ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2017, том 27, № 2, с. 66–74

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 51-72+51.73+530.1

© Б. П. Шарфарец

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ КАК НАИБОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕХАНИЗМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ. II. РАЗБОР КОНКРЕТНЫХ ПРИМЕРОВ

Приведен ряд примеров как тривиальных, так и достаточно сложных, продемонстрировавших эффективность вариационных методов при математическом моделировании различных физических процессов. Некоторые из приведенных примеров могут моделироваться и с помощью альтернативных подходов, а такие, как модель акустики пористых сред (теория Био), по всей вероятности, моделируются только с помощью вариационных методов. Основной упор в обзоре сделан на детализацию подробностей применения вариационных подходов, что не всегда делается в оригинальных работах, где эти методы используются для решения сложных задач. В приложении приведен ряд полезных сведений по вариационным методам, в том числе принцип симметрии кинетических коэффициентов Онзагера и обобщенный вариационный принцип.

Кл. сл.: механика сплошных сред, связанные физические поля, вариационный принцип, вариационное уравнение, условия голономности вариационных уравнений, диссипативный потенциал, обобщенный вариационный принцип

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работы [1]. Здесь будут приведены примеры нетривиального использования вариационного подхода при математическом моделировании взаимосвязанных полей в механике сплошных сред. Будут разобраны достаточно простые примеры использования вариационного подхода, а также обсуждавшиеся ранее случаи [2, 3], связанные с применением данного подхода при описании неустойчивости Рэлея—Плато [4] и при создании Био теории акустики пористых сред [5, 6]. В работах [2, 3] авторы не касались деталей применения вариационного подхода, принимая готовый результат из первоисточников. Здесь техника применения вариационного подхода в указанных и в ряде других случаев будет подробно рассмотрена и аргументирована.

КОНКРЕТНЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА ПРИ ПОЛУЧЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

1. Изотропная, однородная упругая среда

В качестве первого простого примера приведем использование вариационного подхода при выводе векторного уравнения движения в изотропной упругой среде без диссипации по работе [7, с. 306]. Пусть вектор $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$ представляет собой смещение точки $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ при деформации в зависимости от времени t. Известно, что лагранжиан такой обратимой системы имеет вид [7, с. 306]

$$\Lambda = \mathrm{K}-\Pi = \frac{1}{2}\left\{\rho\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)^2 - \right.$$
$$\left. -\mu\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}+\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}+\frac{\partial U_3}{\partial x_2}\right)^2\right]\right\}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{U}=(U_1,U_2,U_3)$; λ и μ — параметры Ламе (постоянные упругости); ρ — плотность среды; К и П плотности кинетической и потенциальной энергий в единице объема соответственно.

Система, описываемая лагранжианом (1), является голономной и консервативной, и, следовательно, для нее справедлив вариационный принцип наименьшего действия I с лагранжианом $\Lambda = \mathrm{K} - \Pi$ (1):

$$I=\int \Lambda\left(t,\mathbf{x},\mathbf{U},\mathbf{U}_{,i}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x \Rightarrow \mathrm{extr}.$$

Здесь $\mathbf{U}_{,i}=\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}$, $i=1,2,3$ — пространственные производные, а $\mathbf{U}_{,4}=\mathbf{U}_{,t}=\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}=\dot{\mathbf{U}}$ — производная по времени. Поскольку $\mathbf{U}$ — вектор, то в качестве определяющих функций в лагранжиане рассматриваются составляющие вектора $\mathbf{U}=(U_1,U_2,U_3)$. Система уравнений Лагранжа—Эйлера для каждой составляющей в этом случае имеет вид ([7, с. 303], [8, с. 33], [1])

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Lambda}{\partial U_{k,t}}=\frac{\partial \Lambda}{\partial U_k}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial U_{k,i}},\ k=\overline{1,3}. \tag{2}$$

Уравнение движения для одной составляющей получается подстановкой (1) в (2). Окончательно для k-й составляющей поля получено [7, с. 306]

$$\rho\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_k}(\nabla\cdot\mathbf{U})+\mu\Delta U_k,\quad k=\overline{1,3}. \tag{3}$$

Суммирование уравнений (3), взвешенных соответствующими ортами, приводит к результирующему уравнению движения в векторной форме [7]

$$\rho\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{U})+\mu\Delta\mathbf{U},\qquad k=\overline{1,3}.$$

Этот простой пример демонстрирует технику использования вариационного подхода в случае векторных полей, изучение которых типично для проблем научного приборостроения.

