

---



---

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

---



---

УДК 535.36+534.13+621.1

© Б. П. Шарфарец

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ОБОБЩЕННЫМ  
ТЕРМО-АКУСТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ**

Рассмотрено влияние акустического поля и поля свободной конвекции, вызванное тепловым источником, на показатель преломления света в однородной сплошной среде. Приведены соответствующие выражения для обоих полей, позволяющие рассчитать возмущения плотности среды, а следовательно, возмущение показателя преломления света, вызванное возмущением плотности. Приведены конкретные порядки величины скорости жидкости при свободной конвекции, относительные величины изменения плотности, а также выражение для числа Грасгофа как параметра интенсивности течений при свободной конвекции.

*Кл. сл.:* показатель преломления света, свободная конвекция, уравнения Буссинеска, число Грасгофа

**ВВЕДЕНИЕ**

В проблемах научного приборостроения часто возникают задачи взаимодействия различных физических полей, когда эффект, дающий необходимую научную или практическую информацию, является результатом их прямого взаимодействия. Широко известны такие пограничные дисциплины, как акустооптика (возмущение оптического поля при наличии стороннего акустического поля), оптоакустика (возникновение акустического поля в оптических полях), магнитная гидродинамика и т. д.

Одной из таких междисциплинарных проблем является задача описания взаимодействия света с акусто-гидродинамическим полем, вызванным наличием в некоторой сплошной среде комбинированного излучения тепла и звука. Как известно, световое поле возмущается при распространении в прозрачной среде при возмущении параметров последней, в частности при возмущении ее плотности. В сплошной среде термодинамические величины, такие как давление, плотность, температура среды и т. д., связаны между собой уравнениями состояния. Поэтому возмущение температурного поля вызывает возмущение связанных с ним других полей, в частности, поля плотностей. При наличии в среде акустического поля в свою очередь изменение поля давления также вызывает возмущение поля плотностей. Когда в обоих случаях указанные возмущения плотности сопоставимы по величине, необходимо учитывать совокупное возмущение поля плотности, для корректной оценки возмущений светового поля.

**ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ**

В настоящей работе в интересах оценки возмущения светового поля рассматривается задача расчета возмущения плотности среды в результате наличия в ней акустического и теплового полей. Возмущение плотности среды происходит как вследствие ее акустического возмущения, т. е. под воздействием возмущения давления в ней, так и под воздействием изменения (возмущения) температуры среды. Это в свою очередь приводит к возмущению плотности, а следовательно, и показателя преломления. В настоящей работе предпринимается попытка подбора математической модели, адекватно описывающей происходящие в этом случае физические процессы.

**ФОРМУЛА ЛОРЕНЦА—ЛОРЕНЦА**

Формула Лоренца—Лоренца, рассматриваемая ниже, устанавливает зависимость коэффициента преломления среды от некоторых параметров, в частности, от ее плотности.

Вначале приведем некоторые выражения, связывающие плотность прозрачной среды с ее показателем преломления  $n = c_0 / c$ , а значит и с ее диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Здесь  $c_0$  и  $c$  — скорость света в вакууме и среде соответственно.

Согласно соотношению Лоренца—Лоренца [1, с. 5]

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N_1 a.$$

Здесь  $N_1$  — число молекул в  $1 \text{ см}^3$ ;  $a$  — скаляр, характеризующий поляризуемость молекулы вещества в среде. Для газов эта формула может быть записана в виде

$$\frac{n-1}{\rho} = \gamma = \text{const.}$$

Для воздуха постоянная  $\gamma$  равна:  $\gamma = 0.22635 \text{ см}^3/\text{г}$ . Окончательно для воздуха формула Лоренца—Лоренца такова:

$$\frac{n-1}{\rho} = 0.22635 \text{ см}^3/\text{г}.$$

Как видно, для газов вообще и для воздуха в частности показатель преломления и плотность среды связаны линейным соотношением. Запишем его для воздуха в каноническом виде

