МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 534.874+534.26

© Б. П. Шарфарец

О СООТНОШЕНИЯХ, СВЯЗЫВАЮЩИХ ПОЛЕ РАССЕЯНИЯ С АМПЛИТУДОЙ РАССЕЯНИЯ

В работе рассмотрены различные функциональные соотношения между основными параметрами процесса рассеяния: полем рассеяния и амплитудой рассеяния. Это соотношения либо геометрооптического типа (представление в виде ряда Аткинсона—Уилкокса), либо связь через представление обеих функций в ряды по сферическим функциям (мультипольные представления), либо в виде интегрального представления (представление Девани—Вольфа). Такое многообразие представлений возможно вследствие аналитических свойств обеих функций: поле рассеяния является излученным решением уравнения Гельмгольца, любое дважды дифференцируемое решение которого есть аналитическая функция своих аргументов, а также тем, что амплитуда рассеяния является целой аналитической функцией своих аргументов. Приведен также аналог разложения типа Аткинсона—Уилкокса для обобщенной амплитуды рассеяния, что возможно только в случае, когда первичное падающее сложное поле является излученным решением уравнения Гельмгольца. Результирующая амплитуда рассеяния в этом случае также подчиняется уравнению Гельмгольца. Показано, что волновая функция Герглотца с точностью до постоянного множителя совпадает с разложением Уиттекера. Приведенные результаты весьма полезны для приложений, и, в частности, в задачах научного приборостроения.

Кл. сл.: амплитуда рассеяния, разложение Аткинсона—Уилкокса, представление Уиттекера, представление Девани—Вольфа, падающая плоская волна, каноническая амплитуда рассеяния, результирующая амплитуда рассеяния, волновая функция Герглотца

ВВЕДЕНИЕ

В прямых и обратных задачах классического рассеяния волновых полей, а также квантовомеханического рассеяния частиц большое внимание уделяется двум функциям: самому полю рассеяния и его характеристике дальнего поля — амплитуде рассеяния (ар) (scattering amplitude, или far field pattern в английской транскрипции). Несмотря на то что ар является асимптотической характеристикой поля рассеяния в дальней зоне, существует достаточно много соотношений, связывающих строго функционально поле рассеяния вне рассеивателя с его ар. Более того, оказалось, что подобные соотношения верны и для различных связанных между собой амплитуд рассеяния. Дело в том, что возникает необходимость вычисления ар включения как в поле плоской волны, так и в сложном первичном поле, отличном от поля плоской бегущей волны (результирующей ар). В работе [1] был предложен алгоритм вычисления результирующей ар на включении при падении на него сложного поля, вытекающий из установленного в ней факта о том, что результирующая ар удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца по переменным, совпадающим с координатами включения. Это позволило получить простые асимптотические ряды для вычисления результирующей ар через ар в поле плоских волн. В работах [6–10] полученная в [1] теория была апробирована на различных достаточно нетривиальных примерах рассеяния волн как в теории радиационного давления [6], так и в различных случаях теории многократного рассеяния [7–10] и показала свою эффективность. Решению этой задачи способствовала достаточно полная изученность аналитических свойств амплитуды рассеяния [5], [11, § 3.2.4], [12–15 и др.].

Ряды, полученные в [1], по структуре оказались аналогичными рядам, использующимся при асимптотических оценках собственно волновых полей, удовлетворяющих вне некоторой конечной области однородному уравнению Гельмгольца и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности. Эти разложения определяются теоремой Аткинсона—Уилкокса и связывают между собой волновые поля и отвечающие им характеристики дальнего поля, т. е. диаграммы направленности или амплитуды рассеяния (см. [2–4], [5, с. 84]). Теорема Аткинсона—Уилкокса является, по-видимому, первым прецедентом, когда обе характеристики (поле рассеяния и его ар) были связаны функционально.

К настоящему времени появился целый цикл работ, посвященных решению обратных задач рассеяния (см. работу [13] и обширную библиографию в ней). При их решении эффективно используется некоторая функция, называемая *волновой функцией Герглотца* (ВФГ), которая оказывается тесно связанной с техникой, применявшейся в работе [1]. Однако значительно ранее было предложено разложение Уиттекера [16], [17, с. 247–250], которое фактически совпадает с ВФГ, а в работе [18] было предложено разложение авторов Девани—Вольфа, расширившее область преобразования Уиттекера с поверхности единичной сферы на комплексную область углов сферических координат, связывающее волновое решение уравнения Гельмгольца с его амплитудой рассеяния. Разложение Девани—Вольфа существенно отличается от разложения Аткинсона—Уилкокса тем, что первое связывает волновое поле с амплитудой рассеяния (диаграммой направленности) посредством интегрального преобразования, а второе посредством ряда.

Изучение взаимосвязей всех упомянутых подходов и учет сильных сторон каждого из них позволяет качественно решать важнейшую задачу теории рассеяния — нахождение всевозможных связей между полем рассеяния и амплитудой рассеяния, что весьма актуально в теории рассеяния в целом и для применения к задачам научного приборостроения по примеру работ [6–10] в частности.

Постановка проблемы

Настоящая работа посвящена изучению связей разложений Уиттекера, Девани—Вольфа, аппарата ВФГ и изложенного в [1]. Кроме того, приведен оригинальный вывод связи двух важнейших характеристик процесса рассеяния: поля рассеяния и амплитуды рассеяния через разложение Девани—Вольфа для более общего случая рассеяния, чем это проделано в [18].

