ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2017, том 27, № 1, с. 102–112

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 51-72+51.73+530.1

© Б. П. Шарфарец

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ КАК НАИБОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕХАНИЗМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ. I. КРАТКИЙ ОБЗОР ТЕОРИИ

В целях решения задачи выбора наиболее эффективного механизма для математического моделирования взаимосвязанных физических полей в сплошных средах рассматривается использование вариационных подходов. Кратко излагается существующая по этому вопросу теория, основанная на использовании вариационных принципов либо вариационных уравнений, приводится критерий их выбора, разбираются особенности метода, приводится конкретный пример. Во второй части работы будет проделан разбор случаев, когда вариационный подход является единственно возможным для составления математических моделей мультифизичных явлений. В приложении описана диссипативная функция (диссипативный потенциал) для случая однородной вязкой теплопроводной жидкости, играющая важную роль при моделировании необратимых процессов.

Кл. сл.: механика сплошных сред, связанные физические поля, вариационный принцип, вариационное уравнение, условия голономности вариационных уравнений, диссипативный потенциал

ВВЕДЕНИЕ

В теории научного приборостроения часто приходится сталкиваться с перекрестным взаимодействием физических полей различной природы (гидродинамических, электромагнитных), различных явлений переноса и т. д., когда действие одного поля на другое порождает обратное воздействие. В случае отсутствия перекрестных взаимодействий полей или их слабого взаимодействия при построении уравнений процесса, как правило, доступно использование разнообразных методов, включая и вариационные. Однако при нетривиальных взаимодействиях полей, которые имеют место, например, для взаимопроникающих сред типа дисперсных смесей или для таких явлений, как акустика пористых сред и т. д., единственным способом построений физически разумных уравнений становится вариационный подход [1, с. 7]. В качестве примеров такого подхода можно привести теоретическое решение Рэлеем задачи Рэлея—Плато о капиллярной неустойчивости струй [2] или построение Био взаимосвязанных систем уравнений в теории акустики пористых сред [3, 4] (по этому поводу см. также работу [5], а также обзор [6]). Множество примеров применения вариационного подхода, когда он является единственно возможным, приведено, в частности, в работе [1]. Кроме того, в [1] помещена обширная библиографическая подборка публикаций по рассматриваемому вопросу.

Вариационные методы, первоначально возникшие в аналитической механике, развивались усилиями таких классиков науки, как Ферма, Бернулли, Мопертюи, Эйлер, Даламбер, Лагранж, Гамильтон, Пуанкаре и др. (см. сборник основополагающих пионерских работ на эту тему в работе [7]). Из длинного ряда работ, затрагивающих применение вариационных подходов к другим областям физики, сошлемся лишь на обзорную работу [8], классический трактат [9], где вводится понятие диссипативной функции, классические монографии по математической физике [10, 11]. Из узкоспециальных приложений вариационных методов отметим работы [12–14] и еще раз отметим обширный библиографический обзор в [1] по разнообразным приложениям вариационных методов в физике.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе рассматриваются особенности вариационного подхода применительно к механике сплошных сред, позволяющие достаточно просто находить уравнения движения как для консервативных, так и для диссипативных систем, что является нетривиальной задачей, при том что сам вариационный подход зачастую является безальтернативным в подобной ситуации, в том числе при перекрестном взаимодействии физических полей различной природы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Говорят, что поведение сплошной среды известно, если известна зависимость от лагранжевых координат и времени некоторой системы величин u^k, $k = 1, 2, \ldots$, характеризующих состояние среды и называемых определяющими функциями [1, с. 10]. Построение любой модели сплошной среды начинается с перечисления ее определяющих функций. Так, в частности, в случае движения натянутой гибкой струны такой функцией является ее отклонение от состояния равновесия $u = \psi(x, t)$ [11, с. 288], а в случае потенциального движения невязкой жидкости в линейном приближении таковым является потенциал $u = \varphi(x, y, z, t)$ скорости жидкости $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ [11, с. 294] и т. д.

Задание модели сплошной среды означает *построение замкнутой системы уравнений для определяющих функций.*

Приведем некоторые общеизвестные определения [1].

Вариацией $\delta u^k(\mathbf{x}, t)$ функции $u^k(\mathbf{x}, t)$ называют величину

$$\delta u^k(\mathbf{x}, t) = \left.\frac{\partial u^k(\mathbf{x}, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathrm{d}\varepsilon = \overline{u^k}\mathrm{d}\varepsilon\,. \qquad (1)$$

С точностью до малых $(\mathrm{d}\varepsilon)^2$ можно написать

$$u^k(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = u^k(\mathbf{x}, t) + \delta u^k(\mathbf{x}, t).$$

Из определения (1) вытекает, что оператор δ обладает свойствами оператора дифференцирования:

$$\delta(f + g) = \delta(f) + \delta(g),$$
$$\delta(f \cdot g) = \delta(f)\cdot g + f \cdot \delta(g).$$

Если F — заданная функция u^k, то

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u^k}\delta u^k.$$

Вариации функционалов. Пусть $I(u)$ — некоторый функционал, определенный на множестве M. Берется некоторый элемент $u \in \mathrm{M}$ и строится семейство процессов сравнения $u(\varepsilon)$, $u(0) = u$, $\varepsilon \ge 0$. На каждом семействе процессов сравнения $u(\varepsilon)$ функционал I становится функцией ε. Вводится величина

$$\delta I = \left.\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathrm{d}\varepsilon\,,$$

называемая вариацией функционала I.