2. Акустика пористых однородных сред без диссипации. Модель Био

Для консервативной однокомпонентной упругой среды применение вариационной техники представлено выше. Ниже рассматривается случай двухкомпонентной однородной пористой среды, изученный в работах Био [5, 6]. Пусть $\mathbf{U}^a(\mathbf{x},t)$, где $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, а t — время, есть осредненный по пространству вектор смещения компоненты a многокомпонентной среды. Для консервативной двухкомпонентной ($a=1,2$) изотропной однородной пористой среды без диссипации в работе [9, с. 258], популяризирующей работы Био [5, 6], представлен следующий лагранжиан (отметим, что в работах [5, 6, 9] подробности вариационной техники опущены)

$$\begin{aligned}&\Lambda\left(t,\mathbf{x},\mathbf{U}^1,\mathbf{U}^2,\mathbf{U}^1_{,i},\mathbf{U}^2_{,i}\right)=\mathrm{K}-\Pi=\\&=\frac{1}{2}\Big\{\rho_{11}\left|\mathbf{U}^1_{,4}\right|^2+2\rho_{12}\mathbf{U}^1_{,4}\cdot\mathbf{U}^2_{,4}+\rho_{22}\left|\mathbf{U}^2_{,4}\right|^2-\\&-\Big[\gamma_1\varepsilon^1_{kk}\varepsilon^1_{ll}+\gamma_2\varepsilon^1_{kk}\varepsilon^2_{ll}+\gamma_3\varepsilon^2_{kk}\varepsilon^2_{ll}+\gamma_4\varepsilon^1_{kl}\varepsilon^1_{kl}+\gamma_5\varepsilon^1_{kl}\varepsilon^2_{kl}+\\&+\gamma_6\varepsilon^2_{kl}\varepsilon^2_{kl}+\gamma_7\left(\omega^1_{kl}-\omega^2_{kl}\right)\left(\omega^1_{kl}-\omega^2_{kl}\right)+\gamma_8\left|\mathbf{U}^1-\mathbf{U}^2\right|^2\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{U}^a=\left(U^a_1,U^a_2,U^a_3\right)$; К и П по-прежнему — плотности кинетической и потенциальной энергий соответственно в единице объема; К зависит только от скорости $\dot{\mathbf{U}}$, а П, как будет видно ниже, — только от пространственных производных смещения $\mathbf{U}$; $\varepsilon^a_{kl}=\dfrac{1}{2}\left[U^a_{k,l}+U^a_{l,k}\right]$ и $\omega^a_{kl}=\dfrac{1}{2}\left[U^a_{k,l}-U^a_{l,k}\right]$ — тензоры (малой) деформации и вращения соответственно; $U^a_{k,l}=\dfrac{\partial U^a_k}{\partial x_l}$; $U^a_{l,k}=\dfrac{\partial U^a_l}{\partial x_k}$; $\mathbf{U}^a_{,i}=\dfrac{\partial \mathbf{U}^a}{\partial x_i}$, $i=1,2,3$ — пространственные производные, а $\mathbf{U}^a_{,4}=\mathbf{U}^a_{,t}=\dot{\mathbf{U}}^a$ — производная по времени соответствующего смещения соответственно; $\{\rho_{ij}\}$ (с размерностью плотности) и $\{\gamma_i\}$ — феноменологические параметры системы, определение которых расписано в [5, 6] и не относится к предмету данной работы.

После учета равенств

$$\begin{aligned}\varepsilon^a_{kl}\varepsilon^b_{kl}&=\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^a\right)\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^b\right)+\\&+\frac{1}{2}\left(\nabla\times\mathbf{U}^a\right)\cdot\left(\nabla\times\mathbf{U}^b\right)+\nabla\cdot\mathbf{A}^{a,b},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{a,b}&=\frac{1}{2}\Big[\left(\mathbf{U}^a\cdot\nabla\right)\mathbf{U}^b-\mathbf{U}^a\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^b\right)+\\&+\left(\mathbf{U}^b\cdot\nabla\right)\mathbf{U}^a-\mathbf{U}^b\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^a\right)\Big]\end{aligned}$$

лагранжиан редуцируется к более компактному виду [9]

$$\Lambda\left(t,\mathbf{x},\mathbf{U}^1,\mathbf{U}^2,\mathbf{U}^1_{,i},\mathbf{U}^2_{,i}\right)=\mathrm{K}-\Pi=$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\rho_{11}\left|\dot{\mathbf{U}}^1\right|^2+2\rho_{12}\dot{\mathbf{U}}^1\cdot\dot{\mathbf{U}}^2+\rho_{22}\left|\dot{\mathbf{U}}^2\right|^2-$$
$$-\Big[\alpha_1\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^1\right)^2+2\alpha_2\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^1\right)\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^2\right)+\alpha_3\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^2\right)^2+$$
$$+\alpha_4\left|\nabla\times\mathbf{U}^1\right|^2+2\alpha_5\left(\nabla\times\mathbf{U}^1\right)\cdot\left(\nabla\times\mathbf{U}^2\right)+$$
$$+\alpha_6\left|\nabla\times\mathbf{U}^2\right|^2+\nabla\cdot\mathbf{A}_T+\alpha_8\left|\mathbf{U}^1-\mathbf{U}^2\right|^2\Big]\Big\}, \tag{4}$$