В работе для удобства читателя дается краткая информация о свойствах ВФГ, разложений Аткинсона—Уилкокса, Уиттекера и Девани—Вольфа.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Общие положения

Рассмотрим акустический случай рассеяния на примере идеального жидкого однородного безграничного пространства $\mathbf{x} \in R^3 \setminus D$, в конечной области D которого присутствует либо проницаемое неоднородное возмущение акустических свойств среды, либо некоторое непроницаемое неоднородное включение. Поэтому далее в соответствии с этим будем различать соответственно поверхностное и объемное рассеяние. Постановка задачи акустического рассеяния для обоих этих случаев приведена, например, в работе [13, с. 2].

Далее приведем коротко математическую постановку задачи, которая принимается в данной работе за основу. Пусть идеальное жидкое пространство, в котором находится включение, полагается однородным с плотностью ρ и скоростью c. Рассматривается скалярная функция $u(\mathbf{x})$, характеризующая акустическое поле. В пространстве подразумевается наличие суммы произвольной падающей $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ и рассеянной от включения $u_{\text{s}}(\mathbf{x})$ гармонических волн с фактором $e^{-\mathrm{i}\omega t}$, который далее опускается

$$u(\mathbf{x}) = u_{\text{inc}}(\mathbf{x}) + u_{\text{s}}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Включение расположено в области D, внутри которой находится начало координат. Рассеянное поле в волновой зоне, как известно, описывается выражением [13, с. 21]

$$u_{\text{s}}(\mathbf{x}) = u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) \frac{e^{\mathrm{i}k|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} + o(|\mathbf{x}|^{-1}), \tag{2}$$

где $k = \omega / c$ — волновое число; $\mathbf{x} = (x, y, z) = (r, \theta, \varphi)$ — точка наблюдения соответственно в декартовых и сферических координатах; $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ — вектор на единичной сфере, направленный в точку наблюдения; $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ — ар включения, характеризующая угловое распределение поля рассеяния на включении при его облучении произвольным полем $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$. Обычно выделяется канонический случай плоской падающей волны $u_{\text{inc}}(\mathbf{x}) = e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$. Здесь $\mathbf{d} = (\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\alpha)$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с волновым вектором плоской волны. В этом случае фиксируется зависимость рассеянной волны $u_{\text{s}}(\mathbf{x}) = u_{\text{s}}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ от направления распространения падающей плоской волны единичной амплитуды и нулевой фазы, и, следовательно, аналогичная зависимость ар $u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) = u_\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$, которую назовем для удобства канонической ар. Очевидно, что вектор $\hat{\mathbf{x}}$ в функции $u_\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$ привязан к точке расположения включения.

В силу линейности задачи очевидно, что в случае, когда падающая волна представляет собой совокупность плоских волн со спектром $g(\mathbf{d})$

$$u_{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega'} g(\mathbf{d}) e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}s(\mathbf{d}), \tag{3}$$

ар вычисляется следующим образом (см., например, [16] для излученных решений, [13, с. 56] для целых решений, определение которых приведено ниже):

$$u_{\infty}(\hat{\mathbf{x}}) = \int_{\Omega'} g(\mathbf{d}) u_{\infty}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) \, \mathrm{d}s(\mathbf{d}) . \tag{4}$$

Здесь Ω' — область определения спектра падающей волны; $\mathrm{d}s(\mathbf{d}) = \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$ — элемент поверхности единичной сферы.

Определение: Если $u(\mathbf{x})$ является решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0$$

в области $\mathbf{x} \in R^3 \setminus D$, где $D \in R^3$ — конечная область и удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - \mathrm{i}ku(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right),$$

то такое решение называется *излученным решением* [13, с. 19]. Если $u(\mathbf{x})$ является решением уравнения Гельмгольца во всем пространстве $\mathbf{x} \in R^3$, то такое решение называется *целым решением* [13, с. 20].

Известно [16–18], что если функция $u(\mathbf{x})$ является целым решением однородного уравнения Гельмгольца, то в ее представлении по плоским волнам (3) участвуют только однородные плоские волны и интегрирование в (3), (4) осуществляется по поверхности единичной сферы $\Omega' = \Omega$ (область видимости). Если же $u(\mathbf{x})$ является излученным решением уравнения Гельмгольца, то интегрирование в (3), (4) происходит как в области видимости (однородные плоские волны), так и вне ее (неоднородные плоские волны evanescent wave).

Далее приведем необходимые сведения по всем рассматриваемым разложениям.

Теорема разложимости Аткинсона—Уилкокса [2–4], [5, с. 84], [15]

Приведем теорему разложимости Аткинсона—Уилкокса в редакции работы [5, с. 84].

Теорема 3.6. Пусть $u \in C^2\left(R^3 \setminus \bar{D}\right)$ является решением однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющим условию излучения Зоммерфельда. Пусть R_0 таково, что $\Omega_{R_0} = \left\{\mathbf{x} \in R^3, |\mathbf{x}| = R_0\right\} \subset R^3 \setminus \bar{D}$, и пусть (r, θ, φ) — сферические координаты точки $\mathbf{x}$. Тогда $u(\mathbf{x})$ представимо в виде разложения

$$u(\mathbf{x}) = \frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \varphi)}{r^n},$$

которое справедливо при $r \ge R_0$ и сходится абсолютно и равномерно по r, θ, φ. Этот ряд можно почленно дифференцировать по r, θ, φ любое число раз, и полученные дифференцированием ряды также сходятся абсолютно и равномерно.

