ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2017, том 27, № 3, с. 120–127

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 537.534.7

© А. С. Бердников, Н. К. Краснова, К. В. Соловьев

ГАРМОНИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КВАЗИПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ, ОДНОРОДНЫХ ПО ЭЙЛЕРУ

Квазиполиномиальные однородные потенциалы, удовлетворяющие уравнению Лапласа и заданные в аналитической форме, обеспечивают достаточно представительную , но не слишком полную выборку трехмерных потенциалов, однородных по Эйлеру. В работе показано, как с помощью гармонического интегрирования можно расширить класс потенциалов, удовлетворяющих уравнению Лапласа и однородных по Эйлеру, задаваемых в аналитическом виде.

Кл. сл.: электрические поля, магнитные поля, однородные по Эйлеру функции, принцип подобия траекторий в оптике заряженных частиц; аналитические решения уравнения Лапласа

ВВЕДЕНИЕ

Эта статья продолжает исследования электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру, применительно к целям оптики заряженных частиц, которые были начаты в публикациях [1–15]. В публикациях [2, 12, 13] исследуются однородные гармонические функции квазиполиномиального вида с порядком однородности k (необязательно целочисленным) и степенью n, которые описываются выражениями вида

$$U(x,y,z)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}y^{j}\omega^{(j)}(x,z), \qquad (1)$$

где $\omega^{(j)}(x,z)$ — это однородные функции порядка $(k-j)$, удовлетворяющие цепочке рекуррентных соотношений $\omega_{xx}^{(j)}+\omega_{zz}^{(j)}=-\omega^{(j+2)}$ ($j=n,n-1,\ldots,0$, $\omega^{(j)}=0$ при $j>n$). Функции вида (1) распадаются на сумму по четным степеням y^{2j} и сумму по нечетным степеням y^{2j+1}, каждая из которых по отдельности является однородным гармоническим квазиполиномом.

Хотя в общей форме (1) присутствует достаточно много свободных констант, но вся эта свобода сводится к тому, что выражение (1) — это линейная комбинация с произвольными коэффициентами, составленная из эталонных гармонических квазиполиномов степени n и ниже относительно переменной y. Если дополнительно выделить, например, координату z, то окажется, что для каждого порядка однородности k и для каждой фиксированной степени $n=0,1,2,\ldots$ имеется ровно два независимых эталонных квазиполинома — один из них будет четной функцией от z, другой нечетной [2, 12, 13]. Естественно, вместо выделенной координаты y в выражении (1) можно использовать x либо z, а также линейные комбинации переменных x,y,z с постоянными коэффициентами.

Квазиполиномиальные потенциалы обеспечивают исследователя эталонным набором полей, которые можно использовать для синтеза электростатических и магнитостатических систем. Однако рассматриваемые изолированно квазиполиномиальные потенциалы представляют собой весьма узкое подмножество существующих в принципе однородных гармонических потенциалов с заданным порядком однородности. Задача данной работы состоит в поиске дополнительных способов конструирования однородных гармонических потенциалов, заданных в аналитической форме. Такие аналитические выражения, не совпадающие с выражениями вида (1), должны расширить класс однородных по Эйлеру потенциалов, доступных для синтеза электростатических и магнитостатических электронно- и ионно-оптических систем.

