ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2017, том 27, № 3, с. 107–119

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 537.534.7

© А. С. Бердников, Н. К. Краснова, К. В. Соловьев

ТЕОРЕМА О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ И ИНТЕГРИРОВАНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ, ОДНОРОДНЫХ ПО ЭЙЛЕРУ

Электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру, являются удобным средством для разработки электронно- и ионно-оптических систем со специальными свойствами, а математические свойства однородных по Эйлеру гармонических функций являются в этом процессе важным инструментом. В работе предлагается новое доказательство (при ослабленных предпосылках о наличии сингулярных точек) теоремы о представлении любого гармонического (удовлетворяющего уравнению Лапласа) скалярного потенциала, однородного по Эйлеру, в виде производной от гармонического и однородного по Эйлеру потенциала более высокого порядка. В новой формулировке выводы теоремы распространяются на однородные по Эйлеру гармонические потенциалы, содержащие особые точки (в частности, в начале координат), что является типичным для электрических и магнитных полей, применяемых в оптике заряженных частиц.

Кл. сл.: электрические поля, магнитные поля, однородные по Эйлеру функции, принцип подобия траекторий в оптике заряженных частиц; аналитические решения уравнения Лапласа

ВВЕДЕНИЕ

Эта статья продолжает исследования электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру, применительно к целям оптики заряженных частиц, которые были начаты в публикациях [1–14]. Целью статьи является уточнение классической теоремы о дифференцировании и интегрировании трехмерных гармонических функций (скалярных электрических и магнитных потенциалов), однородных по Эйлеру и обобщение ее на функции с особыми точками, в частности, расположенными в начале координат и в окрестности начала координат.

Электростатическими и магнитостатическими полями, однородными по Эйлеру, называются поля, напряженность или индукция которых является функцией, однородной по Эйлеру в смысле, который придается этому термину в общих курсах математического анализа [15, 16]. Электростатическое поле является однородным по Эйлеру, если напряженность электрического поля $\mathbf{E}(x, y, z)$ как функция пространственных координат удовлетворяет тождеству $\mathbf{E}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\mathbf{E}(x, y, z)$ в области, в которой происходит движение заряженных частиц, при всех $\lambda > 0$ (где число k является порядком однородности поля). Магнитостатическое поле является однородным по Эйлеру, если индукция магнитного поля $\mathbf{B}(x, y, z)$ как функция пространственных координат удовлетворяет тождеству $\mathbf{B}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\mathbf{B}(x, y, z)$ в области, в которой происходит движение заряженных частиц, при всех $\lambda > 0$ (где число k является порядком однородности поля). Как правило, из однородности по Эйлеру электрических и магнитных полей следует, что скалярный потенциал соответствующего электрического или магнитного поля является однородной по Эйлеру функцией порядка k. Этот вопрос исследуется в [3, 14], и там же указывается единственное исключение из этого правила — поля с нулевым порядком однородности, для которых скалярный потенциал, представляющий собой однородную по Эйлеру функцию нулевого порядка, может также содержать аддитивную логарифмическую добавку, имеющую, например, вид $U_0 \ln\left(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

Полезным подспорьем при синтезе корпускулярно-оптических систем, использующих специфические свойства полей, однородных по Эйлеру, являются аналитические выражения для соответствующих потенциалов. Они позволяют с самого начала задавать искомую систему электродов или магнитных полюсов в параметризованном виде так, что на выходе получаются поля, заведомо удовлетворяющие требованию "быть однородными по Эйлеру с заданным порядком однородности". В [2, 3, 9, 10] приводятся примеры некоторых явных формул для частных случаев полей, однородных по Эйлеру.

Важным инструментом генерирования аналитических формул общего вида для потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру, является теорема о дифференцировании однородных гармонических функций [17]. А именно, любая трехмерная однородная гармоническая функция *обязательно* является производной какой-либо подходящей трехмерной однородной гармонической функции более старшего порядка. Если начать с какой-либо общей формулы для фиксированного порядка однородности — например, универсальной формулы Донкина для трехмерных гармонических функций $U_0(x,y,z)$ нулевого порядка [17–22]

$$U_0(x,y,z)=F\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

(здесь $F(p,q)$ — произвольная функция, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа $\partial^2F/\partial p^2+\partial^2F/\partial q^2=0$), то с помощью многократного дифференцирования можно генерировать общие формулы для однородных гармонических функций $U_k(x,y,z)$ с любыми отрицательными целочисленными порядками однородности $k<0$. Теорема о дифференцировании однородных гармонических функций гарантирует, что никакие однородные поля при этом не будут пропущены, поскольку у любой однородной гармонической функции есть прототип, производной которого она является, а все однородные функции нулевого порядка нам известны. В сочетании же с формулой Томсона, называемой также преобразованием Кельвина [18, 23–27]

$$V(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\times$$
$$\times U\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right),$$

которая позволяет переходить от однородных гармонических функций $U(x,y,z)$ порядка k к однородным гармоническим функциям $V(x,y,z)$ порядка $(-k-1)$ и обратно, можно получить исчерпывающее описание однородных гармонических функций также и с любым положительным целочисленным порядком однородности. Более подробно процесс генерирования алгебраически-дифференциальных формул общего вида для гармонических однородных функций с целочисленными порядками однородности анализируется в [9, 17].

Данная работа посвящена исследованию теоремы о дифференцировании трехмерных однородных гармонических функций. Приводится новое доказательство этой теоремы при более слабых предположениях о регулярности (дифференцируемости, отсутствии особых точек, разложимости в ряд) исходной гармонической функции, чем в классической постановке теоремы. В частности, теорема становится применима к однородным по Эйлеру гармоническим скалярным потенциалам, содержащим изолированную особую точку в нуле, что является, вообще говоря, типичным для потенциалов электрических и магнитных полей, используемых на практике. Демонстрируется, что трехмерность однородных гармонических функций, о которых идет речь в теореме, является существенной (для двумерных однородных гармонических функций данная теорема, вообще говоря, не выполняется). Представляется целесообразным в будущем исследовать также обобщение теоремы на случай дробного интегродифференцирования [28–34], что в случае успеха позволит получить новые интегральные аналитические выражения для потенциалов электрических и магнитных полей с нецелочисленными порядками однородности.

ТЕОРЕМА О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ И ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если $U(x,y,z)$ — произвольная однородная гармоническая функция, то ее производные по координатам x,y,z или по любой их линейной комбинации с постоянными коэффициентами будут однородными гармоническими функциями на единицу меньшего порядка, в силу того что при дифференцировании уравнение Лапласа сохраняет свою форму, а производные однородных функций тоже являются однородными функциями [15, 16]. Однако справедливо и обратное утверждение [17]: для любой однородной гармонической функции $U(x,y,z)$ существуют такие однородные гармонические функции $V(x,y,z)$ на единицу большего порядка, что $U(x,y,z)$ является производной от $V(x,y,z)$ по заранее выбранной координате x,y,z или по заранее выбранному фиксированному наклонному направлению $\alpha x+\beta y+\gamma z$ ($\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$). Это фундаментальное утверждение, являющееся далеко не тривиальным, составляет предмет рассматриваемой здесь теоремы о дифференцировании и интегрировании однородных гармонических функций.

