. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Теорема о дифференцировании и интегрировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 3. С. 107–119. URL: http://213.170.69.26/mag/2017/abst3.php#abst13.

18. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Гармоническое интегрирование квазиполиномиальных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 3. С. 120–127. URL: http://213.170.69.26/mag/2017/abst3.php#abst14.
19. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики 2011, Т. 81, № 2. С. 9–15.
20. *Голиков* Ю.К., *Краснова* Н.К. Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.
21. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.
22. *Краснова Н.К.* Двумерные степенные электронные спектрографы с плоскостью симметрии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 6. С. 97–103.
23. *Краснова Н.К.* Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 2013. 259 с.
24. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 1. С. 50–58. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/abst1.php#abst6.
25. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. Часть 2: Трансцендентные функции. Москва: ГИФМЛ, 1963. 516 с.
26. *Боголюбов А.Н., Левашова Н.Т., Могилевский И.Е., Мухартова Ю.В., Шапкина Н.Е.* Функция Грина оператора Лапласа. М.: Физический факультет МГУ, 2012. 130 с.
27. *Пикулин В.П., Похожаев С.И.* Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004. 208 с.
28. *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физике. М.:: Изд-во МГУ, 1998. 350 с.
29. *Евграфов М.А.* Аналитические функции: Учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 447 с.
30. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967. 491 с. (т. 1), 624 с. (т. 2).
31. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973. 296 с.
32. *Абрамовиц М., Стиган И.* (ред.). Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
33. *Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W.* NIST Handbook of Mathematical Functions. NIST and Cambridge University Press, 2010. 952 p.
34. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
35. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
36. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.
37. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace‘s Functions &c. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. P. 43–57.
38. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace‘s Functions &c. // Proceedings of the Royal Society of London. 1856-1857. Vol. 8. P. 307–310.
39. *Голиков Ю.К.* Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. С. 165–181.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург (*Бердников А.С.*)

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*Краснова Н.К., Соловьев К.В.*)

Контакты: *Бердников Александр Сергеевич*, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию: 30.05.2017

ANALYSIS OF THE GENERAL WHITTAKER' FORMULA FOR 3D ELECTRIC AND MAGNETIC POTENTIALS HOMOGENEOUS IN EULER TERMS

A. S. Berdnikov[1], **N. K. Krasnova**[2], **K. V. Solovyev**[2]

[1]*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*
[2]*Peter The Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia*

Electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms are a useful instrument to design the systems of charge particle optics. The similarity principle for charged particle trajectories in these fields which was realized by Yu.K. Golikov for the first time enables to create spectrographic charge particle optical systems in a more systematic and intelligence way by using the fields which are homogeneous in Euler terms. This paper considers the Whittaker' formulas for 3D Laplace potentials which are homogeneous in Euler terms. This paper is the continuation of the cycle of publications devoted to the study of the properties of harmonic functions homogeneous in Euler terms and its applications to create effective electron and ion optical systems.

Keywords: electric fields, magnetic fields, homogeneity in Euler terms, similarity principle for charged particle trajectories, analytical solutions of Laplace equation

REFERENCES

1. Fihtengolc G.M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 1* [Course of differential and integral calculus. Vol. 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 616 p. (In Russ.).
2. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki. T. 1* [Course of the higher mathematics. Vol. 1.]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russ.).
3. Averin I.A. [Electrostatic and magnetostatic electron spectrographs based on Euler' homogeneous potentials with non-integer orders]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 3. pp. 35–44. Doi: 10.18358/np-25-3-i3544. (In Russ.).
4. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [The elementary analytical electric and magnetic potentials, the uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2, pp. 17–32. (In Russ.).
5. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Three-dimensional electric and magnetic potentials, the uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2, pp. 147–165. (In Russ.).
6. Averin I.A., Berdnikov A.S. [Regional fields the without net of electronic spectrographs with electrostatic fields, uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 5–8. (In Russ.).
7. Berdnikov A.S., Averin I.A. [New approach to development of ion-optical schemes of static mass spectrographs on the basis of the non-uniform magnetic fields uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 89–95. (In Russ.).
8. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. I]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2015, vol. 12, no. 4, pp. 272–281. (In Russ.).
9. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. II]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 11–20. (In Russ.).
10. Berdnikov A.S., Averin I.A. [About impossibility of double focusing in the combined electric and magnetic fields uniform in Euler]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 62–65. (In Russ.).
11. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Universal expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 13–30. Doi: 10.18358/np-26-4-i1330. (In Russ.).
12. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Integrated formulas for the three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler with nonintegral orders of uniformity]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 31–42. Doi: 10.18358/np-26-4-i3142. (In Russ.).
13. Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R. [The principle of similarity of trajectories at the movement of charged particles with a different masses in electric and magnetic fields, uniform in Euler]. *Pis'ma v ZhTF* [Letters in ZhTF], 2017, vol. 43, no. 3, pp. 39–43. (In Russ.).
14. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Quasi-polynomial three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki*

[Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 71–80. (In Russ.).