$$n = 0.22635\rho + 1.$$

Пусть плотность вещества записывается в виде  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , где  $\rho_0$  — ее равновесное значение, а  $\rho'$  — ее возмущение. Тогда, очевидно, возмущенное значение показателя преломления  $n'$  (показатель преломления также может быть записан в виде  $n = n_0 + n'$ , где  $n_0$  — равновесное значение) также линейно связано с возмущением плотности, что с учетом равенства  $n_0 = 0.22635\rho_0 + 1$  дает окончательную зависимость

$$n' = 0.22635\rho'.$$

### СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ БУССИНЕСКА

Как известно, описание акустического и температурного полей в жидкости следует в наиболее общем случае вязкой, сжимаемой, теплопроводящей среды из системы нелинейных уравнений Навье—Стокса [2–4 и др.]. Кроме того, в своих предыдущих работах автор периодически обращался к близкой тематике [5–11]. Здесь приведем эту систему в редакции работы [2]:

– уравнение Навье—Стокса (уравнение движения) для сжимаемой жидкости<sup>1)</sup> [2, с. 73]

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) =$$

$$= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}); \quad (1)$$

– уравнение Навье—Стокса для несжимаемой жидкости [2, с. 73]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}; \quad (1a)$$

– уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости [2, с. 15]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (2)$$

– уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости [2, с. 27]

$$\text{div} \mathbf{v} = 0; \quad (2a)$$

– уравнение сохранения энергии для сжимаемой жидкости [2, с. 273]

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \text{div}(\kappa \nabla T) + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 = \text{div}(\kappa \nabla T) + D \quad (3)$$

(величина  $D = \zeta (\text{div} \mathbf{v})^2 + \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \text{div} \mathbf{v} \right)^2$  называется диссипативной функцией и представляет собой энергию, диссипируемую в виде тепла благодаря вязкости; член  $\text{div}(\kappa \nabla T)$  есть тепло, приносимое в рассматриваемый объем посредством теплопроводности [2, с. 273]);

– уравнение сохранения энергии (теплопереноса) для несжимаемой жидкости<sup>2)</sup> [2, с. 277]

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \text{div}(\kappa \nabla T) + D; \quad (3a)$$

– уравнения состояния; поскольку пять уравнений (1)–(3) для сжимаемой жидкости и (1a)–(3a) для несжимаемой жидкости содержат семь неизвестных ( $\rho$ ,  $p$ ,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ,  $T$  и  $s$ ), то обычно к ним добавляют два недостающих уравнения термодинамического состояния, например любые два из приведенных ниже (см., например, [2, 4])

$$p = p(\rho, s), \quad \rho = \rho(p, T), \quad s = s(p, T). \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Уравнения (1) и (1a) справедливы в случае, когда изменение коэффициентов вязкости  $\eta$  и  $\zeta$  вдоль жидкости незначительно (что, как правило, имеет место [2, с. 73]) и потому можно считать их постоянными.

<sup>2)</sup> В случае, когда изменчивостью функции коэффициента теплопроводности от координат можно пренебречь, член  $\text{div}(\kappa \nabla T)$  в уравнениях (3), (3a) может быть заменен на величину  $\text{div}(\kappa \nabla T) = \kappa \Delta T$ .

В приведенной системе уравнений Навье—Стокса величины  $p(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\rho(\mathbf{x}, t)$ ,  $s(\mathbf{x}, t)$  и  $T(\mathbf{x}, t)$  это — соответственно поля давления, скорости жидкости, ее плотности, энтропии и поле температур;  $\eta$ ,  $\zeta$  — соответственно коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности жидкости;  $s$  — энтропия единицы массы жидкости;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Заметим, что для идеальной жидкости система уравнений Навье—Стокса сводится к системе уравнений Эйлера. Уравнения (1), (1а) трансформируются к уравнению Эйлера движения среды:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p. \quad (5)$$

Уравнения неразрывности (2) для сжимаемой жидкости и (2а) для несжимаемой жидкости остаются соответственно неизменными:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (6)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (6а)$$

Уравнения энергии (3) и (3а) для идеальной среды неактуальны в силу отсутствия в ней потерь.