Вполне очевидно, что достаточно доказать его для одной выбранной координаты (например, x). В силу того что после трехмерного поворота или циклической перестановки координат сохраняются как свойство однородности по Эйлеру, так и свойство быть решением уравнения Лапласа, всегда можно развернуть систему координат так, чтобы направление дифференцирования совпало с выбранной координатой x, воспользоваться доказанной теоремой, а потом вернуть систему координат к исходному положению.

Классическое доказательство

Стандартное доказательство рассматриваемой нами теоремы, отличающееся свойственным классической математике XIX века изяществом, дается в [17]. Следуя магистральной линии этого доказательства, рассмотрим интересующую нас проблему.

Пусть имеется функция $U(x,y,z)$, однородная по Эйлеру с порядком однородности m (где число m необязательно целое) и удовлетворяющая трехмерному уравнению Лапласа. Рассмотрим функцию

$$V(x,y,z)=\int_0^x U(\xi,y,z)\mathrm{d}\xi+H(y,z)= \\ =V^0(x,y,z)+H(y,z). \qquad (1)$$

Требуется доказать, что в формуле (1) всегда можно подобрать функцию $H(y,z)$ так, чтобы функция $V(x,y,z)$ была гармонической и однородной по Эйлеру с порядком однородности, равным $(m+1)$. Тогда функция $U(x,y,z)$ будет производной по x от сконструированной однородной и гармонической функции $V(x,y,z)$, и требуемое утверждение будет доказано.

Первый член $V^0(x,y,z)$ в формуле (1) будет однородной функцией порядка $(m+1)$:

$$V^0(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\int_0^{\lambda x}U(\xi,\lambda y,\lambda z)\mathrm{d}\xi= \\ =\int_0^x U(\lambda\xi',\lambda y,\lambda z)\mathrm{d}(\lambda\xi')= \\ =\lambda^{m+1}\int_0^x U(\xi',y,z)\mathrm{d}\xi'=\lambda^{m+1}V^0(x,y,z).$$

Поэтому для однородности функции $V(x,y,z)$ необходимо и достаточно, чтобы функция двух переменных $H(y,z)$ также была однородной функцией порядка $(m+1)$. Кроме того, функция $V(x,y,z)$ должна удовлетворять трехмерному уравнению Лапласа. Поскольку для функции $V^0(x,y,z)$ имеем тождество

$$V^0_{xx}+V^0_{yy}+V^0_{zz}=U_x+\int_0^x\left(U_{yy}+U_{zz}\right)\mathrm{d}\xi= \\ =U_x-\int_0^x U_{xx}\mathrm{d}\xi=U_x(0,y,z),$$

то для того, чтобы функция V была гармонической, функция $H(y,z)$ должна удовлетворять уравнению Пуассона $H_{yy}+H_{zz}=-U_x(0,y,z)$, где в правой части уравнения Пуассона стоит известная однородная функция от y,z порядка $(m-1)$. Остается проверить, что для этого уравнения среди всех возможных решений найдется однородное решение порядка $(m+1)$.

Сделаем замену $H(y,z)=z^{m+1}f(y/z)$, $U_x(0,y,z)=z^{m-1}g(y/z)$, где f и g — это подходящим образом выбранные функции одного переменного (здесь использована универсальная форма записи $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1^k h(x_2/x_1,\ldots,x_n/x_1)$ для однородных функций порядка k [15, 16]). Функция $g(\tau)$ известна, поскольку известна функция $U_x(0,y,z)$, а функцию $f(\tau)$ надо определить (точнее, убедиться, что такая функция существует). После подстановки этих выражений в уравнение $H_{yy}+H_{zz}=-U_x(0,y,z)$ для неизвестной функции f получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(1+\tau^2\right)f''(\tau)-2m\tau f'(\tau)+ \\ +m(m+1)f(\tau)+g(\tau)=0. \qquad (2)$$

Из этого уравнения можно определить искомую функцию f, причем с изрядной степенью произвола. При желании решение для уравнения (2) можно выписать в явном виде [35–39]:

а) $m\neq-1$:

$$f(\tau)=\frac{1}{m+1}\left(\sqrt{1+\tau^2}\right)^{m+1}\cos\left[(m+1)\operatorname{arctg}(\tau)\right]\times$$

$$\times\left(C_1+\int_{\tau_0}^{\tau}\left(\sqrt{1+s^2}\right)^{-m-1}\sin\left[(m+1)\operatorname{arctg}(s)\right]g(s)\mathrm{d}s\right)+$$

$$+\frac{1}{m+1}\left(\sqrt{1+\tau^2}\right)^{m+1}\sin\left[(m+1)\operatorname{arctg}(\tau)\right]\times$$

$$\times\left(C_2-\int_{\tau_0}^{\tau}\left(\sqrt{1+s^2}\right)^{-m-1}\cos\left[(m+1)\operatorname{arctg}(s)\right]g(s)\mathrm{d}s\right),$$

б) $m=-1$:

$$f(\tau)=\left(C_1+\int_{\tau_0}^{\tau}\operatorname{arctg}(s)g(s)\mathrm{d}s\right)+$$

$$+\operatorname{arctg}(\tau)\left(C_2-\int_{\tau_0}^{\tau}g(s)\mathrm{d}s\right).$$

Теперь функция $H(y,z)=z^{m+1}f(y/z)$ обеспечивает и однородность, и гармоничность для выражения (1). Тем самым для произвольно взятой гармонической и однородной функции $U(x,y,z)$ существует гармоническая и однородная первообразная $V(x,y,z)$, удовлетворяющая условию $U=\partial V/\partial x$, которая определяется с точностью до двух произвольных констант.

Примечание. То, что у двумерного уравнения Пуассона с однородной правой частью всегда найдется однородное же решение, очевидным утверждением, вообще говоря, не является. Рассмотрим, например, уравнение Пуассона $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4r^k e^{ik\phi}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}(y/x)$ (правая часть — однородная функция порядка k). Естественно искать решение в виде $u=v(r)e^{ik\varphi}$, где $v(r)$ — пока неизвестная функция. При $k\neq-1$ получаем $v(r)=r^{k+2}/(k+1)+C_a r^k+C_b r^{-k}$, и однородное решение $u=r^{k+2}e^{ik\varphi}/(k+1)$ получается при выборе $C_a=C_b=0$. Но при $k=-1$ получается решение $v(r)=r\ln r/2+C_a r+C_b/r$, и тогда ни при каких C_a, C_b функция $u(r,\varphi)=v(r)e^{ik\varphi}$ не будет однородной. Это не означает, что при $k=-1$ нет однородных решений (такими решениями будут функции $u(r,\varphi)=r\left(C_a e^{i\varphi}+C_b e^{-i\varphi}+2i\varphi e^{-i\varphi}\right)$). Но это показывает, что задача не столь проста, как кажется с первого взгляда.