Элементы последнего ряда находятся из рекурсии [5, с. 86]

$$2\mathrm{i}knF_n(\theta, \varphi) = \\ = \mathrm{B}\left(F_{n-1}(\theta, \varphi)\right) + n(n-1)F_{n-1}(\theta, \varphi), \\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $\mathrm{B} = \dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta} \dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ — оператор Бельтрами на сфере; $F_0(\theta, \varphi)$ — ар или диаграмма направленности поля $F_0(\theta, \varphi) = u_{\infty}(\hat{\mathbf{x}}) = u_{\infty}(\theta, \varphi)$.

Перепишем последние ряд и рекурсию в виде геометрооптического анзаца

$$u(\mathbf{x}) = \frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \varphi)}{(kr)^n},$$

$$F_n(\theta, \varphi) = \\ = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta} \dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) + n(n-1)}{2\mathrm{i}n} \times \\ \times F_{n-1}(\theta, \varphi), \\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Очевидно, что приведенное разложение связывает волновое поле, являющееся излученным решением уравнения Гельмгольца, с его ар.

Разложение результирующей ар в сложном падающем поле

Для эффективного вычисления суммарной ар в [1] предложен аналог теоремы разложимости Аткинсона—Уилкокса, представленный следующими выражениями, совершенно идентичными по структуре ряду и рекуррентной формуле из теоремы разложимости Аткинсона—Уилкокса, приведенным выше,

$$u_\infty(\theta,\varphi,R_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)}{(kR_0)^n},$$

где функции $F_n(\theta_0,\varphi_0)$ с необходимыми параметрами (θ,φ) определяются из следующего рекуррентного соотношения

$$F_n=\left(\frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\theta_0}\left(\sin\theta_0\frac{\partial}{\partial\theta_0}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_0{}^2}+n(n-1)\right)(2\,i\,n)^{-1}F_{n-1},$$

а F_0 равна

$$F_0(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)=\hat{u}(\theta_0,\varphi_0)u_\infty(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0).$$

Здесь $u_\infty(\theta,\varphi,R_0,\theta_0,\varphi_0)$ — результирующая ар; $\mathbf{x}_0=(R_0,\theta_0,\varphi_0)$ — координаты включения; $\hat{u}(\theta_0,\varphi_0)$ значение диаграммы направленности источника первичного поля, находящегося в начале координат по направлению (θ_0,φ_0) на включение; $u_\infty(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)$ — каноническая ар включения при падающей плоской волне с единичным вектором $\mathbf{d}_0=(1,\theta_0,\varphi_0)$.

Такое разложение *справедливо, когда первичное падающее поле является излученным решением обычного уравнения Гельмгольца*, и тогда сама обобщенная ар оказывается излученным решением уравнения Гельмгольца по переменным, совпадающим с координатами включения. Этот вывод следует из необходимых условий теоремы разложимости Аткинсона—Уилкокса, приведенной выше.

Таким образом, приведенное разложение связывает результирующую ар (аналог поля рассеяния в разложении Аткинсона—Уилкокса) с ар падающего поля и канонической ар включения (аналог ар в разложении Аткинсона—Уилкокса).

Функция Герглотца

Далее изложим основные определения и свойства волновой функции Герглотца (Herglotzwave function) [13, 20, 21].

Волновая функция Герглотца (ВФГ) $v(\mathbf{x})$ имеет следующее определение [13, с. 55]

$$v(\mathbf{x})=\int_\Omega e^{ik\mathbf{x}\cdot\mathbf{d}}g(\mathbf{d})\mathrm{d}s(d),\ \mathbf{x}\in R^3, \tag{5}$$

где $g\in L^2(\Omega)$; Ω — поверхность единичной сферы; $\mathbf{d}=(\sin\alpha\cos\beta,\sin\alpha\sin\beta,\cos\alpha)$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с волновым вектором плоской волны, лежащий на поверхности единичной сферы Ω; $g(\mathbf{d})$ — ядро Герглотца функции $v(\mathbf{x})$. В [13, с. 55] отмечается, что для заданного $g\in L^2(\Omega)$ функция

$$v(\mathbf{x})=\int_\Omega e^{-ik\mathbf{x}\cdot\mathbf{d}}g(\mathbf{d})\mathrm{d}s(d),\ \mathbf{x}\in R^3, \tag{6}$$

также определяет волновую функцию Герглотца.

Для заданной функции $g\in L^2(\Omega)$ решение проблемы рассеяния при падающей волне

$$v_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x})=\int_\Omega e^{ik\mathbf{x}\cdot\mathbf{d}}g(\mathbf{d})\mathrm{d}s(d),\ \mathbf{x}\in R^3 \tag{7}$$

дается выражением

$$v_{\mathrm{s}}(\mathbf{x})=\int_\Omega u_{\mathrm{s}}(\mathbf{x},\mathbf{d})g(\mathbf{d})\mathrm{d}s(d),\ \mathbf{x}\in R^3\setminus\bar{D} \tag{8}$$

и характеризуется следующей амплитудой рассеяния:

$$v_\infty(\hat{\mathbf{x}})=\int_\Omega u_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d})g(\mathbf{d})\mathrm{d}s(d),\ \hat{\mathbf{x}}\in\Omega. \tag{9}$$

Очевидно, что выражения (3) и (4) эквивалентны соответственно выражениям (7) и (9) при рассмотрении области видимости, т. е. на единичной сфере Ω. Отметим, что выражения (5) и (9) приведены также в [1, 19] независимо и для всей области определения, а не только для области видимости.