Уравнение состояния для замыкания системы из четырех уравнений с пятью неизвестными (5), (6) или (5), (6а) требуется только одно, которое вследствие адиабатичности протекающих в этом случае процессов [2, с. 17] сводится к одному уравнению состояния [2, с. 351], [4, с. 10]

$$p = p(\rho). \quad (7)$$

Заметим, что акустическая часть возмущения плотности среды, вызванная акустическим давлением, может быть получена из обычных волновых уравнений линейной акустики, следующих из системы уравнений Эйлера для идеальной среды после их линеаризации (см., например, [2, § 64]).

Условимся о следующих обозначениях. Пусть рассматривается некоторое (скалярное или векторное) поле  $a = a(\mathbf{x}, t)$ . Тогда примем следующие обозначения (аргументы опущены):  $a = a_0 + a' + a'' + \dots$ , где  $a_0$  — равновесное состояние поля,  $a'$  — его возмущение первого порядка малости,  $a''$  — возмущение второго порядка малости и т. д. Тогда справедливо следующее равенство для линейной акустики [2, с. 351]

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho' = c^2 \rho', \quad (7а)$$

где  $c = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$  — скорость звука в среде, а индекс  $s$  означает взятие производной при постоянной энтропии (что и означает адиабатичность процесса). Отсюда получается простая связь возмущения плотности в зависимости от возмущения давления

$$\rho' = \frac{p'}{c^2}.$$

Что касается той части возмущения давления, которая обусловлена изменчивостью температуры, то наиболее часто для ее получения при соблюдении некоторых ограничений пользуются системой уравнений Буссинеска [2, § 56].

Уравнения, описывающие свободную тепловую конвекцию, называются системой уравнений Буссинеска. При выводе этой системы уравнений принимается предположение о несжимаемости жидкости. Это означает, что изменением плотности под влиянием изменения давления можно пренебречь [2, с. 306]. Напротив, изменением плотности вследствие изменения температуры пренебречь нельзя. Возмущение температуры в жидкости приводит в общем случае (исключения см. в [2, § 3]) к появлению в жидкости внутренних течений, стремящихся перемешать жидкость так, чтобы в ней установилась постоянная температура. Такое, возникающее в поле тяжести движение, называют свободной конвекцией.

Возмущение плотности, обусловленное возмущением температуры, определяется из выражения [2, с. 306]

$$\rho' = \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial T} \right)_p T' = -\rho_0 \beta T'. \quad (8)$$

Здесь  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$  — температурный коэффициент расширения жидкости.

В давлении  $p = p_0 + p'$  величина невозмущенного давления  $p_0$  не остается постоянной, а меняется с высотой столба жидкости по гидростатическому закону

$$p_0 = \rho_0 g \mathbf{\gamma} \cdot \mathbf{x} + \text{const} = -\rho_0 g z + \text{const}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  — координата точки среды,  $z$  отсчитывается вертикально вверх;  $\mathbf{g} = \gamma \mathbf{g}$ ;

$\mathbf{\gamma} = (0, 0, -1) = \frac{\mathbf{g}}{g}$  — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором ускорения силы тяжести.

С учетом сделанных предположений о несжимаемости жидкости и учете силы тяжести уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости (1а) запишется в виде

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

или так [2, с. 307]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g},$$

где  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  — кинематическая вязкость. После подстановки в последнее выражение значений  $p = p_0 + p'$  и  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , закона изменения гидростатического давления  $p_0$  (9) и значения из (8) для  $\rho'$  окончательно получается уравнение движения для системы уравнений Буссинеска [2, с. 307]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta T' g \mathbf{y}. \quad (10)$$

Знак минус перед последним членом справа имеет ясное физическое толкование: при  $T' > 0$ , т. е. когда элементарный объем нагрет выше равновесной температуры  $T_0$ , выталкивающая архимедова сила действует в противоположном вектору  $\mathbf{g}$  направлении, т. е. в положительном направлении оси  $Oz$ , направленной вверх.