где $\mathbf{A}_T=\gamma_4\mathbf{A}^{a,a}+\gamma_5\mathbf{A}^{a,b}\gamma_6\mathbf{A}^{b,b}$, а коэффициенты α_i связаны простыми линейными соотношениями с коэффициентами γ_i.

Как видно, лагранжиан в форме (4) действительно зависит от векторов смещения и их первых производных по времени и пространственным переменным.

Решение задачи следует из вариационного принципа и лежит в русле нахождения стационарного значения интегрального функционала

$$I(u)=\int_{t_1}^{t_2}\int_V\Lambda\left(t,\mathbf{x},\mathbf{U}^1,\mathbf{U}^2,\mathbf{U}^1_{,i},\mathbf{U}^2_{,i}\right)\mathrm{d}^n x\,\mathrm{d}t\Rightarrow\mathrm{extr}. \tag{5}$$

Поэтому в качестве определяющих функций следует выбрать составляющие векторов $\mathbf{U}^1$ и $\mathbf{U}^2$: U^1_1, U^1_2, U^1_3, а также U^2_1, U^2_2, U^2_3. ($\mathbf{U}^a=\left(U^a_1,U^a_2,U^a_3\right)$, $a=1,2$). Согласно [7, с. 303], [8, с. 33], [1], а также первому примеру в настоящей работе, условия стационарности последнего функционала имеют вид системы уравнений Лагранжа—Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Lambda}{\partial U^a_{k,t}}=\frac{\partial\Lambda}{\partial U^a_k}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial U^a_{k,i}},\quad a=1,2,\quad k=\overline{1,3}. \tag{6}$$

После получения всех скалярных уравнений для U^a_k итоговые уравнения для векторных полей $\mathbf{U}^a$ легко получаются суммированием всех компонентных уравнений, взвешенных соответствующими ортами (см. пример 1 настоящей работы). Итоговые уравнения приведены, например, в [9, с. 259]:

$$\rho_{11}\frac{\partial^2\mathbf{U}^1}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{U}^2}{\partial t^2}=\alpha_1\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^1\right)+\alpha_2\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^2\right)-$$
$$-\alpha_4\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{U}^1\right)-\alpha_5\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{U}^2\right)-\alpha_8\left(\mathbf{U}^1-\mathbf{U}^2\right),$$

$$\rho_{22}\frac{\partial^2\mathbf{U}^2}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{U}^1}{\partial t^2}=\alpha_3\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^2\right)+\alpha_2\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{U}^1\right)-$$
$$-\alpha_6\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{U}^2\right)-\alpha_5\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{U}^1\right)-\alpha_8\left(\mathbf{U}^2-\mathbf{U}^1\right).$$

Как видно, получилось два векторных уравнения движения, по числу определяющих функций. Еще раз подчеркнем, что особенности определения феноменологических коэффициентов описаны, например, в [5, 6, 9, 10].

3. Акустика пористых однородных сред с диссипацией. Модель Био

При наличии диссипации процесс необратим и в общем случае вариационный принцип неприменим, и приходится пользоваться соответствующим неголономным вариационным уравнением (пример такого использования для случая стоксова течения вязкой жидкости см. в [8, гл. 3, § 8]). Однако, если в классической механике или в механике сплошных сред (МСС) возникает необходимость наряду с кинетической и потенциальной энергиями учесть еще и диссипативные силы, то, согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов Онзагера [11, 12], в соответствующие уравнения движения добавляются производные диссипативной функции (или ее плотности, в ММС) [13, §§ 120, 121], [14, § 9], [15, 16]. Более того, при некоторых ограничениях удается сформулировать и вариационный принцип для диссипативной среды, что собственно приводит к появлению добавочной силы сопротивления в уравнении движения Лагранжа—Эйлера [15–17] (см. также Приложение).