Для решения этой задачи используется процедура гармонического интегрирования [15], позволяющая переходить от имеющихся однородных гармонических функций к однородным гармоническим функциям старшего порядка. Показано, что, хотя в общем случае эта операция и не выходит за рамки семейства, описываемого формулами (1), но для вырожденных случаев, соответствующих целочисленным порядков однородности, она порождает новые однородные гармонические функции, задаваемые в аналитической форме и выходящие за рамки класса квазиполиномиальных потенциалов.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КВАЗИПОЛИНОМОВ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В монографии [16] и в работе [15] рассматривается теорема о дифференцировании трехмерных однородных гармонических функций, имеющая фундаментальное значение. А именно, для любой трехмерной однородной гармонической функции $U_m(x,y,z)$ порядка m (где m — произвольное вещественное число) найдется такая трехмерная однородная гармоническая функция $U_{m+1}(x,y,z)$ порядка $m+1$, что $U_m(x,y,z) \equiv \partial U_{m+1}(x,y,z)/\partial x$. (Вместо координаты x может использоваться любое наперед заданное фиксированное направление в трехмерном пространстве, по которому выполняется дифференцирование.) То, что функция $U_m(x,y,z) \equiv \partial U_{m+1}(x,y,z)/\partial x$ будет трехмерной однородной и гармонической порядка m, если функция $U_{m+1}(x,y,z)$ является трехмерной однородной и гармонической порядка $m+1$, представляет собой элементарное следствие общих свойств функций, однородных по Эйлеру [17, 18] и того факта, что уравнение Лапласа является линейным с постоянными коэффициентами. Обратное же утверждение глубоко не тривиально.

Рассмотрим, что происходит с квазиполиномами (1) при применении к ним теоремы о дифференцировании однородных гармонических функций. При дифференцировании выражения (1) по y получается однородный гармонический квазиполином с порядком однородности, равным $(k-1)$ и степенью $(n-1)$. При дифференцировании выражения (1) по x или по z получается однородный гармонический квазиполином с порядком однородности, равным $(k-1)$, и степенью n. Понижение степени квазиполинома возможно, если старший коэффициент $\omega^{(n)}(x,z)$ при дифференцировании обратится в ноль — но это бывает только в случае классических гармонических полиномов, т. е. при натуральных порядках однородности $k=1,2,\ldots$ при выполнении дополнительного условия $n \le k$. Можно проверить, что вырожденные квазиполиномы, которые зависят не от трех, а от двух переменных, и при том самом дифференцировании по y обращаются в тождественный ноль, представляют собой классические гармонические полиномы (от двух переменных) и их порядок однородности обязательно является натуральным числом.

При интегрировании выражения (1) по y получим однородный гармонический квазиполином степени $(n+1)$ с порядком однородности $(k+1)$, который имеет вид

$$V(x,y,z) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} y^j \Omega^{(j)}(x,z) = \\ = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j!} y^j \omega^{(j-1)}(x,z) + \Omega^{(0)}(x,z).$$

Поскольку при $j>0$ $\Omega^{(j)}(x,z) \equiv \omega^{(j-1)}(x,z)$, то цепочка рекуррентных соотношений $\Omega_{xx}^{(j)} + \Omega_{zz}^{(j)} = -\Omega^{(j+2)}$ будет выполнена при всех j, кроме $j=0$. Тем самым для завершения конструирования $V(x,y,z)$ остается найти функцию $\Omega^{(0)}(x,z)$, которая будет однородной с порядком однородности $(k+1)$ и удовлетворять уравнению Пуассона $\Omega_{xx}^{(0)} + \Omega_{zz}^{(0)} = -\omega^{(1)}$, где $\omega^{(1)}(x,z)$ — известная однородная функция с порядком однородности, равным $(k-1)$. Разрешимость такой задачи и степень свободы, с которой задается найденное решение, обсуждаются в [15] при доказательстве теоремы о дифференцировании однородных гармонических функций.

Эти операции генерирования новых однородных гармонических функций не представляют особого интереса, поскольку гарантированно оставляют результат в рамках семейства квазиполиномиальных однородных гармонических функций. Более интересным случаем будет интегрирование квазиполинома (1) по одной из переменных x или z.

Пусть для определенности используется интегрирование по x. Результатом будет выражение

$$W(x,y,z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} y^j \left(\int_{x_0}^{x} \omega^{(j)}(\xi,z) \mathrm{d}\xi + \chi_j(z) \right) + \\ + \Phi(y,z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} y^j \Omega^{(j)}(x,z) + \Phi(y,z), \quad (2)$$

где $\chi_j(z)$ ($j = 0,1,\ldots,n$) и $\Phi(y,z)$ — некоторые пока неизвестные функции. Следует так подобрать функции $\chi_j(z)$ и $\Phi(y,z)$, чтобы (2) оказалось однородной гармонической функцией с порядком однородности, равным $(k+1)$. Поскольку функция $\Phi(y,z)$ не обязана быть полиномом по переменной y, возникает возможность расширить класс аналитических выражений (1) для однородных гармонических функций.