Усиленное доказательство

Приведенное выше доказательство является не совсем корректным, по крайней мере, применительно к электрическим и магнитным полям. Точка $x=0$ может оказаться — и в случае используемых в оптике заряженных частиц электрических и магнитных полей легко оказывается — особой (сингулярной) точкой, в которой и интегрирование, и дифференцирование не осуществимы в полной мере и, в частности, не могут запросто меняться местами. Тем самым не исключен вариант, что в отношении однородных гармонических функций, которые обладают особыми точками при $x=0$, процедура дифференцирования перестанет быть тем универсальным инструментом, с помощью которого выполняется перебор всех имеющихся однородных гармонических функций нужного порядка. Если это так, то некоторые скалярные потенциалы однородных электрических и магнитных полей, которые, возможно, как раз и обеспечивают оптимальное функционирование электронно- или ионно-оптической системы, имеют шанс не попасть в поле зрения разработчика.

Из свойства однородности следует, что либо особая точка однородной функции совпадает с началом координат, либо вся прямая линия, проходящая через начало координат и рассматриваемую точку, целиком состоит из особых точек. Но тогда и само начало координат будет особой точкой для рассматриваемой функции (как минимум нерегулярной точкой, т. е. точкой, в окрестности которой функция неразложима в сходящийся степенной ряд). Кроме того, при отрицательных порядках однородности для однородной функции начало координат является сингулярной точкой, а при положительных нецелочисленных порядках однородности нерегулярной точкой, поскольку при $\lambda\to 0$ точка $(\lambda x_0,\lambda y_0,\lambda z_0)$ стремится к началу координат, а функция $\varphi(\lambda)=U(\lambda x_0,\lambda y_0,\lambda z_0)\sim$ $\sim\lambda^k$. (В частности, при $k\le -1$ интегралы, использованные ранее при классическом доказательстве, расходятся, а при $k<2$ перед дифференцированием под знаком интеграла необходимо аккуратно выделять сингулярную часть подынтегрального выражения). Поэтому неприятности с дифференцированием и интегрированием потенциалов однородных полей в окрестности нуля, вообще говоря, типичны. В частности, как показано в [18], единственные однородные гармонические функции, регулярные в начале координат, — это однородные гармонические полиномы, у которых порядок однородности является натуральным числом или нулем, причем имеется ровно $2m+1$ линейно независимых однородных гармонических полиномов, соответствующих порядку однородности

$m = 0,1,2,\ldots$ В частности, из приведенного в [18] доказательства следует, что при $m \neq 0,1,2,\ldots$ однородных гармонических функций, регулярных в начале координат, просто не существует. Однако семейство однородных гармонических функций, не удовлетворяющих требованию регулярности в начале координат, оказывается весьма обширным как при натуральных m, так и при любых вещественных значениях $m \neq 0,1,2,\ldots$ [3, 4, 10, 12, 13].

К счастью, процедура дифференцирования однородных гармонических функций остается универсальным процессом и для однородных гармонических функций с сингулярными точками. Однако чтобы убедиться в этом, потребуется провести более аккуратные рассуждения, чем в предыдущем разделе.

Вместо выражения (1) используем подстановку

$$V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} U(\xi,y,z)\mathrm{d}\xi + H(y,z) = \\ = V^0(x,y,z) + H(y,z), \qquad (3)$$

где $x = x_0$ — фиксированная точка, в окрестности которой функция U будет достаточно гладкой, чтобы все последующие операции интегрирования и дифференцирования были корректными. Как и в предыдущем разделе, из требования выполнения уравнения Лапласа для функции V с учетом гармоничности функции U выполняется тождество

$$V_{xx}^0 + V_{yy}^0 + V_{zz}^0 = U_x + \int_{x_0}^{x} \left(U_{yy} + U_{zz}\right)\mathrm{d}\xi = \\ = U_x - \int_{x_0}^{x} U_{xx}\mathrm{d}\xi = U_x(x_0,y,z),$$

так что для корректирующей добавки H получается уравнение

$$H_{yy} + H_{zz} = -U_x(x_0,y,z). \qquad (4)$$

Выполнение условия (4) является и необходимым, и достаточным для гармоничности функции (3). Однако теперь функции $\int_{x_0}^{x} U(\xi,y,z)\mathrm{d}\xi$, $H(y,z)$ и $U_x(x_0,y,z)$ уже не являются однородными по отдельности.

Чтобы функция V была однородной функцией порядка $(m+1)$, она должна (во всех тех точках, в которых может быть продифференцирована) удовлетворять дифференциальному соотношению Эйлера [15, 16]

$$xV_x + yV_y + zV_z - (m+1)V = 0.$$

Это дифференциальное соотношение (выполняемое во всех точках области однородности функции) является и необходимым, и достаточным, чтобы функция V была однородной. Поэтому функция H должна удовлетворять условию

$$yH_y + zH_z - (m+1)H = \\ = -\int_{x_0}^{x} \left(\xi U_x + yU_y + zU_z - mU\right)\mathrm{d}\xi + \int_{x_0}^{x} \xi U_x \mathrm{d}\xi + \\ + \int_{x_0}^{x} U\mathrm{d}\xi - xU = \left(\xi U\right)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} U\mathrm{d}\xi + \\ + \int_{x_0}^{x} U\mathrm{d}\xi - xU = -x_0 U(x_0,y,z)$$

(здесь использовано, что однородная функция U должна подчиняться соотношению Эйлера $xU_x + yU_y + zU_z - mU = 0$). Выполнение условия

$$yH_y + zH_z - (m+1)H = -x_0 U(x_0,y,z) \qquad (5)$$

будет необходимым и достаточным, чтобы функция V была однородной с нужным порядком однородности.

Требуется исследовать совместность уравнений (4) и (5) и найти функцию $H(y,z)$, которая будет удовлетворять двум уравнениям сразу. Это можно сделать, например, следующим образом. (Другой способ анализа совместности уравнений (4) и (5) и поиска совместного решения, не столь изящный, но зато не требующий от функций U, H регулярности, т. е. разложимости в сходящийся степенной ряд, и не использующий комплексные переменные, рассматривается в следующем разделе).

Распространим действие функций U, H гладким образом на комплексные аргументы y,z. Это можно сделать, если U, H в некоторой окрестности рассматриваемой точки являются регулярными по переменным y,z, т. е. разлагаются в сходящийся степенной ряд. Действительно, если функция удовлетворяет уравнению Лапласа в окрестности некоторой точки пространства, то она будет регулярной во всех точках этой окрестности. Доказательство этого факта аналогично доказательству аналитичности функций комплексного переменного, удовлетворяющих условиям Коши—Римана [40, 41], и использует функцию Грина для шара [42–44] вместо интегральной формулы Коши. Представив функцию, удовлетворяющую трехмерному уравнению Лапласа внутри шара по формуле Грина, и разложив подынтегральное ядро в степенной ряд, сходящийся в любой точке внутри шара, получим явное представление рассматриваемого решения уравнения Лапласа в виде ряда.