15. Krasnova N.K., Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Averin I.A. [About quasipolynomial three-dimensional potentials of electric and magnetic fields]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 81–92. (In Russ.).
16. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Theorems on the homogeneity of scalar and vector potentials for 3D electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2017, vol. 5, no. 1, pp. 10–27. (In Russ.).
17. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Theorem on integration and differentiation of 3d electric and magnetic potentials which are homogeneous in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 107–119. Doi: 10.18358/np-27-3-i107119. (In Russ.).
18. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Harmonic integration of quasi polynomial potentials which are homogeneous in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 120–127. Doi: 10.18358/np-27-3-i120127. (In Russ.).
19. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, 2011, vol. 81, no. 2, pp. 9–15. (In Russ.). (In Eng: Technical Physics, 2011, vol. 56, no. 2, pp. 164–170. Doi: 10.1134/S1063784211020149).
20. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [The generalized principle of similarity and its application in an electronic spectrography]. *Prikladnaya fizika* [Applied physics], 2007, no. 2, pp. 5–11. (In Russ.).
21. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. *Teoriya sinteza elektrostaticheskich energoanalizatorov* [Theory of synthesis of electrostatic energy analyzers]. St. Petersburg Polytechnic University Publ., 2010. 409 p. (In Russ.).
22. Krasnova N.K. [Two-dimensional power-type electronic spectrographs with a symmetry plane]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, 2011, vol. 81, no. 6, pp. 97–103. (In Russ.). (In Eng: Technical Physics, 2011, vol. 56, no. 6, pp. 843–849. Doi: 10.1134/S1063784211060120).
23. Krasnova N.K. *Teoriya i sintez dispergiruyuschich i fokusiruyuschich elektronno-opticheskich sred.* Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [The theory and synthesis of the disperse ing and focusing electron-optical environments. Dr. phys. and math. sci. diss.]. St. Petersburg, 2013. 259 p. (In Russ.).
24. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [Analytical structures of electric spectrographs the fields of which are expressed in a uniform generalized form]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 1, pp. 50–58. (In Russ.). URL: http://213.170.69.26/en/mag/2014/abst1.php#abst6.
25. Whittaker E.T., Watson G. *Kurs sovremennogo analiza. Ch. 2: Transcendentnye funkcii* [Course of the modern analysis. Part 2: Transcendental functions]. Moscow, GIFML Publ., 1963. 516 p. (In Russ.).
26. Bogolyubov A.N., Levashova N.T., Mogilevskij I.E., Muhartova Yu.V., Shapkina N.E. *Funkciya Grina operatora Laplasa* [Green function of the operator of Laplace]. Moscow, Faculty of Physics Moscow State University, 2012. 130 p. (In Russ.).
27. Pikulin V.P., Pohozhaev S.I. *Prakticheskij kurs po uravneniyam matematicheskoj fiziki* [Practical course on the equations of mathematical physics]. Moscow, MCNMO Publ., 2004. 208 p. (In Russ.).
28. Bogolyubov A.N., Kravcov V.V. *Zadachi po matematicheskoj fizike* [Tasks in mathematical physics]. Moscow, Moscow State University, 1998. 350 p. (In Russ.).
29. Evgrafov M.A. *Analiticheskie funkcii* [Analytical functions]. Third edition processed and added. Moscow, Nauka Publ., 1991. 447 p. (In Russ.).
30. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskih funkcij. T. 1, 2* [Theory of analytical functions. V. 1, 2]. Moscow, Nauka Publ. Vol. 1, 1967. 491 p. Vol. 2, 1968. 624 p. (In Russ.).
31. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transzendentnye funkzii. T. 1* [The highest transcendental functions. Vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 296 p. (In Russ.).
32. Abramoviz M., Stigan I. (ed.). *Spravochnik po spezial'nym funkziyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablizami* [The reference book on higher transcendental functions with formulas, schedules and mathematical tables]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p. (In Russ.).
33. Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. NIST and Cambridge University Press, 2010. 952 p.
34. Olver F. *Asimptotika i spezial'nye funkzii* [Asymptotes and special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 528 p. (In Russ.).
35. Dzhekson Dzh. *Klassicheskaya elektrodinamika* [Classical electrodynamics]. Moscow, Mir Publ., 1965. 702 p. (In Russ.).
36. Gobson E.V. *Teoriya sfericheskich i ellipsoidal'nych funkziy* [Theory of spherical and ellipsoidal functions]. Moscow, IIL Publ., 1952. 476 p. (In Russ.).
37. Donkin W.F. On the Equation of Laplace's Functions &c. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1857, vol. 147, pp. 43–57. Doi: 10.1098/rstl.1857.0005.
38. Donkin W.F. On the Equation of Laplace's Functions &c. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1856-1857, vol. 8, pp. 307–310. Doi: 10.1098/rspl.1856.0075.
39. Golikov Yu.K. [Analytical ways of the description of harmonious functions]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2, pp. 165–181. (In Russ.).

Contacts: *Berdnikov Alexander Sergeevich,*
asberd@yandex.ru

Article received in edition: 30.05.2017