Из выражения (2) следует, что имеющиеся в нашем распоряжении свободные параметры избыточны и функции $\chi_j(z)$, вообще говоря, могут выбираться произвольным образом: вклад выражения $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}y^j\chi_j(z)$ всегда может быть скомпенсирован изменением функции $\Phi(y,z)$. Временно потребуем, чтобы $\Phi(y,z)=0$, т. е. что свободные члены для функций $\Omega^{(j)}(x,z)$, полученных в результате интегрирования, выбраны так, чтобы квазиполином $\sum_{j=0}^{n}y^j\Omega^{(j)}(x,z)/j!$ был гармонической и однородной функцией с порядком однородности $(k+1)$ сам по себе. Если удается найти такое частное решение, для которого это условие достижимо, то для оставшегося свободного параметра $\Phi(y,z)$ разность

$$\Phi(y,z)=W(x,y,z)-\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}y^j\Omega^{(j)}(x,z)$$

окажется однородной гармонической функцией двух переменных. Но все такие функции имеют вид [2, 9, 12, 13, 15]

$$V_m(y,z)=c_a\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^m\cos\big(m\operatorname{arctg}(z/y)\big)+ +c_b\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^m\sin\big(m\operatorname{arctg}(z/y)\big), \tag{3}$$

$$V_0(y,z)=c_a+c_b\operatorname{arctg}(y/z), \tag{4}$$

где c_a, c_b — произвольные константы, а m — порядок однородности. В итоге получается общее решение для продукта гармонического интегрирования по x, записанное в виде (2).

При выполнении условия $\Phi(y,z)=0$ цепочка рекуррентных соотношений $\Omega_{xx}^{(j)}+\Omega_{zz}^{(j)}=-\Omega^{(j+2)}$ превращается в рекуррентные соотношения для функций $\chi_j(z)$:

$$\chi_j''(z)+\chi_{j+2}(z)=$$

$$=-\left(\omega_x^{(j)}(x,z)+\int_{x_0}^{x}\omega_{zz}^{(j)}(\xi,z)\mathrm{d}\xi+\int_{x_0}^{x}\omega^{(j+2)}(\xi,z)\mathrm{d}\xi\right)=$$

$$=-\left(\omega_x^{(j)}(x,z)-\int_{x_0}^{x}\omega_{\xi\xi}^{(j)}(\xi,z)\mathrm{d}\xi\right)=-\omega_x^{(j)}(x_0,z)$$

(учтено равенство $\omega_{xx}^{(j)}+\omega_{zz}^{(j)}=-\omega^{(j+2)}$). Однородные функции $\Omega^{(j)}$ должны удовлетворять дифференциальным соотношениям Эйлера $x\Omega_x^{(j)}+z\Omega_z^{(j)}=(k-j+1)\Omega^{(j)}$ [17, 18], это налагает дополнительные условия на функции $\chi_j(z)$:

$$z\chi_j'(z)-(k-j+1)\chi_j(z)=$$

$$=(k-j+1)\int_{x_0}^{x}\omega^{(j)}(\xi,z)\mathrm{d}\xi-x\omega^{(j)}(x,z)-$$

$$-\int_{x_0}^{x}z\omega_z^{(j)}(\xi,z)\mathrm{d}\xi=$$

$$=-\int_{x_0}^{x}\left(\xi\omega_\xi^{(j)}+z\omega_z^{(j)}-(k-j)\omega^{(j)}\right)\mathrm{d}\xi+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\left(\xi\omega_\xi^{(k)}+\omega^{(j)}\right)\mathrm{d}\xi-x\omega^{(j)}(x,z)=$$