Обозначим полученные комплекснозначные функции комплексных переменных y,z как $\bar{H}(y,z)$ и $\bar{U}(x_0,y,z)$. При переходе от комплексных переменных y и z к комплексным переменным $p = y + \mathrm{i}z$ и $q = y - \mathrm{i}z$ выполняются равенства $\bar{H}_y = \bar{H}_p + \bar{H}_q$, $\bar{H}_z = \mathrm{i}\left(\bar{H}_p - \bar{H}_q\right)$, $\bar{H}_{yy} = \bar{H}_{pp} + 2\bar{H}_{pq} + \bar{H}_{qq}$, $\bar{H}_{zz} = -\bar{H}_{pp} + 2\bar{H}_{pq} - \bar{H}_{qq}$. Тогда условие (4) превращается в $4\bar{H}_{pq} = -\bar{U}_x\left(x_0, p, q\right)$, а условие (5) превращается в $p\bar{H}_p + q\bar{H}_q - (m+1)\bar{H} = -x_0\bar{U}\left(x_0, p, q\right)$. Из условия $4\bar{H}_{pq} = -\bar{U}_x\left(x_0, p, q\right)$ следует, что

$$\bar{H}\left(p,q\right) = -\frac{1}{4}\iint \bar{U}_x\left(x_0, p', q'\right)\mathrm{d}p'\mathrm{d}q' + f\left(p\right) + g\left(q\right),$$

где $f(p)$ и $g(q)$ — произвольные функции, а интеграл между точками не зависит от соединяющей их траектории в силу аналитичности функции $\bar{U}_x\left(x_0, p, q\right)$ по переменным p, q (в смысле, который придается этому термину в теории аналитических функций комплексного переменного). Подстановка этого выражения в оставшееся условие дает уравнение

$$pf'(p) - (m+1)f(p) + qg'(q) - (m+1)g(q) = \Lambda(p,q), \tag{6}$$

$$\Lambda(p,q) = \frac{p}{4}\int \bar{U}_x\left(x_0, p, q'\right)\mathrm{d}q' + \frac{q}{4}\int \bar{U}_x\left(x_0, p', q\right)\mathrm{d}p' - \frac{(m+1)}{4}\iint \bar{U}_x\left(x_0, p', q'\right)\mathrm{d}p'\mathrm{d}q' - x_0\bar{U}\left(x_0, p, q\right). \tag{7}$$

При произвольной функции $\Lambda(p,q)$ из уравнения (6) нельзя определить неизвестные функции $f(p)$ и $g(q)$. Однако дифференцирование условия (7) по p и по q дает тождество

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial p\partial q} = \frac{p}{4}\bar{U}_{xp}\left(x_0, p, q\right) + \frac{q}{4}\bar{U}_{xq}\left(x_0, p, q\right) - x_0\bar{U}_{pq}\left(x_0, p, q\right) - \frac{(m-1)}{4}\bar{U}_x\left(x_0, p, q\right) = 0,$$

т. к. $4\bar{U}_{pq} + \bar{U}_{xx} = 0$ из-за гармоничности функции $\bar{U}$, а $p\bar{U}_{xp} + q\bar{U}_{xq} + x\bar{U}_{xx} = (m-1)\bar{U}_x$ из-за того, что $U_x(x,y,z)$ — функция, однородная по Эйлеру с показателем однородности $(m-1)$ (как производная функции, однородной по Эйлеру с показателем однородности m [15, 16]). Поэтому $\Lambda(p,q) \equiv F(p) + G(q)$, уравнение (6) будет уравнением с разделяющимися переменными, и из условий $pf'(p) - (m+1)f(p) = F(p) + C$ и $qg'(q) - (m+1)g(q) = G(q) - C$ можно легко найти функции $f(p)$ и $g(q)$. Тем самым уравнения (4), (5) оказываются совместными, а искомая функция $\bar{H}(y,z)$ действительно существует.

Для чистоты доказательства следует убедиться, что построенная нами конструкция при вещественных аргументах принимает вещественные значения. Если комплекснозначные функции $\bar{H}(y,z)$ и $\bar{U}\left(x_0, y, z\right)$ удовлетворяют уравнениям (4), (5) в четырехмерном пространстве комплексных переменных y, z, то они же должны удовлетворять уравнениям (4), (5) и при чисто вещественных значениях y, z. В таком случае вещественные и мнимые части функций $\bar{H}(y,z)$ и $\bar{U}\left(x_0, y, z\right)$, вычисленные как функции вещественных переменных y, z, должны удовлетворять уравнениям (4), (5) по отдельности. Вещественная часть функции $\bar{U}\left(x_0, y, z\right)$ совпадает с $U\left(x_0, y, z\right)$ (мнимая же тождественно равна нулю). Поэтому вещественная часть функции $\bar{H}(y,z)$ и есть искомое решение $H(y,z)$ для системы уравнений (4), (5).

Следовательно, теорема сохраняет силу, если $x = 0$ не является регулярной точкой однородной функции $U(x,y,z)$, и никаких дополнительных исключительных случаев при этом не возникает. Легко понять, что функции $f(p)$ и $g(q)$ определяются с точностью до аддитивных добавок $C_f p^{m+1}$ и $C_g q^{m+1}$ и тем самым функция $V(x,y,z)$ зависит всего лишь от двух свободных констант C_f, C_g (свободная константа C в итоговом выражении для функции H сокращается).

Конструктивное доказательство

Полезно исследовать, с какой степенью произвола определена однородная гармоничная функция $V(x,y,z)$, производной которой является заданная однородная гармоническая функция $U(x,y,z)$. Одновременно будет получено еще одно доказательство интересующей нас теоремы, не использующее предположения об отсутствии у функции $U(x,y,z)$ особых точек в нуле, при котором для функции $V(x,y,z)$ получается явная формула, а от функции $U(x,y,z)$ не требуется разложимость в сходящийся ряд.

Пусть $U(x,y,z)$ — однородная гармоническая функция порядка $(m-1)$, $V(x,y,z)$ — однородная гармоническая функция порядка m, и требуется так определить V, чтобы выполнялось равенство $U=\partial V/\partial x$. Поскольку функции U и V являются однородными, их можно представить в виде

$$U(x,y,z)=\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^{m-1}F\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}},\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{y}\right)\right),$$

$$V(x,y,z)=\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^{m}G\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}},\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{y}\right)\right),$$

где функции $F(p,q)$ и $G(p,q)$ определяются однозначно по заданным функциям $U(x,y,z)$ и $V(x,y,z)$. (Этот способ записи U и V является модифицированной формой представления однородных функций в виде $f(x_1,x_2,\ldots x_n)=$ $=x_1^k g(x_2/x_1,\ldots,x_n/x_1)$ [15, 16].)