Итак, с учетом некоторых допущений (см. Приложение) после модификации уравнения движения Лагранжа—Эйлера для однородной упругой среды (2) с помощью принципа симметрии кинетических коэффициентов Онзагера получается уравнение движения (Приложение (П1)). Аналогично может быть записано после упомянутой модификации уравнение движения для двухкомпонентной среды (6) с учетом диссипации

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Lambda}{\partial U^a_{k,t}}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial U^a_{k,i}}-\frac{\partial\Lambda}{\partial U^a_k}+\frac{\partial\Phi}{\partial U^a_{k,i}}=0,\quad a=1,2;\quad k=\overline{1,3}. \tag{7}$$

Именно так выглядит соответствующее уравнение движения в работах [5, 6, 9, 10]. Функция диссипации Ф принимается в [9, с. 261] в общем случае равной квадратичной функции от разности соответствующих скоростей с учетом их ряда временны́х производных

$$\Phi = \sum_n a_n \left[\frac{\partial^n \mathbf{U}^1}{\partial t^n} - \frac{\partial^n \mathbf{U}^2}{\partial t^n} \right]^2, \qquad n = 1, 2, ..., N,$$

а, например, в работах [5, 6], [10, с. 246, 247] авторы ограничиваются только квадратом разности скоростей ($n = 1$):

$$\Phi = a \left[\frac{\partial \mathbf{U}^1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{U}^2}{\partial t} \right]^2. \tag{8}$$

После принятия новых обозначений $\mathbf{u} = \mathbf{U}^1$ и $\mathbf{U} = \mathbf{U}^2$ для векторов смещения соответственно в твердом каркасе и в жидкости, а затем использования уравнений (7) и (8) в [5, 6, 9, 10] получены следующие уравнения движения с учетом диссипации

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = P\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + Q\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \\ - N\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + bF(\omega)\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right),$$

$$\rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^2}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = R\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) + Q\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \\ - bF(\omega)\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right).$$

Функция $F(\omega)$, учитывающая затухание в зависимости от круговой частоты, а также константы P, Q, N, b, R описаны в работах [5, 6, 9, 10].

Замечание 1. Ранее ряд данных о диссипативной функции был изложен в приложении к работе [1]. Отметим также, что диссипативная функция обычно рассматривается при условии, что макроскопические скорости движения настолько малы, что силы сопротивления движению можно считать линейно зависящими от скоростей. Величина Φ всегда положительна и равна половине рассеивающейся в единицу времени энергии [18, т. 1, с. 653]. Впервые в физику диссипативная функция введена Рэлеем [19, гл. 4]. Диссипативная функция является квадратичной формой от значений компонент скоростей [20, с. 102] или тензоров скоростей деформации.

Замечание 2. В работе [17] автор на основе разработанного им обобщенного вариационного принципа сумел существенно продвинуть теорию Био, изложенную в [5, 6, 9, 10].

4. Нестабильность струй (неустойчивость Рэлея—Плато)

При решении Рэлеем задачи о нестабильности струй [4] в эффекте неустойчивости Рэлея—Плато ключевым был факт использования им вариационного принципа Гамильтона для определения параметров этого весьма непростого для формализации явления. Рэлей нашел удельные (на единицу длины в среднем цилиндрической по высоте z струи) потенциальную и кинетическую энергии струи, выраженные через параметр α и его временну́ю производную $\dot{\alpha}$. Параметр α так определяет текущий радиус r этого цилиндра

$$r = a + \alpha \cos kz,$$

где a — невозмущенный радиус струи; α — амплитуда гармонического по высоте возмущения невозмущенного радиуса струи a; k — волновое число, $k = 2\pi / \lambda$; λ — период по высоте возмущения радиуса цилиндра. Уравнение движения следует из уравнения Лагранжа—Эйлера [7, с. 269]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0,$$

где функция Лагранжа L равна $L = \mathrm{K} - \Pi = L(z, t, \alpha, \dot{\alpha})$, а K и Π — указанные выше удельные величины кинетической и потенциальной энергий единицы длины возмущенного цилиндра.

Получение уравнения поведения во времени амплитуды модуляции α радиуса цилиндра a позволило Рэлею решить задачу, возможно, никак иначе не решаемую в целом.

ВЫВОДЫ

Выше был приведен ряд примеров как тривиальных, так и достаточно сложных, продемонстрировавших эффективность вариационных методов при математическом моделировании различных физических процессов. Некоторые из них могут моделироваться и с помощью альтернативных подходов, а такие, как модель акустики пористых сред (теория Био), по всей вероятности, моделируются только с помощью вариационных методов. При этом основной упор в работе сделан на детализацию подробностей применения вариационных подходов, что не всегда делается в оригинальных работах, где они используются для решения сложных задач. Отметим еще раз, что большое число примеров моделирования задач механики сплошных сред приведено в работе [8] и целом ряде других работ.