Уравнение теплопереноса (энергии) (3а) для несжимаемой жидкости также упрощается, т. к. диссипативным членом  $D$  в случае свободной конвекции можно пренебречь по сравнению с остальными членами.<sup>3)</sup> Кроме того, коэффициент теплопроводности  $\kappa$  при сделанных допущениях о малости величин  $T'$  можно считать постоянным. Окончательно уравнение теплопереноса для свободной конвекции записывается в виде [2, с. 307]

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' = \chi \Delta T', \quad (11)$$

где  $\chi = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p}$  — коэффициент температуропроводности жидкости.

Уравнения (10) и (11) вместе с уравнением неразрывности (6а)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

представляют собой полную систему уравнений Буссинеска, описывающих свободную конвекцию [2, с. 307].

**Замечание 1.** При выводе системы уравнений Буссинеска (10), (11) и (6а) принималось допущение о несжимаемости жидкости. Условия допустимости такого приближения хорошо известны: в случае, когда *скорость жидкости много меньше скорости звука в ней*  $|\mathbf{v}| \ll c$  (малость числа Маха  $M$ ) [2, с. 41] и *вариации температуры достаточно малы относительно ее равновесного значения*  $T' \ll T_0$  [2, с. 277], *жидкость можно считать несжимаемой*. Для существенно нестационарных течений в [2, с. 41–42] приводится еще одно дополнительное условие приближения о несжимаемости жидкости: пусть  $\tau$  и  $l$  — величины порядка промежутков времени и расстояний, на которых скорость жидкости испытывает заметное изменение (при периодическом процессе за  $\tau$  принимается период), тогда необходимо выполнение условия  $\tau \gg \frac{l}{c}$ .

**Замечание 2.** Основным допущением при выводе системы (10), (11), (6а) является предположение о том, что [13, с. 11] *рассматривается в некотором смысле «слабая» конвекция*: вызванные неоднородностью температуры отклонения плотности от среднего значения предполагаются настолько малыми, что ими можно пренебречь во всех уравнениях, кроме уравнения движения (выражение (10)), где это отклонение учитывается лишь в члене с подъемной силой. Однако сравнение результатов решения уравнений конвекции (10), (11), (6а) с обширным экспериментальным материалом с определенностью свидетельствует о том, что эти уравнения достаточно хорошо отражают все важные особенности тепловой конвекции в лабораторных масштабах.

## ОБ ИСТОЧНИКЕ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Источник теплового излучения можно ввести, добавив некоторую функцию  $f(\mathbf{x}, t)$  справа

<sup>3)</sup> В работе [12, с. 192] отмечается, что в большинстве случаев оказывается возможным пренебречь в уравнении (8) диссипативным членом. При этом дается качественное, неформализованное условие возможности пренебрежения вкладом диссипативной функции, заключающееся в необходимости а) достаточно медленного движения жидкости; б) достаточной малости имеющейся в жидкости разности температур для того, чтобы ее физические свойства можно было считать не зависящими от температуры, а с другой стороны, эти разности должны быть достаточно велики, чтобы по сравнению с ними можно было пренебречь изменениями температуры, вызванными внутренним трением.

в уравнение теплопереноса (11) следующим образом [14, с. 26], [16, с. 32]:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' = \chi \Delta T' + f(\mathbf{x}, t). \quad (12)$$

Здесь  $f(\mathbf{x}, t) = \frac{F(\mathbf{x}, t)}{\rho_0 c_p}$ , а  $F(\mathbf{x}, t)$  — плотность (удельная мощность) тепловых источников, равная количеству поглощаемого или выделяемого тепла в единице объема за единицу времени;  $[F(\mathbf{x}, t)] = \text{Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  — текущие координаты рассматриваемого объема.

### РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

В заключение можно записать результирующие выражения для акустического и конвекционного случаев.