Подчеркнем, что выражения (5)–(9) имеют прозрачный физический смысл, обусловленный линейностью поставленной задачи рассеяния. Так, выражения (5), (6) характеризуют сложную падающую волну, представленную в виде разложения по однородным плоским волнам (в [1] такое представление получено для всего спектра однородных и неоднородных плоских волн), что, собственно, подтверждает выражение (7). Рассеянная волна, отвечающая падающей волне (5), выражается формулой (8), а ар поля (8) определяется выражением (9).

Для случая акустических волн ВФГ (5), (6) $v(\mathbf{x})$ является целым решением уравнения Гельмгольца [13, с. 55], [20]

$$\Delta v+k^2v=0. \tag{10}$$

Кроме того, для функций $u_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d})$ из (9) справедлив принцип взаимности для рассеяния, который выглядит как при объемном рассеянии, так и при многообразных краевых условиях на границе рассеивателя при поверхностном рассеянии следующим образом [11, с. 261], [13, с. 54, 55, 223, 285], [21], [22, с. 127]

$$u_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d}) = u_\infty(-\mathbf{d},-\hat{\mathbf{x}}). \quad (11)$$

Это свойство тесно связано со следующей симметрией функции Грина для оператора Гельмгольца (называемой также фундаментальным решением оператора Гельмгольца) [23, с. 746]:

$$\mathrm{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathrm{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}),$$

где $\mathrm{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и $\mathrm{G}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ определяются уравнениями

$$\Delta_{\mathbf{x}}\,\mathrm{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + k^2\,\mathrm{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$\Delta_{\mathbf{y}}\,\mathrm{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + k^2\,\mathrm{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

Здесь $\Delta_{\mathbf{x}}$ и $\Delta_{\mathbf{y}}$ — операторы Лапласа, действующие по переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно. Фундаментальное решение оператора Гельмгольца при принятом выше условии излучения Зоммерфельда равно [24, с. 119, 204]

$$\mathrm{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathrm{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathrm{G}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad (12)$$

(см. подробнее [23, с. 746–752]).

Отметим, что аналоги (5), (6), полученные в [1, 19], являются излученными решениями уравнения Гельмгольца.

О свойствах амплитуды рассеяния
[5], [11, § 3.2.4], [12–15 и др.]

В случае простейшей задачи объемного акустического рассеяния поле в области D подчиняется возмущенному уравнению Гельмгольца (см., например, [13, с. 2])

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 n(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = 0, \quad (13)$$

где $n(\mathbf{x}) = c^2 / c^2(\mathbf{x})$ — показатель преломления; $c(\mathbf{x})$ — скорость звука, $\mathbf{x}\in D$. В случае, когда падающая волна плоская $u_{\text{inc}}(\mathbf{x}) = e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$, решение задачи рассеяния ищется из интегрального уравнения Липпмана—Швингера [13, с. 5]

$$u(\mathbf{x},\mathbf{d}) = e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}} + k^2\int_D \mathrm{G}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) m(\mathbf{y}) u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}, \quad (14)$$

где $u(\mathbf{x},\mathbf{d})$ определяется в (1) (в поле $u(\mathbf{x},\mathbf{d})$ появился параметр $\mathbf{d}$, отражающий неявную зависимость поля u, а значит, и поля рассеяния u_{s} и канонической ар u_∞ от направления распространения плоской волны $e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$); $m(\mathbf{y}) = 1 - n(\mathbf{y})$; $\mathrm{G}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ определяется из (12). Из (1) и (14) видно, что поле рассеяния $u_{\mathrm{s}}(\mathbf{x})$ равно

$$u_{\mathrm{s}}(\mathbf{x},\mathbf{d}) = k^2\int_D \mathrm{G}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) m(\mathbf{y}) u(\mathbf{y},\mathbf{d})\,\mathrm{d}\mathbf{y}. \quad (15)$$

Получение асимптотики (2) из (14), (15) приводит к следующему виду канонической ар [13, с. 10]:

$$u_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d}) = -\frac{k^2}{4\pi}\int_D e^{-\mathrm{i}k\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}} m(\mathbf{y}) u(\mathbf{y},\mathbf{d})\,\mathrm{d}y. \quad (16)$$

В случае поверхностного рассеяния при падении плоской волны $e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$ каноническая ар поля $u_{\mathrm{s}}(\mathbf{x},\mathbf{d})$ в общем случае определяется выражением [22, с. 499], [13, с. 20]

$$u_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d}) = \\ = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\left\{u(\mathbf{x},\mathbf{d})\frac{\partial e^{-\mathrm{i}k\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} - \frac{\partial u(\mathbf{y},\mathbf{d})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})}e^{-\mathrm{i}k\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}\right\}\mathrm{d}s(y).$$

Если $u(\mathbf{x},\mathbf{d})$ обозначает давление $p(\mathbf{x},\mathbf{d})$, то для $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ из (2) справедливо равенство [11, с. 109]

$$u_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d}) = -\frac{1}{4\pi}\times \\ \times\int_{\partial D}\{\mathrm{i}k\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})p(\mathbf{y},\mathbf{d}) + \mathrm{i}\omega\rho\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{y},\mathbf{d})\}e^{-\mathrm{i}k\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}}\,\mathrm{d}s(y).$$

Здесь $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ — вектор колебательной скорости на поверхности ∂D.