Приложение

ПРИНЦИП СИММЕТРИИ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОНЗАГЕРА И ОБОБЩЕННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Модификация уравнений движения Лагранжа—Эйлера при наличии диссипации с помощью принципа симметрии кинетических коэффициентов Онзагера

В условиях, когда соблюдены условия справедливости принципа симметрии кинетических коэффициентов Онзагера (см. ниже), существует возможность обобщения уравнений движения Лагранжа—Эйлера (2) для случая консервативной голономной системы на случай систем с диссипацией. Коррекция эталонного уравнения Лагранжа—Эйлера (2) при наличии диссипации производится за счет добавки к его правой части производной от диссипативной функции по скоростям [13, с. 404], что находится в соответствии с принципом симметрии кинетических коэффициентов Онзагера

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Lambda}{\partial U_{k,t}}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial U_{k,i}}-\frac{\partial \Lambda}{\partial U_k}=-\frac{\partial \Phi}{\partial U_{k,t}}, \quad k=\overline{1,3}. \qquad (\text{П1})$$

Последнее выражение модифицировано из выражения [13, (121.8)] с учетом специфики механики сплошных сред.

Такой способ введения диссипации в уравнения движения следует из принципа симметрии кинетических коэффициентов Онзагера и никак не опирается на исходный вариационный принцип Гамильтона, на основе которого получено уравнение движения (2) в бездиссипативном случае. При получении выражений типа (П1) принимаются следующие допущения [13, § 120, 121] (здесь ограничения переформулированы применительно к плотности функции Лагранжа — лагранжиана, рассматриваемого в механике сплошных сред):

- рассматриваются только слабонеравновесные термодинамические системы;
- лагранжиан зависит только от смещения $\mathbf{U}$ и его производных первого порядка, а производными высшего порядка можно пренебречь;
- принимается, что плотность кинетической энергии K зависит только от скорости $\mathbf{V}=\dot{\mathbf{U}}$, а плотность потенциальной энергии Π зависит только от смещения $\mathbf{U}$;
- диссипативная функция Φ является квадратичной функцией компонент скоростей $U_{k,t}$.

Вариационный принцип Онзагера

Для слабонеравновесных термодинамических систем Онзагером был сформулирован вариационный принцип наименьшей диссипации энергии [11, 12], [13, § 120], [14, § 9]. Принцип основывается на симметрии кинетических коэффициентов и может быть записан в виде экстремальности функционала, построенного как разность скорости приращения энтропии $\dot{s}$ и диссипативной функции Φ, рассматриваемых соответственно как функции процессов термодинамической релаксации α и их скоростей $\dot{\alpha}$:

$$\delta_{\dot{\alpha}}\left[\dot{s}(\alpha)-\Phi(\dot{\alpha})\right]=0. \qquad (\text{П2})$$

Кинетические уравнения, получаемые из вариационного принципа (П2) и описывающие приближение термодинамической системы к равновесию, могут быть записаны в форме

$$\frac{\partial \dot{s}(\alpha)}{\partial \dot{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}}\Phi(\dot{\alpha}), \qquad \frac{d}{dt}s(\alpha)=2\Phi(\dot{\alpha}) \qquad (\text{П3})$$

и удовлетворяют принципу симметрии кинетических коэффициентов [11, 12], [13, §120].

Вариационный принцип для механических систем с диссипацией [15, 16, 21]

Как отмечалось выше, обобщение уравнений движения (П1) при наличии диссипации производится за счет добавки к его правой части производной от диссипативной функции по скоростям, что находится в соответствии с принципом симметрии кинетических коэффициентов Онзагера.

В [16], однако, показано, что для механических систем с диссипацией уравнения движения в форме (П1) получаются из вариационного принципа Гамильтона с функцией Лагранжа в виде следующего обобщения:

$$\Lambda=\mathrm{K}-\Pi-\int_0^t\Phi(\dot{\mathbf{U}})\mathrm{d}t', \qquad (\text{П4})$$

где в отличие от лагранжиана в форме (1), соответствующей вариационному принципу Гамильтона для консервативных, голономных систем, добавлено слагаемое в виде интеграла по времени от диссипативной функции. После варьирования действия (5) с лагранжианом (П4) и соблюдения некоторых допущений в [15] получено уравнение движения, полностью совпадающее с уравнением движения (П1). Но в данном случае получено нужное уравнение движения не простым добавлением дополнительного слагаемого, как это предлагается делать обычно, а на основе сформулированного вариационного принципа.