Требования, что $U=\partial V/\partial x$, а U и V удовлетворяют уравнению Лапласа, превращаются в систему уравнений

$$F=\frac{\partial G}{\partial p},$$

$$(m-1)^2F-p(2m-3)\frac{\partial F}{\partial p}+(1+p^2)\frac{\partial^2F}{\partial p^2}+\frac{\partial^2F}{\partial q^2}=0, \quad (8)$$

$$m^2G-p(2m-1)\frac{\partial G}{\partial p}+(1+p^2)\frac{\partial^2G}{\partial p^2}+\frac{\partial^2G}{\partial q^2}=0,$$

где используется подстановка $r=\sqrt{y^2+z^2}$, $p=x/\sqrt{y^2+z^2}$, $q=\operatorname{arctg}(z/y)$ (обратная подстановка имеет вид $x=pr$, $y=r\cos q$, $z=r\sin q$). Из условия $F=\partial G/\partial p$ системы уравнений (8) следует, что $G(p,q)=\hat{F}(p,q)+H(q)$, где $\hat{F}(p,q)=$ $=\int_{p_0}^{p}F(p,q)\mathrm{d}p$ — фиксированная функция, а $H(q)$ — некоторая пока неизвестная функция. Теперь третье уравнение системы (8) имеет вид $H''(q)+m^2H(q)=-R(p,q)$, где функция

$$R(p,q)=m^2\hat{F}-p(2m-1)\frac{\partial\hat{F}}{\partial p}+(1+p^2)\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial p^2}+\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial q^2},$$

вообще говоря, зависит от обеих переменных, тогда как функция $H(q)$ зависит только от одной. Однако при сравнении $\partial R/\partial p$ со вторым условием системы (8) (выполняющимся вследствие того, что функция $U(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа) получаем тождество $\partial R/\partial p\equiv 0$, т. е. что на самом деле функция $R(p,q)$ от переменной p не зависит. Поэтому $R(p,q)\equiv R(p_*,q)=R_0(q)$, где p_* — любая точка (в частности, можно выбрать $p_*=p_0$). Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение $H''(q)+m^2H(q)=-R_0(q)$, общее решение которого при $m\neq 0$ дается формулой

$$H(q)=\cos(mq)\left(c_a+\frac{1}{m}\int_{q_0}^{q}\sin(m\tau)R_0(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+$$
$$+\sin(mq)\left(c_b-\frac{1}{m}\int_{q_0}^{q}\cos(m\tau)R_0(\tau)\mathrm{d}\tau\right), \quad (9)$$

зависящей от двух произвольных констант. Вырожденный случай $m=0$ исследуется аналогичным образом и проблем не представляет. При обратной подстановке из решения (9) получим явную формулу для однородной гармонической функции $V(x,y,z)$, производной от которой по координате x является заданная однородная гармоническая функция $U(x,y,z)$.

В результате мы еще раз доказали требуемое утверждение и вдобавок получили конструктивный способ для вычисления однородной гармонической функции $V(x,y,z)$ по заданной однородной гармонической функции $U(x,y,z)$. Константы c_a, c_b в формуле (9) определяют степень произвола, с которым можно определить функцию-прототип $V(x,y,z)$. Легко понять, что свобода выбора для функции $V(x,y,z)$ сводится к аддитивной добавке

$$V_m(y,z)=c_a\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^m\cos\left(m\operatorname{arctg}(z/y)\right)+$$
$$+c_b\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^m\sin\left(m\operatorname{arctg}(z/y)\right). \quad (10)$$

В вырожденном случае $m=0$ вместо выражения (10) аддитивной добавкой будет функция

$$V_0(y,z)=c_a+c_b\operatorname{arctg}(y/z). \quad (10a)$$

Формулы (10) и (10а) являются самой общей формой записи для однородных гармонических функций $V(y,z)$ двух переменных с заданным порядком однородности, необязательно целочисленным. Действительно, такую функцию $V(y,z)$ можно записать как $V(y,z)=\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^m \times$ $\times F(\operatorname{arctg}(z/y))$, где $F(\phi)$ — пока неизвестная функция (это является слегка измененной универсальной формой для $U(y,z)=y^m G(z/y)$, однородных функций двух переменных [15, 16]). Из требования $U_{yy}+U_{zz}=0$ следует, что функция $F(\phi)$ должна удовлетворять уравнению $F''(\phi)+m^2F(\phi)=0$, откуда сразу следуют формулы (10) и (10а).

Точно так же определяется степень произвола функции-прототипа при двукратном или трехкратном дифференцировании, при дифференцировании по смешанным направлениям и т. д. — результатом будет зависящая от нескольких произвольных констант аддитивная добавка в виде линейной комбинации эталонных однородных функций соответствующего порядка, которая обращается в тождественный ноль после выполнения дифференцирования.

Приведенные выкладки не столь изящны, как в предыдущем разделе, зато здесь не требуется распространять функции $U(x,y,z)$ и $H(x,y,z)=$ $=V(x,y,z)-\int U(x,y,z)\mathrm{d}x$ на комплексные значения аргументов и требовать от них регулярности, т. е. локальной разложимости в сходящийся ряд. Поэтому доказательство сохраняет силу при гораздо более слабых требованиях к функциям $U(x,y,z)$ и $V(x,y,z)$, чем в предыдущем случае.

Комментарии

Нетривиальность теоремы о дифференцировании трехмерных гармонических функций можно проиллюстрировать тем фактом, что для двумерных однородных функций она *несправедлива*.

А именно, возьмем в качестве примера двумерную гармоническую функцию $U(x,y)=$ $=\operatorname{arctg}(y/x)$, которая имеет нулевой порядок однородности. Функция $V(x,y)$, удовлетворяющая требованию $\partial V/\partial x=U$, имеет вид $V(x,y)=$ $=\int U\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg}(y/x)+y\ln\sqrt{x^2+y^2}+h(y)$, где $h(y)$ — произвольная функция. Для того чтобы эта функция $V(x,y)$ была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы $h(y)=a+by$, где a, b — произвольные константы. Ни при каком выборе констант a, b функция $V(x,y)$ не может быть сделана однородной (мешает логарифм): чтобы убедиться в этом, достаточно проверить выполнение дифференциального соотношения Эйлера для однородных функций применительно к функции $V(x,y)$. При этом зависящие от двух свободных констант трехмерные функции

$$V(x,y,z)=x\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+z\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{y}\right)+$$
$$+y\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{y^2+z^2}}+ay+bz,$$

как легко можно проверить, являются и гармоническими, и однородными по Эйлеру и обеспечивают выполнение условия $\partial V(x,y,z)/\partial x=U(x,y)$.

Другим примером подобного рода служит однородная гармоническая функция $U(x,y)=$ $=x/(x^2+y^2)$ с порядком однородности $m=-1$. Для трехмерных однородных гармонических функций нулевого порядка $V(x,y,z)=$ $=\ln\sqrt{(x^2+y^2)/(y^2+z^2)}+a+b\operatorname{arctg}(y/z)$ выполняется соотношение $\partial V/\partial x=U$, но двумерной однородной гармонической функции нулевого порядка $V(x,y)$, для которой было бы выполнено условие $\partial V/\partial x=U$, не существует.