Соотношения в виде рядов по сферическим функциям (мультипольные представления)

Справедливо следующее утверждение [13, с. 34].

Пусть $u(\mathbf{x})$ — излученное решение уравнения Гельмгольца вне шара $|\mathbf{x}|\le R$, $R>0$. Тогда для $u(\mathbf{x})$ справедливо разложение по сферическим функциям

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_n^{\ m}\,\mathrm{h}_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)Y_n^{\ m}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (18)$$

Полю (18) отвечает ар [13, с. 35]

$$u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}^{n+1}}\sum_{m=-n}^{n} a_n^{\ m}Y_n^{\ m}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (19)$$

Здесь $\mathrm{h}_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)$ — сферическая функция Ханкеля первого рода с асимптотикой при большом аргументе $\mathrm{h}_n^{(1)}(kr) = \frac{1}{kr}(-\mathrm{i})^{(n+1)}e^{\mathrm{i}kr}\left\{1 + O\left(\frac{1}{kr}\right)\right\}$; $a_n^{\ m}$ —

искомые коэффициенты; $Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})$ — сферические функции на единичной сфере, равные $Y_n^m(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2n+1(n-|m|)!}{4\pi(n+|m|)!}}P_n^{|m|}(\theta)e^{\mathrm{i}m\varphi}$; $P_n^{|m|}(\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Выражение (19) следует из (18) при подстановке в нем асимптотик функций $\mathrm{h}_n^{(1)}(kr)$ при $r\to\infty$ и сравнении с выражением (2), являющимся фактически математическим определением ар.

В силу ортонормальности системы функций $Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})$ на единичной сфере из (19) получаем

$$a_n^m=k\,\mathrm{i}^{n+1}\int_\Omega u_\infty(\hat{\mathbf{x}})\left(Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})\right)^*\mathrm{d}s(\mathbf{d})=$$
$$=k\mathrm{i}^{n+1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u_\infty(\theta,\varphi)\left(Y_n^m(\theta,\varphi)\right)^*\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Звездочка в верхнем индексе в последнем выражении означает комплексное сопряжение.

В случае, когда падающая волна является плоской $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})=e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$, в выражениях (18) и (19) вместо $u(\mathbf{x})$ и $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ должны фигурировать соответственно функции $u(\mathbf{x},\mathbf{d})$ и $u_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d})$.

Согласно [13, с. 30], элементарными излученными решениями уравнения Гельмгольца являются следующие формы:

$$\Pi_n^m(\mathbf{x})=\mathrm{h}_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)Y_n^m(\theta,\varphi), \tag{20}$$

а элементарными целыми решениями уравнения Гельмгольца — элементарные формы

$$\Lambda_n^m(\mathbf{x})=\mathrm{j}_n(k|\mathbf{x}|)Y_n^m(\hat{\mathbf{x}}), \tag{21}$$

являющиеся действительными составляющими форм (20) для излученного решения.

Разложение Уиттекера и Девани—Вольфа [18]

РазложениеУиттекера. Уиттекером установлена следующая формула разложения по плоским волнам для целых решений однородного уравнения Гельмгольца, являющаяся преобразованием Фурье на сфере единичного радиуса:

$$u(\mathbf{x})=\frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta\int_0^{\pi}\hat{u}(\mathbf{d})e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha, \tag{22}$$

где $\mathbf{d}=(\sin\alpha\cos\beta,\sin\alpha\sin\beta,\cos\alpha)$. Причем для элементарных целых решений $\Lambda_n^m(\mathbf{x})=$ $=\mathrm{j}_n(k|\mathbf{x}|)Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})$ имеет место равенство

$$\Lambda_n^m(\mathbf{x})=\mathrm{j}_n(k|\mathbf{x}|)Y_n^m(\theta,\varphi)=$$
$$=(-\mathrm{i})^n\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta\int_0^{\pi}Y_n^m(\alpha,\beta)e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha. \tag{23}$$

Тогда, если разложить образ $\hat{u}(\mathbf{d})$ по сферическим гармоникам

$$\hat{u}(\mathbf{d})=\hat{u}(\alpha,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(-\mathrm{i})^n b_n^m Y_n^m(\alpha,\beta), \tag{24}$$

то окажется, что прообраз равен

$$u(\mathbf{x})=k\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}b_n^m\Lambda_n^m(\mathbf{x}). \tag{25}$$

Для b_n^m из (24) вытекает

$$b_n^m=\mathrm{i}^n\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta\int_0^{\pi}\left(Y_n^m(\alpha,\beta)\right)^*\hat{u}(\alpha,\beta)\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha. \tag{26}$$

Как видно, целому решению (25) соответствует образ (24) с коэффициентами, определяемыми из (26). Разложение осуществляется по однородным плоским волнам с углами распространения из круга видимости $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, что отвечает компонентам волнового числа $k_x=k\sin\theta\cos\varphi$ и $k_y=k\sin\theta\sin\varphi$, не превосходящим k, т. е. лежащим внутри круга $k_x^2+k_y^2\le k^2$.

Равенство (23) означает, что с точностью до постоянного коэффициента функция $Y_l^m(\alpha,\beta)$ является фурье-образом функции $\mathrm{j}_l(kr)Y_l^m(\theta,\varphi)$ в круге видимости.

Сравнение функции Герглотца (5) и преобразования Уиттекера (22) с учетом того, что ds в (5) равно $\mathrm{d}s=\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$, показывает их совпадение с точностью до постоянного множителя.