$$=-x_0\omega^{(j)}(x_0,z)$$

(использовано равенство $x\omega_x^{(j)}+z\omega_z^{(j)}=$ $=(k-j)\omega^{(j)}$, справедливое в силу однородности функций $\omega^{(j)}(x,z)$). Осталось проверить совместность полученных уравнений

$$z\chi_j'(z)-(k-j+1)\chi_j(z)=-x_0\omega^{(j)}(x_0,z), \tag{5}$$

$$\chi_j''(z)+\chi_{j+2}(z)=-\omega_x^{(j)}(x_0,z) \tag{6}$$

и найти решение для $\chi_j(z)$.

Общим решением для дифференциального уравнения (5) будет функция

$$\chi_j(z)=$$

$$=z^{k-j+1}\left(a_j-x_0\int_{z_0}^{z}\tau^{-(k-j+2)}\omega^{(j)}(x_0,\tau)\mathrm{d}\tau\right), \tag{7}$$

где a_j — произвольная константа. После подстановки в уравнение (6) вместо функций χ_j и χ_{j+2} формулы (7) и с учетом соотношения $\omega^{(j+2)}=-\omega_{xx}^{(j)}-\omega_{zz}^{(j)}$ получаем:

$$a_j = -\frac{a_{j+2}}{(k-j+1)(k-j)} + x_0 \int_{z_0}^{z} \omega^{(j)}(x_0,\tau)\tau^{-(k-j+2)}\mathrm{d}\tau -$$
$$-\frac{x_0}{(k-j+1)(k-j)} \int_{z_0}^{z} \left(\omega_{xx}^{(j)}(x_0,\tau) + \omega_{zz}^{(j)}(x_0,\tau)\right)\tau^{-(k-j)}\mathrm{d}\tau +$$
$$+\frac{x_0 z^{-(k-j+1)}}{(k-j+1)(k-j)}\left((k-j)\omega^{(j)}(x_0,z) + x_0\omega_x^{(j)}(x_0,z) + z\omega_z^{(j)}(x_0,z)\right) -$$
$$-\frac{z^{-(k-j+1)}\left(x_0^2+z^2\right)}{(k-j+1)(k-j)}\omega_x^{(j)}(x_0,z). \quad (8)$$

Правая часть рекурсивного выражения (8), вообще говоря, зависит от переменной z, тогда как a_j и a_{j+2} должны быть константами. Но если продифференцировать выражение (8) по переменной z и упростить подобные члены, то получим выражение

$$-\frac{z^{-(k-j)}}{(k-j+1)(k-j)}\times$$
$$\times\left(x_0\omega_{xx}^{(j)}(x_0,z) + z\omega_{xz}^{(j)}(x_0,z) - (k-j-1)\omega_x^{(j)}(x_0,z)\right),$$

которое должно быть нулем в силу того, что производная $\omega_x^{(j)}(x,z)$ — функция, однородная по Эйлеру с порядком однородности $(k-j-1)$ [17, 18]. Следовательно, правая часть (8) не зависит от z и в частности, можно подставить $z = z_0$. С учетом того, что $x\omega_x^{(j)} + z\omega_z^{(j)} - (k-j)\omega^{(j)} = 0$, получаем рекуррентное соотношение в окончательной форме:

$$a_j = -\frac{1}{(k-j+1)(k-j)}\left(a_{j+2} + \frac{x_0^2+z_0^2}{z_0^{k-j+1}}\omega_x^{(j)}(x_0,z)\right). \quad (9)$$

Это позволяет вычислить неизвестные коэффициенты a_j, а с помощью формулы (7) вычислить неизвестные функции $\chi_j(z)$. Любопытно, что при пропорциональном масштабировании x_0, z_0 значения констант a_j не меняются.