Справедливости ради следует отметить, что функции $\operatorname{arctg}(y/x)$ и $x/(x^2+y^2)$ — единственные (в определенном смысле) примеры двумерных гармонических и однородных функций двух переменных $U(x,y)$, для которых теорема о дифференцировании, рассматриваемая на классе двумерных гармонических однородных функций, не выполняется. Чтобы убедиться в этом, достаточно использовать для функции $U(x,y)$ формулу (10) и проверить, что при $m\neq 0$, $m\neq -1$ всегда можно сконструировать такую двумерную гармоническую однородную функцию $V(x,y)$ порядка $(m+1)$ (задаваемую с помощью тех же самых формул (10), но с заменой $m\to m+1$ и с правильно подобранными константами c_a, c_b), для которой $\partial V/\partial x=U$. Точно также и в случае оставшихся вне поля зрения частных решений $U(x,y)=1$

(для $m=0$) и $U(x,y)=y/(x^2+y^2)$ (для $m=-1$) существуют двумерные гармонические однородные функции $V(x,y)$ порядка $(m+1)$, для которых выполнено условие $\partial V/\partial x=U$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Может показаться, что разные варианты доказательства, рассмотренные в этой статье, являются не более чем интеллектуальным развлечением и вполне достаточно ограничиться классическим случаем. Да, действительно, далеко не все однородные гармонические функции, представляющие интерес для оптики заряженных частиц [2, 3, 9, 10, 12, 13], обладают нужным поведением функции $U(x,y,z)$ в нуле, как это требует классическое доказательство. Но много ли неприятностей может доставить нарушение условия регулярности функции в одной-единственной точке? К сожалению, имеется достаточно примеров математических теорем, для которых нарушение требуемого условия в одной-единственной точке приводит к вполне катастрофическим последствиям. (Например, чтобы интеграл от функции комплексного переменного $f(z)$ по замкнутому контуру был равен нулю, требуется аналитичность функции $f(z)$ во всех точках, лежащих внутри контура [40, 41]. Аналитичность функции $f(z)=1/z$ нарушается в единственной точке $z=0$. Однако этого достаточно, чтобы интеграл от $f(z)$ по границе единичного круга с центром в начале координат стал равен $2\pi\mathrm{i}$ вместо нуля.)

В случае рассматриваемой нами теоремы эти последствия могут быть достаточно неприятными. Теорема о дифференцировании и интегрировании однородных гармонических функций служит основой для получения общих формул для потенциалов однородных электрических и магнитных полей [9, 17]. Важным моментом в этом процессе является то, что получаемые формулы действительно являются универсальными, т. е. что любое однородное поле может быть описано с их помощью и что других однородных полей с рассматриваемым порядком однородности в природе не существует. Поэтому при оптимизации электронно-оптической системы есть гарантия, что оптимум, полученный с помощью указанных общих формул, действительно является наилучшим. Если же какие-то однородные поля выпадают из рассмотрения, то легко может оказаться, что именно они-то и были бы оптимальными для решения поставленной задачи.

Примером может служить интегральная формула Уиттекера [18]

$$U(x,y,z)=\int_0^{2\pi}\left(x\cos\tau+y\sin\tau+\mathrm{i}z\right)^m h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

для однородных гармонических функций с натуральными порядками однородности $m=1,2,\ldots$ Эта формула по факту выводится в предположении о регулярности функций в начале координат, но по предположению автора должна оставаться универсальной формулой, определяющей однородные гармонические функции, также и в более общем случае.

В действительности же формула Уиттекера оказывается универсальной ровно для однородных гармонических функций, регулярных (разложимых в сходящийся ряд) в точке $x=y=z=0$. Точнее, единственные функции, которые можно получить с помощью этой формулы при натуральных m — это однородные гармонические полиномы. В этом можно убедиться, если заменить под интегралом степень суммы на сумму одночленов $x^k y^l z^{m-k-l}\cos^k\tau\sin^l\tau$ и выполнить интегрирование. Аргументы, использованные в [18], показывают, что однородные полиномы и в самом деле являются единственными однородными функциями, регулярными в начале координат, а любые другие однородные функции, в частности, однородные функции с порядком однородности, не являющимся натуральным числом, в начале координат нерегулярны. (Для доказательства этого факта достаточно представить функцию в окрестности начала координат в виде степенно́го ряда по переменным x,y,z, подставить результат в дифференциальное уравнение Эйлера для однородных функций и сгруппировать вместе одинаковые одночлены. Если исходная функция не является тождественным нулем, то из обращения в ноль множителей при одночленах сразу следует, что порядок однородности обязан быть натуральным числом, а решениями являются полиномы соответствующей степени.)

Но в таком случае при использовании формулы Уиттекера из виду упускаются многочисленные решения с натуральными порядками однородности, отличные от гармонических полиномов и не регулярные в начале координат, которые имеют большой практический смысл (не говоря уже о непредсказуемости результата при использовании формулы Уиттекера для однородных гармонических функций с нецелочисленными порядками однородности). Контрпримеры, не вписывающиеся в формулу Уиттекера, приводятся в [2, 3, 45]. Формулы общего вида для трехмерных гармонических однородных функций с целочисленными порядками однородности, которые не используют предположения о регулярности рассматриваемой функции в начале координат, конструируются с помощью методики [17] и исследуются в [9]. Интегральные формулы для трехмерных гармонических однородных функций с нецелочисленными порядками однородности исследуются в [10]. Частные случаи однородных гармонических функций, характеризуемых нецелочисленными порядками однородности, исследуются в [2, 3, 12].

Другим примером является предположение, что у электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру, скалярный потенциал обязательно является функцией, однородной по Эйлеру. Этот тезис, однако, не выполняется для полей с нулевым порядком однородности, для которых кроме однородной по Эйлеру функции нулевого порядка скалярный потенциал может содержать еще и аддитивную логарифмическую добавку [3, 14]. Тем самым, ограничиваясь при синтезе поворотных электростатических систем, которые переводят параллельный пучок на входе в параллельный пучок на выходе, исключительно потенциалами Донкина [21, 22], имеется опасность пропустить полезные электродные конфигурации. Аналогичная проблема возникает и при синтезе электростатических призм [46–48] с помощью электростатических полей, однородных по Эйлеру, если в процессе синтеза ограничиваться потенциалами Донкина [21, 22].