Разложение Девани—Вольфа [18]. Преобразование Фурье от функции $Y_l^m(\alpha,\beta)$ на всей плоскости $\left(k_x,k_y\right)\in R^2$ равно [18]

$$\tilde{\Pi}_n^m(\mathbf{x})=\mathrm{h}_n^{(+)}(k|\mathbf{x}|)Y_n^m(\theta,\varphi)=$$
$$=(-\mathrm{i})^n\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\infty}Y_n^m(\alpha,\beta)e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha. \tag{27}$$

Показатель экспоненты в (27) равен $\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}=|\mathbf{x}|\left(\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)\pm\cos\theta\cos\alpha\right)$; знак + соответствует положительной ординате точки наблюдения $\mathbf{x}$, а отрицательной — знак –.

В [18] используется версия $\mathrm{h}_n^{(+)}(k|\mathbf{x}|)$ сферической функции Ханкеля, равная $\mathrm{h}_n^{(+)}(kr) = = \mathrm{i}\,\mathrm{h}_n^{(1)}(kr)$. Следовательно $\tilde{\Pi}_n^{\,m}(\mathbf{x}) = \mathrm{i}\,\Pi_n^{\,m}(\mathbf{x})$. Перепишем (27) в терминах функций $\mathrm{h}_n^{(1)}(kr)$, внеся $(-\mathrm{i})^{n+1}$ под интеграл:

$$\Pi_n^{\,m}(\mathbf{x}) = \mathrm{h}_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)Y_n^{\,m}(\theta,\varphi) =$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\infty} (-\mathrm{i})^{n+1} Y_n^{\,m}(\alpha,\beta) e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha. \quad (27а)$$

Сформируем в левой части (27а) поле (18), проведя соответствующее суммирование слева и справа в (27а), а также умножив и поделив справа на k:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_n^{\,m}\,\mathrm{h}_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)Y_n^{\,m}(\hat{\mathbf{x}}) =$$

$$= \frac{k\,\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\infty} \left\{\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} (-\mathrm{i})^{n+1} a_n^{\,m} Y_n^{\,m}(\alpha,\beta)\right\}\times$$

$$\times e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$

Или иначе, учитывая (18) и (19):

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\infty} u_\infty(\mathbf{d}) e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,. \quad (28)$$

Последнее выражение, связывающее ар u_∞ с полем рассеяния $u(\mathbf{x})$, хорошо известно (см., например, [22, с. 499, 500], [11, с. 122], [12]). Оно обычно записывается в двух формах: в сферических и в декартовых координатах:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\infty} \hat{u}(\mathbf{d}) e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{u}(k_x,k_y)}{k_z} e^{\mathrm{i}\left(k_x x + k_y y \pm k_z z\right)} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y.$$

Здесь $\hat{u}(\mathbf{d}) = u_\infty(\mathbf{d})$, а знак сверху формально отражает факт того, что функция $\hat{u}(\mathbf{d})$ является прообразом функции $u(\mathbf{x})$; $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^{\,2} - k_y^{\,2}} = = k\cos\alpha$ — вертикальная составляющая волнового вектора; в экспоненте знак $+$ соответствует положительной ординате точки наблюдения $\mathbf{x}$, а отрицательной знак $-$.

Замечание. Отметим, что в настоящей работе основное выражение (28) разложения Девани—Вольфа получено на основе выражений (18) и (19), одинаково справедливых как для объемных, так и поверхностных рассеивателей в области $\mathbf{x} \in R^3 \setminus D$, в то время как в [18] оно получено только для случая объемного рассеяния.

ВЫВОДЫ

Выше приведены и рассмотрены различные функциональные соотношения между ключевыми параметрами процесса рассеяния: полем рассеяния и амплитудой рассеяния. Таковыми соотношениями может быть либо соотношение геометрооптического типа (разложение в виде ряда Аткинсона—Уилкокса), либо связь через представление обеих функций в ряды по сферическим функциям (мультипольные представления), либо в виде интегрального представления (разложение Девани—Вольфа). В первых двух случаях область определения обеих функций ограничивается т. н. областью видимости, в третьем случае область определения полярного угла распространяется на всю комплексную плоскость. Такое многообразие представлений возможно еще и вследствие аналитических свойств обеих функций: поле рассеяния является излученным решением уравнения Гельмгольца, любое дважды дифференцируемое решение которого есть аналитическая функция своих аргументов [5, с. 83], а также тем, что амплитуда рассеяния $u_\infty(\theta,\varphi)$ является целой аналитической функцией своих аргументов [11, §3.2.4, с. 126–128]. Приведен также аналог разложения типа Аткинсона—Уилкокса для обобщенной амплитуды рассеяния, что возможно только в случае, когда падающее сложное поле является излученным решением уравнения Гельмгольца. В этом случае результирующая амплитуда рассеяния также подчиняется уравнению Гельмгольца. Показано, что волновая функция Герглотца с точностью до постоянного множителя совпадает с разложением Уиттекера. Приведенные результаты весьма полезны для приложений, и в частности, в задачах научного приборостроения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарфарец Б.П.* О возможности эффективного вычисления амплитуды рассеяния на включении в сложном поле // Акуст. журн. 2010. Т. 56, № 2. С. 166–171.
2. *Atkinson F.V.* On Sommerfeld's "Radiation conditions" // Philos. Mag. 1949. Vol. 40. P. 645–651. Doi: 10.1080/14786444908561291.
3. *Wilcox C.H.* Ageneralization of the orems of Rellichand Atkinson // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. Vol. 7. P. 271–276. Doi: 10.1090/S0002-9939-1956-0078912-4.
4. *Wilcox C.H.* An expansion theorem for electromagnetic