Для конвекционного случая это будет откорректированная с учетом стороннего источника тепла в уравнении теплопереноса (12) система уравнений Буссинеска с добавлением связи между возмущением плотности и температуры (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta T' g \mathbf{y}, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' &= \chi \Delta T' + f(\mathbf{x}, t), \\ \text{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho' &= \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial T} \right)_p T' = -\rho_0 \beta T'. \end{aligned} \quad (13)$$

Что касается акустического случая, то здесь можно пользоваться линейным волновым уравнением, например, для избыточного давления  $p'$  (см., например, [2, § 64]) и связью (7а) между избыточным давлением и избыточной плотностью  $\rho'$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} + \psi(x, y, z, t), \\ p' &= \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho' = c^2 \rho'. \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) в волновом уравнении справа стоит стандартная акустическая функция источника.

### СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОТСУТСТВИЕ КОНВЕКЦИИ)

Если в системе уравнений Буссинеска в уравнении теплопереноса (11) отсутствует конвективный член  $\mathbf{v} \cdot \nabla T'$ , то уравнение (11) переходит в уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \chi \Delta T', \quad (15)$$

где нет других искомым полей и поэтому перестает быть связанным, т. е. может решаться автономно от других уравнений системы Буссинеска.

При отсутствии конвективного члена глубина прогревания очень мала. В [15, с. 60] рассматривается модельный пример, в котором ставится краевая задача, когда к уравнению (11) добавляется краевое условие: на границе  $z=0$  полупространства  $z \geq 0$  поддерживается переменная температура  $T_0 e^{-i\omega t}$

$$T'(x, y, z=0, t) = T_0' e^{-i\omega t}, \quad T_0' = \text{const}. \quad (16)$$

Решение (13), (14) ищется в виде плоской волны

$$\begin{aligned} T'(x, y, z, t) &= \\ &= T_0' \exp[i(i\xi_z z - \omega t)] = T_0' \exp(-\xi_z z) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подстановка (17) в (15) дает  $\xi_z = \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$ . Величина

$\delta_z = 1/\xi_z$  называется глубиной прогревания (на этом расстоянии от границы  $z=0$  амплитуда колебаний тепловой волны падает в  $e$  раз). Глубины прогревания для воздуха и для воды равны соответственно [15, с. 61]

$$\delta_z(\text{воздуха}) = 0.24/\sqrt{f}; \quad \delta_z(\text{воды}) = 0.021/\sqrt{f}.$$

Здесь  $f = \omega/2\pi$  — частота колебаний. Например, для частоты 500 Гц в воздухе глубина прогревания  $\delta_z$  составляет около 1 см, а для воды — порядка 1 мм.

Таким образом, в отсутствие конвекции распространением тепла можно пренебречь.

### ОЦЕНОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ПОТОКОВ ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

В работе [16, т. 1, с. 30] приведены оценки абсолютных значений скоростей при свободной конвекции. При оценках пренебрегают силами вязкости и другими явлениями, обычно оказывающими меньшее влияние, чем сила выталкивания Архи-

меда. Тогда порядок амплитуды скорости оценивается согласно выражению  $|v| = O\left(\sqrt{Lg\frac{\rho'}{\rho}}\right)$ , где

$L$  — высота выталкивания (характерный параметр процесса свободной конвекции). Из этой оценки следует, что скорости течений, вызванные выталкивающей силой, малы. Например, в обычном поле тяготения при выталкивании на разность высот  $L = 0.5$  м и относительной разности плотностей, равной 2 % ( $\frac{\rho'}{\rho} = 0.02$ ), а также, если все-таки учесть вязкие силы, оценочная величина скорости в воздухе будет иметь порядок  $|v| \approx 8$  см/с.

При конвективном теплообмене для случая свободной конвекции, когда движение вызывается разностью плотностей из-за неравномерности поля температур, важную роль играет число Грасгофа (критерий подобия)  $Gr$

$$Gr = \frac{gL^3}{\nu^2} \beta T' \quad (18)$$

Здесь  $\beta$  — температурный коэффициент объемного расширения жидкости (для идеальных газов  $\beta = \frac{1}{T}$  [17, с. 37]; воздух при атмосферном давлении и комнатной температуре с большой точностью является идеальным газом);  $\nu$  — кинематическая вязкость. Число Грасгофа представляет собой отношение выталкивающей силы и (или) создаваемой ею скорости к соответствующим величинам, обусловленным вязкостью [16, т. 1, с. 30].