Замечание #1. В [16] нижний предел в интеграле (П4) принят равным нулю, на самом деле его необходимо принять равным, например, нижнему временнóму пределу t_1 (см., например, (5)) в силу отсутствия вариации полей в этой точке. То есть в (П4) фигурирует первообразная по времени функции $\Phi(\dot{\mathbf{U}})$ с точностью до не зависящего от времени слагаемого, которое, следуя [16], примем равным нулю. Этот факт будет использован ниже при получении вариационных равенств в случае, когда диссипативный потенциал Φ представлен в функции компонент тензора скоростей деформации $\dot{\varepsilon}_{kl}$ (см., например, выражения [1, (П1), (П2)] с поправкой на то, что в работе приняты обозначения компонент тензора скоростей деформации через ε_{kl}).

Обобщенный вариационный принцип для диссипативной гидродинамики [15, 16, 21]

В работах [15, 16, 21] был сформулирован обобщенный вариационный принцип (ОВП) для диссипативной механики сплошной среды, который объединил вариационный принцип Гамильтона для бездиссипативных механических систем с вариационным принципом Онсагера для диссипативных термодинамических систем. Лагранжиан Λ в ОВП строится, как сумма обычного лагранжиана из принципа Гамильтона (в виде разности кинетической K и уже не потенциальной, а внутренней энергии E) и проинтегрированного по времени и умноженного на абсолютную температуру соотношения Онзагера (П2)

$$\Lambda = \mathrm{K} - \mathrm{E} + T\left[s - \int_0^t \Phi \mathrm{d}t'\right].$$

Далее, с учетом свободной энергии F ($\mathrm{F} = \mathrm{E} - Ts$), функция Лагранжа может быть записана в окончательном виде

$$\Lambda = \mathrm{K} - \mathrm{F} - T\int_0^t \Phi \mathrm{d}t', \qquad (\text{П}5)$$

который по структуре похож на (П4) с той лишь разницей, что вместо потенциальной энергии Π сюда входит свободная энергия F и интеграл от диссипативной функции умножен на температуру T.

Сам обобщенный вариационный принцип формулируется так же, как и принцип Гамильтона, а именно: пусть рассматриваемая масса сплошной диссипативной среды занимает в моменты времени t_1 и t_2 объемы V, тогда из всех возможных траекторий движения сплошной среды реализуется такая, которая доставляет экстремум действию I:

$$\delta I = 0, \qquad I = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \Lambda \mathrm{d}v\, \mathrm{d}t,$$

где лагранжиан определяется выражением (П5).

Очевидно, в рамках такого подхода для бездиссипативных систем получается обычный вариационный принцип Гамильтона, а для неподвижных термодинамических систем — принцип минимальной диссипации Онзагера (П2).

Случай зависимости диссипативного потенциала от тензора скоростей деформации

Выпишем компоненты тензора скоростей деформации в следующем виде:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{2}\left(U_{k,lt} + U_{l,kt}\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{U}_{k,l} + \dot{U}_{l,k}\right),$$
$$U_{k,lt} = \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l \partial t} = \frac{\partial \dot{U}_k}{\partial x_l}.$$

Тогда, очевидно, функция Φ будет зависеть от переменных $\dot{U}_{k,l}$, $k,l = \overline{1,3}$ (см. [1]). Рассмотрим вариационную производную диссипативной составляющей в лагранжиане (П4), (П5) либо в другом случае лагранжиана, включающего интеграл от диссипативного потенциала для составляющей вектора смещения U_k: $\dfrac{\delta\int_{t_1}^{t}\Phi\left(\dot{U}_{k,l}\right)\mathrm{d}t'}{\delta U_k}$ (в последней вариационной производной уже учтено Замечание #1 относительно нижнего предела интегрирования в числителе вариационной производной). Приведем очевидную цепочку трансформаций вариации величины $\delta\int_0^t \Phi\left(\dot{U}_{k,l}\right)\mathrm{d}t'$ под интегралом

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left(\delta\int_{t_1}^{t}\Phi\left(\dot{U}_{k,l}\right)\mathrm{d}t'\right)\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t, \qquad (\text{П}6)$$

вариация которого необходима при получении результирующего уравнения движения при наличии диссипации:

$$\delta\int_0^t \Phi\left(\dot{U}_{k,l}\right)\mathrm{d}t' \Rightarrow \frac{\partial\int_{t_1}^{t}\Phi\left(\dot{U}_{k,l}\right)\mathrm{d}t'}{\partial \dot{U}_{k,l}}\delta\dot{U}_{k,l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial\Phi\left(\dot{U}_{k,l}\right)}{\partial\dot{U}_{k,l}}\delta U_{k,l} \Rightarrow \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial\left(\dfrac{\partial\Phi\left(\dot{U}_{k,l}\right)}{\partial\dot{U}_{k,l}}\right)}{\partial x_l}\delta U_k. \quad (\text{П7})$$