fields // Comm. Pure Appl. Math. 1956. Vol. 9. P. 115–134. Doi: 10.1002/cpa.3160090202.
5. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
6. *Шарфарец Б.П.* Радиационное давление при рассеянии произвольного поля на включении сложной формы // Акуст. журн. 2010. Т. 56, № 6. С. 767–772.
7. *Шарфарец Б.П.* Приближенный метод решения задач множественного рассеяния // Пятая Всероссийская научно-техническая конференция "Технические проблемы освоения Мирового океана". Владивосток, 30 сентября–4 октября 2013 г. С. 461–465.
8. *Шарфарец Б.П.* Приближенный метод решения задач многократного рассеяния в слоистых волноводах // XXVII сессия Российского акустического общества, Санкт-Петербург, 16–18 апреля 2014 г. С. 1309–1319. URL: http://library.akin.ru/Rao/sess27/%D1%88%D0%B0%D1%80%D1%84%D0%B0%D1%80%D0%B5%D1%86.pdf.
9. *Шарфарец Б.П.* Приближенный метод решения задач множественного рассеяния в полупространстве // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 3. С. 75–79. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/abst3.php#abst9.
10. *Шарфарец Б.П.* К вопросу о приближенном методе решения задач множественного рассеяния. Решение на примере идеального волновода // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 3. С. 80–86. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/abst3.php#abst10.
11. *Hansen T.B., Yaghjian A.D.* Plane-wave theory of time-domain fields. N.Y.: IEEE Press, 1999. 367 p.
12. *Шарфарец Б.П.* Уточнение понятия "диаграмма направленности" // Акустические исследования жидкости с фазовыми включениями. Владивосток: ТОИ ДВНЦ АН СССР, 1984. С. 64–72.
13. *Colton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. N.Y.: Springer, 1998. 331 p.
14. *Алексеев Г.В., Бурштейн А.Б., Шарфарец Б.П.* О некоторых свойствах диаграммных функций направленных излучателей // Электромагнитные и акустические процессы в океане. Владивосток: Изд-во ДВГУ, 1987. С. 130–141.
15. *Шарфарец Б.П.* О некоторых свойствах амплитуды рассеяния // Научное приборостроение. 2007. Т. 17, № 4. С. 55–60. URL: http://213.170.69.26/mag/2007/abst4.php#abst9.
16. *Whittaker E.T.* Math. Ann. 1903. Vol. 57, no. 3. P. 333–355. Doi: 10.1007/BF01444290.
17. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. II. Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 516 с.
18. *Devaney A.J., Wolf E.* Multipole expansions and plane wave representations of the electromagnetic field // J. Math. Phys. 1974. Vol. 15, no. 2. P. 235–244. Doi: 10.1063/1.1666629.
19. *Зацерковный А.В., Сергеев В.С., Шарфарец Б.П.* Использование амплитуды рассеяния для решения задач дифракции волн в полупространстве // Акуст. журн. 2001. Т. 47, № 5. С. 650–656.
20. *Colton D., Kress R.* On the denseness of Herglotz wave functions and electromagnetic Herglotz pairs in Sobolev spaces // Math. Meth. Appl. Sci. 2001. Vol. 24. P. 1289–1303. Doi: 10.1002/mma.277.
21. *Colton D., Päivärinta L., Sylvester J.* The interior transmission problem // Inverse Problems and Imaging. 2007. Vol. 1, no. 1. P. 13–28. Doi: 10.3934/ipi.2007.1.13.
22. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. II. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 886 с.
23. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. I. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958. 930 с.
24. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию: 24.04.2017

ON THE RELATIONS CONNECTING THE SCATTERING FIELD WITH THE SCATTERING AMPLITUDE

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia

Various functional relationships between the main parameters of the scattering process are considered in this paper: the scattering field and the scattering amplitude. These relations are either geometrically-optic type (decomposition in the form of the Atkinson—Wilcox series), or a connection through the representation of both functions in series in spherical functions(multipole representations), or as an integral representation (Devaney—Wolf representation). Such a variety of representations is also possible due to the analytic properties of both functions: the scattering field is an radiation solution of the Helmholtz equation, any two differentiable solutions of which are analytic functions of their arguments, and also because the scattering amplitude is an entire analytic function of its arguments. An analog of an Atkinson—Wilcox representation for the generalized scattering amplitude is also given, which is possible only in the case when the primary incident complex field is a radiating solution of the Helmholtz equation. The resulting scattering amplitude in this case also obeys the Helmholtz equation. It is shown that the Herglotz wave function coincides, up to a constant factor, with the Whittaker representation. The above results are very useful for applications, and in particular, in the problems of scientific instrument making.