Благодарности

Эта статья была вдохновлена работами Юрия Константиновича Голикова, создателя и бессменного руководителя Лаборатории аналитической корпускулярной оптики при кафедре Физической электроники Ленинградского политехнического института (ныне Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого). Его вклад в идеологию синтеза спектрографических и отклоняющих электронно- и ионно-оптических систем с помощью полей, однородных по Эйлеру, является определяющим, а вклад в математическую и общую культуру его учеников, к которым относятся и авторы этой статьи — бесценным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверин И.А.* Электростатические и магнитостатические электронные спектрографы с однородными по Эйлеру потенциалами, характеризуемыми нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 3. С. 35–44. URL: http://213.170.69.26/mag/2015/abst3.php#abst5.
2. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Простейшие аналитические электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. С. 17–32.
3. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. С. 147–165.
4. *Аверин И.А., Бердников А.С.* Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 5–8.
5. *Бердников А.С., Аверин И.А.* Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 89–95.
6. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12, № 4. С. 272–281.
7. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 11–20.
8. *Бердников А.С., Аверин И.А.* О невозможности двойной фокусировки в комбинированных электрических и магнитных полях, однородных по Эйлеру // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 62–65.
9. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 13–30. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/abst4.php#abst2.
10. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Интегральные формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 31–42. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/abst4.php#abst3.
11. *Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.* Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, вып. 3. С. 39–43.
12. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Квазиполиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физические и математические науки. 2017. Т. 10, № 1. С. 71–80.
13. *Краснова Н.К., Бердников А.С., Соловьев К.В., Аверин И.А.* О квазиполиномиальных трехмерных потенциалах электрических и магнитных полей // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физические и математические науки. 2017. Т. 10, № 1. С. 81–92.
14. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Об однородности скалярных и векторных по-

тенциалов у электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5, № 1. С. 10–27.
15. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Москва: Физматлит, 2001. 616 с.
16. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. Москва: Наука, 1974. 480 с.
17. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.
18. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. Часть 2: Трансцендентные функции. Москва: ГИФМЛ, 1963. 516 с.
19. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace's Functions &c. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. P. 43–57.
20. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace's Functions &c. // Proceedings of the Royal Society of London. 1856-1857. Vol. 8. P. 307–310.
21. *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.* Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 2. С. 91–94.
22. *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.* Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 3. С. 44–47.
23. *Thomson W.* Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1847. Tome XII. P. 256–264.
24. *Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.* Трактат по натуральной философии. Часть I. Москва, Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010. 572 с.
25. *Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.* Трактат по натуральной философии. Часть II. Москва, Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. 560 с.
26. *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. Москва, Ленинград: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.
27. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1981. 512 с.
28. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Москва: Наука, 1966. 672 с.
29. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
30. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
31. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
32. *Алероев Т.С., Зверяев Е.М., Ларионов Е.А.* Дробное исчисление и его применение. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 37. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-37.
33. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus, integral and differential equations of fractional order // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / A. Carpinteri, F. Mainardi (eds). Springer Verlag, Wien, N.Y., 1997. P. 223–276.
34. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order // CISM Lecture Notes. International Centre for Mechanical Sciences Palazzo del Torso, Piazza Garibaldi, Udine, Italy, 2000.
35. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939. 719 с.
36. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. Москва: ИЛ, 1962. 351 с.
37. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Мир, 1970. 720 с.
38. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Изд-во Удмурдского государственного ун-та, 2000. 368 с.
39. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Физматлит, 2001. 576 с.
40. *Евграфов М.А.* Аналитические функции: Учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука, 1991. 447 с.
41. *Маркушевич* А.И. Теория аналитических функций. Москва: Наука. Т. 1, 1967. 491 с. Т. 2, 1968. 624 с.
42. *Боголюбов А.Н., Левашова Н.Т., Могилевский И.Е., Мухартова Ю.В., Шапкина Н.Е.* Функция Грина оператора Лапласа. Москва: Физический факультет МГУ, 2012. 130 с.
43. *Пикулин В.П., Похожаев С.И.* Практический курс по уравнениям математической физики. Москва: МЦНМО, 2004. 208 с.
44. *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физике. Москва: Изд-во МГУ, 1998. 350 с.
45. *Голиков Ю.К.* Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. Т. 44, № 2. с. 165–181.
46. *Кельман В.М., Карецкая С.П., Федулина Л.В., Якушев Е.М.* Электронно-оптические элементы призменных спектрометров заряженных частиц. Алма-Ата: Наука, 1979. 232 с.
47. *Кельман В.М., Родникова И.В., Секунова Л.М.* Статические масс-спектрометры. Алма-Ата: Наука, 1985. 264 с.
48. *Лукашевич В.В.* Масс-сепараторы. Методы расчета и анализа ионно-оптических систем // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2003. Т. 34, вып. 6. С. 1520–1562.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург (*Бердников А.С.*)

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*Краснова Н.К., Соловьев К.В.*)

Контакты: *Бердников Александр Сергеевич*, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию: 19.05.2017

THEOREM ON INTEGRATION AND DIFFERENTIATION OF 3D ELECTRIC AND MAGNETIC POTENTIALS WHICH ARE HOMOGENEOUS IN EULER TERMS

A. S. Berdnikov[1], **N. K. Krasnova**[2], **K. V. Solovyev**[2]

[1]*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*
[2]*Peter The Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia*

Electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms are used to design the systems of charge particle optics with special properties. General theory of the harmonic functions which are homogeneous in Euler terms is an important instrument in this process. This paper considers new proof of a fundamental theorem on representation of any harmonic and homogeneous in Euler terms scalar potential as a derivative of harmonic and homogeneous in Euler terms scalar potential of higher order. The said proof uses more weak assumptions about analytical properties of the scalar potential under consideration when usually. It is applicable to harmonic scalar potentials which are homogeneous in Euler terms and contains points with the violation of analytical properties of the function under consideration (in particular, singular points; in particular, at the origin of the coordinate system, which is typical for electric and magnetic fields).

Keywords: electric fields, magnetic fields, homogeneous in Euler' terms functions, similarity principle for charged particle trajectories, analytical solutions of Laplace equation

REFERENCES

1. Averin I.A. [Electrostatic and magnetostatic electron spectrographs based on Euler' homogeneous potentials with non-integer orders]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 3. pp. 35–44. Doi: 10.18358/np-25-3-i3544. (In Russ.).
2. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [The elementary analytical electric and magnetic potentials, the uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2, pp. 17–32. (In Russ.).
3. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Three-dimensional electric and magnetic potentials, the uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2, pp. 147–165. (In Russ.).
4. Averin I.A., Berdnikov A.S. [Regional fields the without net of electronic spectrographs with electrostatic fields, uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 5–8. (In Russ.).
5. Berdnikov A.S., Averin I.A. [New approach to development of ion-optical schemes of static mass spectrographs on the basis of the non-uniform magnetic fields uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 89–95. (In Russ.).
6. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. I]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2015, vol. 12, no. 4, pp. 272–281. (In Russ.).
7. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. II]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 11–20. (In Russ.).
8. Berdnikov A.S., Averin I.A. [About impossibility of double focusing in the combined electric and magnetic fields uniform in Euler]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 62–65. (In Russ.).
9. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Universal expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 13–30. Doi: 10.18358/np-26-4-i1330. (In Russ.).
10. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Integrated formulas for the three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler with nonintegral orders of uniformity]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 31–42. Doi: 10.18358/np-26-4-i3142. (In Russ.).
11. Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R. [The principle of similarity of trajectories at the movement of charged particles with a different masses in electric and magnetic fields, uniform in Euler]. *Pis'ma v ZhTF* [Letters in ZhTF], 2017, vol. 43, no. 3, pp. 39–43. (In Russ.).
12. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Quasi-polynomial three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and

mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 71–80. (In Russ.).