Приведенная трансформация вызвана последовательным приведением способом интегрирования по частям под интегралом (П6) вариации $\delta\dot{U}_{k,l}$ к вариации δU_k с учетом равенства нулю вариаций на границах. Таким образом, соответствующая вариационная производная равна

$$\frac{\delta\int_{t_1}^{t}\Phi\left(\dot{U}_{k,l}\right)\mathrm{d}t'}{\delta U_k} = \frac{\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial\left(\dfrac{\partial\Phi\left(\dot{U}_{k,l}\right)}{\partial\dot{U}_{k,l}}\right)}{\partial x_l}\delta U_k}{\delta U_k} =$$

$$= \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial\left(\dfrac{\partial\Phi\left(\dot{U}_{k,l}\right)}{\partial\dot{U}_{k,l}}\right)}{\partial x_l}, \qquad k=\overline{1,3}. \quad (\text{П8})$$

Результирующее уравнение движения следует из равенства нулю вариационной производной лагранжианов (П4), (П5) либо каких-либо других, в которых присутствует диссипативная компонента добавкой диссипативной составляющей вариационной производной (П8).

Замечание #2. Как видно из техники получения цепочки (П6), (П7), полученная трансформация стала возможной вследствие того, что диссипативная добавка к лагранжиану в (П4) и (П5) представляет собой первообразную по времени от плотности диссипативного потенциала Φ, что, очевидно, согласуется и с размерностью диссипативной добавки к лагранжиану.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарфарец Б.П.* Вариационные методы, как наиболее эффективный механизм при моделировании взаимосвязанных физических полей в сплошных средах. I. Краткий обзор теории // Научное приборостроение. 2017. Т. 27, № 1. С. 102–112. URL: http://213.170.69.26/mag/2017/abst1.php#abst16.
2. *Евстрапов А.А., Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* Особенности моделирования микрофлюидных процессов. Учет поверхностных сил // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 55–63. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/abst4.php#abst5.
3. *Князьков Н.Н., Шарфарец Б.П.* Акустика пористоупругих насыщенных жидкостью сред. Обзор теории Био // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 1. С. 77–84. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/abst1.php#abst11.
4. *Rayleigh, Lord.* On the instability of jets // Proceedings of the London mathematical Society. 1878. Vol. 10. P. 4–13.
5. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. Vol. 28. P. 168–178.
6. *Biot M.A.* Theory of Propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. Vol. 28. P. 179–191.
7. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958. 930 с.
8. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
9. *Johnson D.L.* Recent developments in the acoustic properties of porous media // Frontiers in Physical Acoustics. XCIII. NorthHolland, 1986. P. 255–290.
10. *Carcione J.M.* Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media. Pergamon-Elsevier (Handbook of Geophysical Exploration, vol. 31, Seismic Exploration), 2001. 390 p.
11. *Onsager L.* Reciprocal relations in irreversible process. I // Phys. Rev. 1931. Vol. 37. P. 405–426.
12. *Onsager L.* Reciprocal relations in irreversible process. II // Phys. Rev. 1931. Vol. 38. P. 2265–2279.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. V. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. X. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
15. *Maximov G.A.* Generalized variational principle for dissipative hydrodynamics and its application to the Biot's equations for multicomponent, multiphase media with temperature gradient // New research in acoustics / Ed. B.N. Weis. N.Y.: Nova Science Publisher, 2008. P. 21−61.
16. *Максимов Г.А.* Обобщенный вариационный принцип для диссипативной гидродинамики и механики сплошной среды // Выч. мех-ка сплошных сред. 2009. Т. 2, № 4. С. 92–104.
17. *Maximov G.A.* Generalization of Biot's equations with allowance for shear relaxation of a fluid // Acoust. Phys. 2010. Vol. 56, no. 4. P. 493–500.
18. Физическая энциклопедия. В 5 томах / Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Советская энциклопедия, 1988–1998. 704+704+672+704+760 с.

19. *Лорд Рэлей*. Теория звука. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955. 504 с.
20. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
21. *Максимов Г.А*. О вариационном принципе в диссипативной гидродинамике: Препринт 006-2006. М.: МИФИ, 2006. 36 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию: 2.02.2017

VARIATIONAL METHODS AS THE MOST EFFECTIVE MECHANISM FOR MODELING PHYSICAL INTERRELATED FIELDS IN CONTINUOUS MEDIUM. II. CASE STUDY

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia

A number of examples, both trivial and complex enough, to demonstrate the effectiveness of variational methods for mathematical modeling of various physical processes. Some of the examples may be modeled using alternative approaches, such as the acoustic model of porous media (Bio theory), probably only modeled using variational techniques. The focus of the review is made on the details cast of the application of variational approach, which is not always done in the original papers in which these methods are used to solve complex problems. In the appendix provides some useful information on variational methods, including the Onsager principle of symmetry of kinetic coefficients and generalized variational principle.