Keywords: scattering amplitude, Atkinson—Wilcox decomposition, Whittaker's representation, Devaney—Wolf representation, incident plane wave, the canonical scattering amplitude, resulting scattering amplitude, Herglotz wave function

REFERENCES

1. Sharfarets B.P. [The Possibility of Efficient Calculation of the Scattering Amplitude Caused by an Inclusion in a Complicated Incident Field]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic journal], 2010, vol. 56, no. 2, pp. 166–171. (In Russ.).
2. Atkinson F.V. On Sommerfeld's "Radiation conditions". *Philos. Mag*., 1949, vol. 40, pp. 645–651. Doi: 10.1080/14786444908561291.
3. Wilcox C.H. Ageneralization of the orems of Rellichand Atkinson. *Proc. Amer. Math. Soc*., 1956, vol. 7, pp. 271–276. Doi: 10.1090/S0002-9939-1956-0078912-4.
4. Wilcox C.H. An expansion theorem for electromagnetic fields. *Comm. Pure Appl. Math*., 1956, vol. 9, pp. 115–134. Doi: 10.1002/cpa.3160090202.
5. Colton D., Kress R. *Metody integral'nyh uravnenij v teorii rasseyaniya* [Methods of the integrated equations in the theory of dispersion]. Moscow, Mir Publ., 1987. 311 p. (In Russ.).
6. Sharfarets B.P. [Radiation pressure in the case of the scattering of an arbitrary field by a complex-shaped inclusion]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic journal], 2010, vol. 56, no. 6, pp. 767–772. (In Russ.).
7. Sharfarets B.P. [Approximate method of solution of problems of multiple scattering]. *Pyataya Vserossijskaya nauchno-tekhnicheskaya konferenciya "Tekhnicheskie problemy osvoeniya mirovogo okeana"* [Fifth All-Russian scientific and technical conference "Technical Problems of Development of the World Ocean"]. Vladivostok, 30 September–4 October 2013, pp. 461–465. (In Russ.).
8. Sharfarets B.P. [Approximate method of solution of problems of multiple scattering in stratified wave guides]. *XXVII sessiya Rossijskogo akusticheskogo obshchestva* [XXVII session of the Russian acoustic society], Saint-Petersburg, 16–18 April 2014, pp. 1309–1319. URL: http://library.akin.ru/Rao/sess27/%D1%88%D0%B0%D1%80%D1%84%D0%B0%D1%80%D0%B5%D1%86.pdf. (In Russ.).
9. Sharfarets B.P. [Approximate method of the solution of tasks multiple dispersion in the half-space]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 3, pp. 75–79. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/abst3.php#abst9. (In Russ.).
10. Sharfarets B.P. [To the question of the approximate method of the decision problems of multiple dispersion. The decision on the example of the ideal wave-guide]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 3, pp. 80–86. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/abst3.php#abst10. (In Russ.).
11. Hansen T.B., Yaghjian A.D. *Plane-wave theory of time-domain fields*. N.Y., IEEE Press, 1999. 367 p. (In Russ.).
12. Sharfarets B.P. [Specification of the concept "directional diagram"]. *Akusticheskie issledovaniya zhidkosti s fazovymi vklyucheniyami* [Acoustic researches of liquid with phase inclusions]. Vladivostok, TOI DVNTS OF ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR, 1984, pp. 64–72. (In Russ.).
13. Colton D., Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. N.Y., Springer, 1998. 331 p.
14. Alekseev G.V., Burshtein A.B., Sharfarets B.P. [About some properties of chart functions of directional radia-

tors]. Elektromagnitnye i akusticheskie processy v okeane [Electromagnetic and acoustic processes in the ocean].Vladivostok, FEFU Publ., 1987, pp. 130–141. (In Russ.).

15. Sharfarets B.P. [On some properties of the scattering amplitude]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2007, vol. 17, no. 4, pp. 55–60. URL: http://213.170.69.26/mag/2007/abst4.php#abst9. (In Russ.).
16. Whittaker E.T. *Math. Ann,*. 1903. vol. 57, no. 3, pp. 333–355. Doi: 10.1007/BF01444290.
17. Whittaker, E.T., Watson, G.N. *A course of modern analysis; an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions*. Cambridge, University Press, 1920, 632 p. (Russ. ed.: Whittaker E.T., Vatson Dzh.N. *Kurs sovremennogo analiza. T. II. Transcendentnye funkcii.* Translate G.M. Goluzin. Moscow, GIFML Publ., 1963. 516 p.).
18. Devaney A.J., Wolf E. Multipole expansions and plane wave representations of the electromagnetic field. *J. Math. Phys*., 1974, vol. 15, no. 2, pp. 235–244. Doi: 10.1063/1.1666629.
19. Zatserkovnyi A.V., Sergeev V.A., Sharfarets B.P. [Employment of the Scattering Amplitude in Solving the Diffraction Problems for Waves in a Halfspace]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic journal], 2001, vol. 47, no. 5, pp. 650–656. (In Russ.).
20. Colton D., Kress R. On the denseness of Herglotz wave functions and electromagnetic Herglotz pairs in Sobolev spaces. *Math. Meth. Appl. Sci*., 2001, vol. 24, pp. 1289–1303. Doi: 10.1002/mma.277.
21. Colton D., Päivärinta L., Sylvester J. The interior transmission problem. *Inverse Problems and Imaging*, 2007, vol. 1, no. 1, pp. 13–28. Doi: 10.3934/ipi.2007.1.13.
22. Morse P.M., Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics. Part 2*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1953. 1000 p. (Russ. ed.: Mors F.M., Feshbah G. *Metody teoreticheskoj fiziki. T. II.* Moscow, IIL Publ., 1960. 886 p.).
23. Morse P.M., Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics. Part 1*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1953. 1997 p. (Russ. ed.: Mors F.M., Feshbah G. *Metody teoreticheskoj fiziki. T. I.* Moscow, IIL Publ., 1958. 930 p.).
24. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (In Russ.).

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich,*
sharb@mail.ru

Article received in edition: 24.04.2017