Возможен и другой способ. Из (5) находим значение $\chi_j'(z)$ и, после дифференцирования, значение $\chi_j''(z)$, которые будут выражены через $\chi_j(z)$ и известные функции. Подставив полученное значение $\chi_j''(z)$ в (6), получаем рекурсивную связь между $\chi_j(z)$ и $\chi_{j+2}(z)$, которая с учетом требования $\chi_j(z) = 0$ при $j > n$ позволяет вычислить все функции $\chi_j(z)$:

$$\chi_j(z) =$$
$$= -\frac{z^2\chi_{j+2}(z)}{(k-j+1)(k-j)} - \frac{\left(x_0^2+z^2\right)\omega_x^{(j)}(x_0,z)}{(k-j+1)(k-j)} +$$
$$+\frac{x_0\left(x_0\omega_x^{(j)}(x_0,z) + z\omega_z^{(j)}(x_0,z) + (k-j)\omega^{(j)}(x_0,z)\right)}{(k-j+1)(k-j)}. \quad (10)$$

Для практических вычислений это соотношение можно упростить, если использовать условие $x\omega_x^{(j)} + z\omega_z^{(j)} = (k-j)\omega^{(j)}$, справедливое в силу того, что $\omega^{(j)}(x,z)$ — функция, однородная по Эйлеру с порядком однородности $(k-j)$:

$$\chi_j(z) = -\frac{z^2\chi_{j+2}(z)}{(k-j+1)(k-j)} -$$
$$-\frac{\left(x_0^2+z^2\right)\omega_x^{(j)}(x_0,z)}{(k-j+1)(k-j)} + \frac{2x_0\omega^{(j)}(x_0,z)}{(k-j+1)}. \quad (11)$$

Остается проверить, что функции $\chi_j(z)$, получаемые из рекурсивного соотношения (10), действительно удовлетворяют уравнению (5). При $j = n$ и $j = n+1$ уравнение (5) выполнено, поскольку при $j > n$ функции $\chi_j(z)$ и $\omega^{(j)}(x,z)$ обращаются в ноль. Пусть уравнение (5) выполняется для $\chi_{j+2}(z)$. Тогда из рекурсивного соотношения (10) следует, что уравнение (5) будет выполнено также и для $\chi_j(z)$:

$$z\chi_j'(z) - (k-j+1)\chi_j(z) + x_0\omega^{(j)}(x_0,z) =$$

$$=-\frac{z^2}{(k-j+1)(k-j)}\left(\chi'_{j+2}(z)-(k-j-1)\chi_{j+2}(z)\right)+$$
$$+\frac{z^2}{(k-j+1)(k-j)}\times$$
$$\times\left(-z\omega_{xz}^{(j)}(x_0,z)+x_0\omega_{zz}^{(j)}(x_0,z)+(k-j-1)\omega_x^{(j)}(x_0,z)\right)=$$
$$=-\frac{z^2}{(k-j+1)(k-j)}\times$$
$$\times\left(x_0\omega_{xx}^{(j)}(x_0,z)+z\omega_{xz}^{(j)}(x_0,z)-(k-j-1)\omega_x^{(j)}(x_0,z)\right)=0$$

(здесь использовано соотношение $\omega^{(j+2)}=$ $=-\omega_{xx}^{(j)}-\omega_{zz}^{(j)}$ и то, что $x\omega_{xx}^{(j)}+z\omega_{xz}^{(j)}=$ $=(k-j-1)\omega_x^{(j)}$, поскольку производная $\omega_x^{(j)}(x,z)$ — это функция, однородная по Эйлеру с порядком однородности $(k-j-1)$). Следовательно, уравнение (5) будет выполнено при всех значениях j.

Проверять уравнение (6) нет необходимости. Если функции $\chi_j(z)$ удовлетворяют уравнению (5) и удовлетворяют рекурсивному соотношению, полученному комбинированием уравнения (5) и уравнения (6), то они удовлетворяют уравнению (6). В результате мы получаем новый однородный гармонических квазиполином, который имеет ту же степень, что и раньше, но обладает на единицу бóльшим порядком однородности. Это означает, что в общем случае процедура гармонического интегрирования не позволяет выйти за пределы класса функций (1).

ВЫРОЖДЕННЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ КВАЗИПОЛИНОМОВ

Итак, в общем случае процедура интегрирования квазиполинома (1) по переменной x либо z оставляет результат в рамках квазиполиномиального класса однородных и гармонических потенциалов. Однако, как видно из рекурсивных соотношений (9) и (11), при некоторых значениях порядка однородности k возникают проблемы, когда при каком-то $j=0,1,\ldots,n$ величины $(k-j)$ или $(k-j+1)$ обращаются в ноль (это возможно, когда k натуральное число, ноль или -1, а степень квазиполинома $n>k$). Тогда при конструировании однородных гармонических функций по формуле (2) требуется привлекать ненулевые функции $\Phi(y,z)$, а сам процесс гармонического интегрирования приобретает дополнительные особенности. Эти случаи могут оказаться довольно интересными, поскольку позволяют конструировать новые аналитические выражения для однородных потенциалов, которые уже не будут являться квазиполиномами, где аналитические формулы известны в явном виде [2, 12, 13]. С другой стороны, все эти исключительные случаи реализуются лишь тогда, когда порядок однородности является целым числом, а для такого случая в нашем распоряжении уже имеются более универсальные и эффективные инструменты, позволяющие исчерпывающим образом генерировать аналитические формулы для однородных гармонических потенциалов [9, 16].

Проблема исключительных случаев тесно связана с тем фактом, что однородное гармоническое интегрирование двумерной функции при натуральных порядках однородности, как уже было отмечено ранее, не всегда порождает двумерную же функцию. Действительно, если продифференцировать формулу (2) $(n+1)$ раз по переменной y, то квазиполиномиальная часть исчезнет и останется только $(n+1)$-я производная от функции $\Phi(y,z)$. В силу того, что исходная функция была гармонической и однородной по Эйлеру с порядком однородности k, результат $\partial^{n+1}\Phi(y,z)/\partial y^{n+1}$ обязан быть функцией, гармонической и однородной по Эйлеру с порядком однородности $m=(k-n-1)$ (возможно, тождественно равной нулю). Соответственно функция $\partial^{n+1}\Phi(y,z)/\partial y^{n+1}$ совпадает с одной из эталонных двумерных однородных гармонических функций $V_m(y,z)$ порядка m и тем самым обязана выражаться с помощью формул (3), (4).

Если проделать интегрирование функции $\partial^{n+1}\Phi(y,z)/\partial y^{n+1}$ по y в обратном порядке и если по ходу процесса не будет возникать особых случаев, когда приходится интегрировать однородные функции с порядками однородности 0 и -1, то результат будет однородной гармонической функцией от двух переменных, к которой добавлен квазиполином вида $\sum y^j\alpha_j(z)/j!$. Можно присоединить квазиполином $\sum y^j\alpha_j(z)/j!$ к квазиполиному $\sum y^j\Omega^{(j)}(x,z)/j!$ (точнее, объединить вместе неопределенные функции $\alpha_j(z)$ и $\chi_j(z)$). В таком случае без ограничения общности можно считать свободный член $\Phi(y,z)$ однородной гармонической функцией. Но тогда и квазиполином $\sum y^j\Omega^{(j)}(x,z)/j!$ тоже обязан быть однородной гармонической функцией, процедура восстановления неизвестных функций $\chi_j\left(z\right)$ для которого была рассмотрена выше. Здесь нет противоречия, поскольку особый случай интегрирования однородной двумерной функции связан с тем, что при каком-то значении $j = 0,1,\ldots,n$ величина $\left(k-j\right)$ окажется равной нулю или -1. Даже и в этом (стандартном) случае результат интегрирования однородного гармонического квазиполинома может не быть квазиполиномом: формулы (3), (4) для ненулевого свободного члена $\Phi\left(y,z\right)$ порождают полиномы по переменной y только при натуральных порядках однородности.