Параметр  $\sqrt{Gr}$  в условиях свободной конвекции играет роль, аналогичную числу Рейнольдса  $Re$  при вынужденных течениях. Аналогично критическому числу  $Re_{кр}$ , критическое число Грасгофа  $Gr_{кр}$  определяет переход от ламинарного режима течения к турбулентному в условиях свободной (естественной) конвекции. Таким образом, число Грасгофа  $Gr$ , как параметр интенсивности течений, вызванных выталкивающей силой, замещает число Рейнольдса, являющегося параметром вынужденных течений [16, т. 1, с. 30].

При заданных ниже параметрах свободной конвекции в воздухе (при замене

$$|\beta| \approx \frac{1}{\rho} \left| \frac{\Delta\rho}{\Delta T} \right| = \frac{1}{\rho} \left| \frac{\Delta\rho}{T'} \right| \quad \text{имеем} \quad |\beta T'| \approx \frac{1}{\rho} \left| \frac{\Delta\rho}{\Delta T} \Delta T \right| = \frac{1}{\rho} \left| \frac{\Delta\rho}{T'} T' \right| = \left| \frac{\Delta\rho}{\rho} \right|):$$

$$\left| \frac{\Delta\rho}{\rho} \right| = 0.02, \quad \nu = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с} \quad \text{при } 20^\circ\text{C},$$

$L = 0.1$  м,  $g \approx 9.8$  м/с<sup>2</sup> получаем из (18) оценку параметра  $\sqrt{Gr} \approx 930$ , что соответствует течениям с числом Рейнольдса  $Re \approx 930$  на высоте 0.1 м от источника теплового излучения. Из (18) видно, что с ростом высоты  $L$  от источника наблюдения число Рейнольдса растет с порядком  $Re \propto O(L^{3/2})$ .

Рассмотрим далее пограничный тепловой слой человека [16, с. 45]. Воздух в слое движется вверх под действием рассеяния с поверхности тела тепловой энергии, которая выделяется в организме. Эта энергия уносится восходящими потоками воздуха, образующимися вокруг тела. Движущими механизмами процесса являются перенос тепла и одновременно перенос водяного пара, выделяющегося при потении. Для типичного случая, когда температура кожи равна 33 °С, а температура окружающего воздуха равна 25 °С, вклад переноса тепла в величину  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  составляет всего около 0.03, т. е. 3 %. Повышение влажности воздуха, вызванное потением, дает примерно такой же дополнительный вклад в величину  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ . Таким образом,

суммарная величина  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  составляет 0.06. Пользуясь приведенной выше оценкой, получаем для скорости конвекции на разности высот 0.5 м  $|v| = O\left(\sqrt{gL\frac{\rho'}{\rho}}\right) \approx \sqrt{9.8 \cdot 0.5 \cdot 0.06} \approx 54$  см/с.

Примерно такую же оценку скорости конвективного течения можно получить из следующих предположений. При внешней температуре воздуха 20 °С выходящий из легких человека воздух имеет температуру также примерно 33 °С. Температурный коэффициент объемного расширения воздуха при температуре 20 °С равен  $3.43 \cdot 10^{-3}$  1/К. Тогда согласно приближенному равенству  $\beta\Delta T \approx \frac{\Delta\rho}{\rho}$  имеем приближенно

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \beta\Delta T = 3.43 \cdot 10^{-3} \cdot 13 \approx 0.045, \quad \text{что близко к предыдущей оценке, несколько ей уступая по величине } \frac{\Delta\rho}{\rho}.$$

### ВЫВОДЫ

В работе рассмотрено влияние акустического поля и поля свободной конвекции, вызванное тепловым источником на показатель преломления