Keywords: mechanics of continua, related physical fields, variational principle, variational equation, terms of holonomic of variational equations, dissipative potential, generalized variational principle

REFERENCES

1. Sharfarets B.P. [Variational methods as the most effective mechanism for modeling physical interrelated fields in continuous medium. I. Overview of the theory]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2017, vol. 27, no. 1, pp. 102–112. Doi: 10.18358/np-27-1-i102112. (In Russ.).
2. Evstrapov A.A., Kurochkin V.E., Sharfarets B.P. [The modeling of microfluidic processes. Account of the surface forces]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 55–63. Doi: 10.18358/np-26-4-i5563. (In Russ.).
3. Knyaz'kov N.N., Sharfarets B.P. [Acoustics of porous-elastic fluid saturated medium (An overview of the Biot theory)]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 1, pp. 77–84. Doi: 10.18358/np-26-1-i7784. (In Russ.).
4. Rayleigh, Lord. On the instability of jets. *Proceedings of the London mathematical Society*, 1878, vol. 10, pp. 4–13. Doi: 10.1112/plms/s1-10.1.4.
5. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1956, vol. 28, pp. 168–178. Doi: 10.1121/1.1908239.
6. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1956, vol. 28, pp. 179–191. Doi: 10.1121/1.1908241.
7. Mors F.M., Feshbah G. *Metody teoreticheskoj fiziki* [Methods of theoretical physics]. Vol. 1. Moscow, IIL Publ., 1958. 930 p. (In Russ.).
8. Berdichevskij V.L. *Variacionnye principy mekhaniki sploshnoj sredy* [Variation principles of mechanics of the continuous environment]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 448 p. (In Russ.).
9. Johnson D.L. Recent developments in the acoustic properties of porous media. *Frontiers in Physical Acoustics*, XCIII, North Holland, 1986, pp. 255–290.
10. Carcione J.M. *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*. Handbook of Geophysical Exploration, vol. 31, Seismic Exploration, Pergamon-Elsevier, 2001. 390 p.
11. Onsager L. Reciprocal relations in irreversible process. I. *Phys. Rev.*, 1931, vol. 37, pp. 405–426. Doi: 10.1103/PhysRev.37.405.

12. Onsager L. Reciprocal relations in irreversible process. II *Phys. Rev.*, 1931, vol. 38, pp. 2265–2279. Doi: 10.1103/PhysRev.38.2265.
13. Landau L.D., Lifshic E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. V. Statisticheskaya fizika. Ch. 1* [Theoretical physics. Vol. 1. Statistical physics. P. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 584 p. (In Russ.).
14. Landau L.D., Lifshic E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. X. Fizicheskaya kinetika*. [Theoretical physics. Vol. X. Physical kinetics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 528 p. (In Russ.).
15. Maximov G.A. Generalized variational principle for dissipative hydrodynamics and its application to the Biot's equations for multicomponent, multiphase media with temperature gradient. *New research in acoustics*, ed. B.N. Weis, NY, Nova Science Publisher, 2008, pp. 21−61.
16. Maximov G.A. [The generalized variation principle for dissipative hydrodynamics and mechanics of the continuous environment]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred* [Computational Continuum Mechanics], 2009, vol. 2, no. 4, pp. 92–104. Doi: 10.7242/1999-6691/2009.2.4.34. (In Russ.).
17. Maximov G.A. Generalization of Biot's equations with allowance for shear relaxation of a fluid. *Acoust. Phys.*, 2010, vol. 56, no. 4, pp. 493–500. Doi: 10.1134/S1063771010040147.
18. Prohorov A.M., ed. *Fizicheskaya ehnciklopediya* [Physical encyclopedia]. In 5 vol. Moscow, Sovetskaya ehnciklopediya Publ., 1988–1998. 704+704+672+704+760 p. (In Russ.).
19. Rayleigh, Lord. *Teoriya zvuka* [The Theory of Sound]. Vol. 1. Moscow, GITTL Publ., 1955. 504 p. (In Russ.).
20. Landau L.D., Lifshic E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 1. Mekhanika* [Theoretical physics. Vol. 1. Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 216 p. (In Russ.).
21. Maximov G.A. *O variacionnom principe v dissipativnoj gidrodinamike* [About the variation principle in dissipative hydrodynamics]. Preprint 006-2006, Moscow, MIFI Publ., 2006. 36 p. (In Russ.).

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article received in edition: 2.02.2017