В вырожденном случае ситуация выглядит гораздо более сложной. Рассмотрим в качестве примера результат гармонического однородного интегрирования по переменной x функции $V_0\left(x,y,z\right) = \operatorname{arctg}\left(x/z\right)$, которая является однородным гармоническим квазиполиномом нулевого порядка и нулевой степени от переменной y. На первом шаге мы получим однородную гармоническую функцию первого порядка

$$V_1\left(x,y,z\right) = x\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) - y\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{z}\right) + \\ + z\ln\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+z^2}} + ay + bz,$$

на втором — однородную гармоническую функцию второго порядка

$$V_2\left(x,y,z\right) = \frac{xz}{2} + \frac{x^2-z^2}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) - \\ - xy\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{z}\right) + xz\ln\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+z^2}} + \\ + axy + bxz + c\left(y^2-z^2\right) + \mathrm{d}yz,$$

на третьем — однородную гармоническую функцию третьего порядка

$$V_3\left(x,y,z\right) = \frac{x^3-3xz^2}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) - \\ - \frac{6x^2y-3yz^2-y^3}{12}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{z}\right) + \\ + \frac{3x^2z-z^3}{6}\ln\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+z^2}} + \frac{z\left(5x^2-z^2+y^2\right)}{12} + \\ + a\frac{y\left(12x^2-9z^2-y^2\right)}{24} + b\frac{z\left(12x^2-5z^2+y^2\right)}{24} + \\ + c\left(xy^2-xz^2\right) + d\cdot xyz + e\left(y^3-3yz^2\right) + f\left(3y^2z-z^3\right)$$

и так далее. Наглядно видно, что результат отнюдь не является квазиполиномом по переменной y. При этом, хотя интегрирование и выполняется по переменной x, но за счет необходимости регулярного введения ненулевых корректоров $\Phi\left(y,z\right)$ сложность получаемого выражения как функции от y тоже постепенно повышается. Характерно, что в получаемых формулах по-прежнему можно выделить однородное и гармоничное ядро и зависящий от произвольных констант однородный и гармоничный свободный член.

Таким образом, однородное гармоническое интегрирование квазиполиномов с целыми порядками однородности может оказаться полезным инструментом для получения новых аналитических формул для однородных гармонических функций, не являющихся квазиполиномиальными выражениями. Более подробный анализ исключительных ситуаций, возникающих при интегрировании однородных гармоничных квазиполиномов с целочисленными порядками, выходит за рамки данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверин И.А.* Электростатические и магнитостатические электронные спектрографы с однородными по Эйлеру потенциалами, характеризуемыми нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 3. С. 35–44. URL: http://213.170.69.26/mag/2015/abst3.php#abst5.
2. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Простейшие аналитические электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. С. 17–32.
3. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. С. 147–165.
4. *Аверин И.А., Бердников А.С.* Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 5–8.
5. *Бердников А.С., Аверин И.А.* Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 89–95.
6. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эй-

леру. I // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12, № 4. С. 272–281.

7. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 11–20.
8. *Бердников А.С., Аверин И.А.* О невозможности двойной фокусировки в комбинированных электрических и магнитных полях, однородных по Эйлеру // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 62–65.
9. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 13–30. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/abst4.php#abst2.
10. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Интегральные формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 31–42. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/abst4.php#abst3.
11. *Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.* Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, вып. 3. С. 39–43.
12. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Квазиполиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физические и математические науки. 2017. Т. 10, № 1. С. 71–80.
13. *Краснова Н.К., Бердников А.С., Соловьев К.В., Аверин И.А.* О квазиполиномиальных трехмерных потенциалах электрических и магнитных полей // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физические и математические науки. 2017. Т. 10, № 1. С. 81–92.
14. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Об однородности скалярных и векторных потенциалов у электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5, № 1. С. 10–27.
15. *Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Теорема о дифференцировании и интегрировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 3. С. 107–119. URL: http://213.170.69.26/mag/2017/full3/Art13.pdf.
16. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.
17. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Москва: Физматлит, 2001. 616 с.
18. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. Москва: Наука, 1974. 480 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург (*Бердников А.С.*)