света в однородной сплошной среде. Приведены соответствующие выражения для обоих полей, позволяющие рассчитать возмущения плотности среды, а, следовательно, возмущение показателя преломления света, вызванное возмущением плотности. Приведены конкретные порядки величины скорости при свободной конвекции, относительные величины изменения плотности, а также выражение для числа Грасгофа как параметра интенсивности течений при свободной конвекции. Материалы работы могут быть использованы в научном приборостроении при рассмотрении взаимодействия оптико-акустических и оптико-конвективных процессов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Сперанский А.В., Тотышев К.В. Алгоритмы определения параметров схем теневого фотографирования. Саровский физико-технический ин-т НИЯУ МИФИ, 2013. 95 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
3. Серрин Дж. Математические основы классической механики. М.: Иностран. лит-ра, 1963. 256 с.
4. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 288 с.
5. Шарфарец Б.П., Князьков Н.Н., Пашовкин Т.Н. О математической постановке задачи движения вязких сжимаемых теплопроводящих жидкостей в термоупругой трубке // Научное приборостроение. 2013. Т. 23, № 4. С. 85–90. URL: <http://213.170.69.26/mag/2013/abst4.php#abst11>.
6. Шарфарец Б.П., Шарфарец Е.Б. Некоторые особенности моделирования микрофлюидных процессов // Научное приборостроение. 2013. Т. 23, № 4. С. 91–94. URL: <http://213.170.69.26/mag/2013/abst4.php#abst12>.
7. Шарфарец Б.П. О решении линеаризованной задачи движения вязкой теплопроводной жидкости в термоупругой трубке с помощью несвязанных уравнений Кирхгофа // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 2. С. 27–32. URL: <http://213.170.69.26/mag/2014/abst2.php#abst4>.
8. Шарфарец Е.Б., Шарфарец Б.П. Свободная конвекция. Учет некоторых физических особенностей при моделировании конвективных течений с помощью вычислительных пакетов // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 2. С. 43–51. URL: <http://213.170.69.26/mag/2014/abst2.php#abst6>.
9. Князьков Н.Н., Шарфарец Б.П., Шарфарец Е.Б. Базовые выражения, используемые в электрокинетических явлениях. Обзор // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 4. С. 13–21. URL: <http://213.170.69.26/mag/2014/abst4.php#abst2>.
10. Шарфарец Б.П. Обзор теории явлений переноса и поверхностных явлений применительно к решению некоторых задач научного приборостроения // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 3. С. 45–64. URL: <http://213.170.69.26/mag/2015/abst3.php#abst6>.
11. Шарфарец Б.П., Шарфарец Е.Б., Князьков Н.Н., Пашовкин Т.Н. Некоторые особенности численного решения задач термоупругости и гидродинамики теплопроводящей сжимаемой вязкой жидкости с помощью универсальных пакетов // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 3. С. 57–63. URL: <http://213.170.69.26/mag/2016/abst3.php#abst8>.
12. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959. 700 с.
13. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
14. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1979. 712 с.
15. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
16. Гебхарт Б., Джалаурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. Т. 1 и 2. М.: Мир, 1991. 678 с. (т. 1); 528 с. (т. 2).
17. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Общий курс физики. Молекулярная физика. М.: Наука, 1976. 480 с.

**Институт аналитического приборостроения РАН,  
г. Санкт-Петербург**

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,  
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 13.10.2017

## INTERACTION OF LIGHT WITH A GENERALIZED THERMO-ACOUSTIC FIELD

**B. P. Sharfarets**

*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*

The influence of the acoustic field and the field of free convection caused by a thermal source on the refractive index of light in a homogeneous continuous medium is considered. The corresponding expressions for both fields are given, allowing one to calculate the perturbations of the density of the medium, and, consequently, the perturbation of the refractive index of light caused by density perturbation. Specific orders of magnitude of the velocity for free convection are given, the relative values of the density change, and also the expression for the Grashof number as a parameter of the flow intensity for free convection.