13. Krasnova N.K., Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Averin I.A. [About quasipolynomial three-dimensional potentials of electric and magnetic fields]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2017, vol. 10, no. 1, pp. 81–92. (In Russ.).
14. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Theorems on the homogeneity of scalar and vector potentials for 3D electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2017, vol. 5, no. 1, pp. 10–27. (In Russ.).
15. Fihtengolc G.M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 1* [Course of differential and integral calculus. Vol. 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 616 p. (In Russ.).
16. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki. T. 1* [Course of the higher mathematics. Vol. 1.]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p.
17. Gobson E.W. *Teoriya sfericheskih i ehllipsoidal'nyh funkcij* [Theory of spherical and ellipsoidal functions]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1952. 476 p. (In Russ.).
18. Whittaker E.T., Watson G. *Kurs sovremennogo analiza. Ch. 2: Transcendentnye funkcii* [Course of the modern analysis. Part 2: Transcendental functions]. Moscow, GIFML Publ., 1963. 516 p. (In Russ.).
19. Donkin W.F. On the Equation of Laplace's Functions &c. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1857, vol. 147, pp. 43–57. Doi: 10.1098/rstl.1857.0005.
20. Donkin W.F. On the Equation of Laplace's Functions &c. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1856-1857, vol. 8, pp. 307–310. Doi: 10.1098/rspl.1856.0075.
21. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers. I]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, 2000, vol. 70, no. 2, pp. 91–94. (In Russ.). (In Eng: Technical Physics, 2000, vol. 45, no. 2, pp. 232–235. Doi: 10.1134/1.1259603).
22. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [Application of Donkin's formula in the theory of energy analyzers: Part II]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, 2000, vol. 70, no. 3, pp. 44–47. (In Russ.). (In Eng: Technical Physics, 2000, vol. 45, no. 3, pp. 330–333. Doi: 10.1134/1.1259626).
23. Thomson W. Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1847, vol. XII, pp. 256–264.
24. Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G. *Traktat po natural'noj filosofii. Ch. I* [Treatise on Natural Philosophy. Part I]. Moscow, Izhevsk, NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika" Publ., 2010. 572 p. (In Russ.).
25. Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G. *Traktat po natural'noj filosofii. Ch. II* [Treatise on Natural Philosophy. Part II]. Moscow, Izhevsk, NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika" Publ., 2011. 560 p. (In Russ.).
26. Sretenskij L.N. *Teoriya n'yutonovskogo potenciala* [Theory of the Newtonian potential]. Leningrad, Moscow, OGIZ-GITTL Publ., 1946. 318 p. (In Russ.).
27. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (In Russ.).
28. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funkcij v kompleksnoj oblasti* [Integral transformations and representations of functions in complex area]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 672 p. (In Russ.).
29. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya.* Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p. (In Russ.). (Eng. ed.: *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications*. N.Y., Gordon and Breach, 1993).
30. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculation and its application]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 272 p. (In Russ.).
31. Uchaikin V.V. *Metod drobnyh proizvodnyh.* Ul'yanovsk, Artishok Publ., 2008. 512 p. (In Russ.). (Eng. ed.: *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*. Springer, Higher Education Press, 2012. 385 p.).
32. Aleroev T.S., Zveryayev E.M., Larionov E.A. [Fractional Calculus and its Applications]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2013, no. 37. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-37. (In Russ.).
33. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus, integral and differential equations of fractional order. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. A. Carpinteri, F. Mainardi (eds). N.Y., Springer Verlag, Wien, 1997. 223–276 pp.
34. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order. *CISM Lecture Notes*, Italy, Udine, Piazza Garibaldi, International Centre for Mechanical Sciences Palazzo del Torso, 2000.
35. Ince E.L. *Obyknovennye differencial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Kharkiv, ONTI Publ., 1939. 719 p. (In Russ.).
36. Trikomi F. *Differencial'nye uravneniya* [Differential equations]. Moscow, IL Publ., 1962. 351 p. (In Russ.).
37. Hartman F. *Obyknovennye differencial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1970. 720 p. (In Russ.).
38. Arnold V.I. *Obyknovennye differencial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Izhevsk, UdSU Publ., 2000. 368 p. (In Russ.).
39. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p. (In Russ.). (Eng. ed.: *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. Boca Raton, N.Y., CRC Press, 2003).
40. Evgrafov M.A. *Analiticheskie funkcii* [Analytical functions]. Third edition processed and added. Moscow, Nauka Publ., 1991. 447 p. (In Russ.).
41. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskih funkcij. T. 1, 2* [Theory of analytical functions. V. 1, 2]. Moscow, Nauka Publ. Vol. 1, 1967. 491 c. Vol. 2, 1968. 624 c.
42. Bogolyubov A.N., Levashova N.T., Mogilevskij I.E., Muhartova Yu.V., Shapkina N.E. *Funkciya Grina operatora*

Laplasa [Green function of the operator of Laplace]. Moscow, Faculty of Physics Moscow State University, 2012. 130 p. (In Russ.).
43. Pikulin V.P., Pohozhaev S.I. *Prakticheskij kurs po uravneniyam matematicheskoj fiziki* [Practical course on the equations of mathematical physics]. Moscow, MCNMO Publ., 2004. 208 p. (In Russ.).
44. Bogolyubov A.N., Kravcov V.V. *Zadachi po matematicheskoj fizike* [Tasks in mathematical physics]. Moscow, Moscow State University, 1998. 350 p. (In Russ.).
45. Golikov Yu.K. [Analytical ways of the description of harmonious functions]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, vol. 44, no. 2, pp. 165–181. (In Russ.).
46. Kel'man V.M., Kareckaya S.P., Fedulina L.V., Yakushev E.M. *Elektronno-opticheskie ehlementy prizmennyh spektrometrov zaryazhennyh chastic* [Electron-optical elements of prismatic spectrometers of the charged particles]. Alma-Ata, Nauka Publ., 1979. 232 p. (In Russ.).
47. Kel'man V.M., Rodnikova I.V., Sekunova L.M. *Staticheskie mass-spektrometry* [Static mass spectrometers]. Alma-Ata, Nauka Publ., 1985. 264 p. (In Russ.).
48. Lukashevich V.V. [Mass separators. Computational methods and analysis of ions-but-optical systems]. *Fizika elementarnyh chastic i atomnogo yadra* [Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei], 2003, vol. 34, no. 6, pp. 1520–1562. (In Russ.).

Contacts: *Berdnikov Alexander Sergeevich,*
asberd@yandex.ru

Article received in edition: 19.05.2017