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*Краснова Н.К., Соловьев К.В.*)

Контакты: *Бердников Александр Сергеевич*, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию: 19.05.2017

ISSN 0868–5886 NAUCHNOE PRIBOROSTROENIE, 2017, Vol. 27, No.3, pp. 120–127

HARMONIC INTEGRATION OF QUASI POLYNOMIAL POTENTIALS WHICH ARE HOMOGENEOUS IN EULER TERMS

A. S. Berdnikov[1], **N. K. Krasnova**[2], **K. V. Solovyev**[2]

[1]*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*
[2]*Peter The Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia*

Electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms are used to design the systems of charge particle optics with special properties. General theory of the harmonic functions which are homogeneous in Euler terms is an important instrument in this process. Quasi polynomial homogeneous potentials satisfying the Laplace equation and given in analytical form provide a sufficiently representative, but not complete, subset of 3D harmonic potentials which are homogeneous in Euler terms. The paper shows how, using harmonic integration, it is possible to extend the class of potentials that are given in analytical form, satisfy the Laplace equation and are homogeneous in Euler terms.

Keywords: electric fields, magnetic fields, homogeneous in Euler' terms functions, similarity principle for charged particle trajectories, analytical solutions of Laplace equation

REFERENCES

1. Averin I.A. [Electrostatic and magnetostatic electron spectrographs based on Euler' homogeneous potentials with non-integer orders]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 3. pp. 35–44. Doi: 10.18358/np-25-3-i3544. (In Russ.).
2. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [The elementary analytical electric and magnetic potentials, the uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2, pp. 17–32. (In Russ.).
3. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Three-dimensional electric and magnetic potentials, the uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2, pp. 147–165. (In Russ.).
4. Averin I.A., Berdnikov A.S. [Regional fields the without net of electronic spectrographs with electrostatic fields, uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 5–8. (In Russ.).
5. Berdnikov A.S., Averin I.A. [New approach to development of ion-optical schemes of static mass spectrographs on the basis of the non-uniform magnetic fields uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 89–95. (In Russ.).
6. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. I]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2015, vol. 12, no. 4, pp. 272–281. (In Russ.).
7. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. II]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 11–20. (In Russ.).
8. Berdnikov A.S., Averin I.A. [About impossibility of double focusing in the combined electric and magnetic fields uniform in Euler]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 62–65. (In Russ.).
9. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Universal expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 13–30. Doi: 10.18358/np-26-4-i1330. (In Russ.).
10. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Integrated formulas for the three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler with nonintegral orders of uniformity]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 31–42. Doi: 10.18358/np-26-4-i3142. (In Russ.).
11. Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R. [The principle of similarity of trajectories at the movement of charged particles with a different masses in electric and magnetic fields, uniform in Euler]. *Pis'ma v ZhTF* [Letters in ZhTF], 2017, vol. 43, no. 3, pp. 39–43. (In Russ.).
12. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Quasi-polynomial three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 71–80. (In Russ.).
13. Krasnova N.K., Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Averin I.A. [About quasipolynomial three-dimensional potentials of electric and magnetic fields]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki*

[Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 81–92. (In Russ.).
14. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Theorems on the homogeneity of scalar and vector potentials for 3D electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2017, vol. 5, no. 1, pp. 10–27. (In Russ.).
15. Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solov'ev K.V. [Theorem on integration and differentiation of 3D electric and magnetic potentials which are homogeneous in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 107–119. (In Russ.).
16. Gobson E.W. *Teoriya sfericheskih i ehllipsoidal'nyh funkcij* [Theory of spherical and ellipsoidal functions]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1952. 476 p. (In Russ.).
17. Fihtengolc G.M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 1* [Course of differential and integral calculus. Vol. 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 616 p. (In Russ.).
18. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki. T. 1* [Course of the higher mathematics. Vol. 1.]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russ.).

Contacts: *Berdnikov Alexander Sergeevich,*
asberd@yandex.ru

Article received in edition: 19.05.2017