*Keywords:* refractive index of light, free convection, Boussinesq equations, Grashof number

### REFERENCES

1. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Speranskiy A.V., Totyshev K.V. *Algoritmy opredeleniya parametrov schem te-nevogo fotografirovaniya* [Algorithms of determination of parameters of diagrams of shadow photography]. Sarovskiy fiziko-tekhnicheskii in-t NIYaU MIFI, 2013. 95 p. (In Russ.).
2. Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. V. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 736 p. (In Russ.).
3. Serrin J. *Mathematical principles of classical fluid mechanics*. Berlin, 1959 (Russ. ed.: Serrin Dzh. *Matematicheskie osnovy klassicheskoy mekhaniki zhidkosti*. Moscow, In. lit. Publ., 1963. 256 p.).
4. Rudenko O.V., Soluyan S.I. *Teoreticheskie osnovy nelineynoy akustiki* [Theoretical fundamentals of non-linear acoustics]. Moscow, Nauka Publ. 288 p. (In Russ.).
5. Sharfarets B.P., Knvazkov N.N., Pashovkin T.N. [About mathematical tasking for movement of viscous compressible heat-conducting fluids in thermoelastic tube]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2013, vol. 23, no. 4, pp. 85–90. (In Russ.). URL: <http://213.170.69.26/en/mag/2013/abst4.php#abst11>.
6. Sharfarets B.P., Sharfarets E.B. [Some particular qualities of simulation for microfluidic processes]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2013, vol. 23, no. 4, pp. 91–94. (In Russ.). URL: <http://213.170.69.26/en/mag/2013/abst4.php#abst12>.
7. Sharfarets B.P. [About the solution of the linearized problem of movement of viscous heat-conducting liquid in the thermoelastic tube by means of Kirchhoff's untied equations]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 2, pp. 27–32. (In Russ.). URL: <http://213.170.69.26/en/mag/2014/abst2.php#abst4>.
8. Sharfarets E.B., Sharfarets B.P. [Free convection. Accounting for certain physical features when simulation software using for modeling convection flows]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 2, pp. 43–51. (In Russ.). URL: <http://213.170.69.26/en/mag/2014/abst2.php#abst6>.
9. Knvazkov N.N., Sharfarets B.P., Sharfarets E.B. [The basic expressions used in the electrokinetic phenomena (review)]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 4, pp. 13–21. (In Russ.). URL: <http://213.170.69.26/mag/2014/abst4.php#abst2>.
10. Sharfarets B.P. [An overview of the theory of transport phenomena and surface phenomena in relation to the solution of some problems of analytical instrumentation]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 3, pp. 45–64. Doi: 10.18358/np-25-3-i4564. (In Russ.).
11. Sharfarets B.P., Sharfarets E.B., Knvazkov N.N., Pashovkin T.N. [Some features of the numerical solution of tasks of thermoelasticity and hydrodynamics heat-conducting compressed viscous liquid by means of universal packages]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 3, pp. 57–63. Doi: 10.18358/np-26-3-i5763. (In Russ.).
12. Levich V.G. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* [Physical and chemical hydrodynamics]. Moscow, GIFML Publ., 1959. 700 p. (In Russ.).
13. Gershuni G.3., Zhuchovizkiy E.M. *Konvektivnaya ustoychivost' neshimaemoy zhidkosti* [Convective stability of incompressible liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 392 p. (In Russ.).
14. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Uraveneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki* [Partial equations of mathematical physics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979. 712 p. (In Russ.).
15. Isakovich M.A. *Obschaya akustika* [General acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 496 p. (In Russ.).
16. Gebchart B., Dzhaluruya Y., Machadzhyan R., Sammakiya B. *Svobodnokonvektivnye techeniya, teplo- i mas-soobmen. T. 1 i 2* [Freely convective currents, warm and mass exchange. V. 1 and 2]. Moscow, Mir Publ., 1991. 678 p. (v. 1); 528 p. (v. 2). (In Russ.).
17. Kikoin A.K., Kikoin I.K. *Obschiy kurs fiziki. Molekulyarnaya fizika* [General course of physics. Molecular physics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 480 p. (In Russ.).