В вариационных подходах обычно рассматривают интегральные функционалы вида [1, с. 14]

$$I(u) = \int_V \Lambda\left(x^i, u^k, u^k_{,i}\right)\mathrm{d}^n x\,. \qquad (2)$$

Здесь введено стандартное сокращение для производных функции $f\left(x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots\right)$

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Согласно (1), $\delta\left(u^k_{,i}\right) = \left(\delta u^k\right)_{,i}$. Дифференцирование по ε функции $I(u, \varepsilon)$ дает [1, с. 14]

$$\delta I = \int_V \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u^k}\delta u^k + \frac{\partial \Lambda}{\partial u^k_{,i}}\left(\delta u^k\right)_{,i}\right)\mathrm{d}^n x =$$
$$= \int_V \frac{\delta \Lambda}{\delta u^k}\delta u^k \mathrm{d}^n x + \int_{\partial V} \frac{\partial \Lambda}{\partial u^k_{,i}}\delta u^k n_i \mathrm{d}^{n-1}x.$$

Здесь

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta u^k} = \frac{\partial \Lambda}{\partial u^k} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^k_{,i}};$$

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — нормаль к границе ∂V области V. Полагая, что на ∂V $\delta u^k = 0$, имеем

$$\delta I = \int_V \frac{\delta \Lambda}{\delta u^k}\delta u^k \mathrm{d}^n x = \int_V \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u^k} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^k_{,i}}\right)\delta u^k \mathrm{d}^n x\,.$$

Условия стационарности интегрального функционала. Стационарные точки интегрального функционала (2) удовлетворяют [1, с. 15] в области V уравнениям

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta u^k} = 0\,, \qquad (3)$$

а на границе области ∂V краевым условиям

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u^k_{,i}} n_i = 0\,. \qquad (4)$$

В случае отсутствия вариаций на границе $\left.\delta u^k\right|_{\partial V} = 0$ для стационарности функционала (2) достаточно условия (3).

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И УРАВНЕНИЯ

Вариационные принципы

История механики и физики изобилует многочисленными попытками объяснить происходящие явления при помощи небольшого числа универсальных законов и общих принципов. Наиболее удачные попытки связаны с идеей о том, что наблюдаемые явления обладают экстремальными свойствами и искомые общие принципы носят вариационный характер [1, 7, 8 и др.]. Еще Аристотель писал, что природа "идет легчайшим путем, с наименьшими затратами". Первым к физической проблеме этот принцип применил П. Ферма в 1662 г., исследуя закон преломления света на границе двух различных по оптическим свойствам сред. При этом он принял постулат: "Природа действует наиболее легкими и доступными путями. …Свет выберет такой путь, чтобы время его прохождения оказалось минимальным". Из этого принципа немедленно следует закон Снеллиуса преломления света. В механике первым вариационный принцип сформулировал Мопертюи. Затем усилиями Эйлера, Лагранжа, Гамильтона, Остроградского, Якоби и Пуанкаре этот принцип аналитической механики для консервативных систем с конечным числом степеней свободы был доработан до современного состояния и носит в настоящее время название "принцип наименьшего действия". Интегральный функционал (2) в этом случае имеет вид

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{2а}$$

где S — действие; $L(t)=L\left(q(t),\,\dot{q}(t),\,t\right)$ — функция Лагранжа, равная т. н. кинетическому потенциалу $L=K-\Pi$, K и Π — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы; q и $\dot{q}$ — совокупность обобщенных координат и их производных по времени. Уравнение (3) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial q^k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}=0\,.$$

Принцип стационарного действия в форме Гамильтона утверждает, что истинная траектория механической системы является стационарной точкой функционала (2а) на множестве траекторий, выходящих в момент времени t_1 из точки q_1 и попадающих в момент времени t_2 в точку q_2 [1, с. 23]. Существует также эквивалентный ему принцип стационарного действия в форме Гамильтона—Пуанкаре, когда действие (2а) имеет вид

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(p_i\dot{q}^i-H(\mathbf{p},\mathbf{q})\right)\mathrm{d}t\,, \tag{2б}$$

где $\mathbf{p}=\left(p_1,p_2,...\right)$ — импульс системы; $H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ — функция Гамильтона системы, определяемая как преобразование Лежандра функции L по скоростям [1, с. 95] и равная для консервативных систем сумме кинетической и потенциальной энергий. Стационарные точки функционалов (2а) и (2б) совпадают.

Накопленные в физике результаты показывают [1, с. 24, 33], что вариационные принципы справедливы для всех фундаментальных физических полей, а также для микроявлений, которые можно считать обратимыми. Все элементарные взаимодействия частиц, все поля (электромагнитные, гравитационное, сильные и слабые внутриядерные взаимодействия) подчиняются законам, следующим из условий стационарности некоторого действия. Более того, убеждение в справедливости этого факта стало "общим местом" настолько, что в новых ситуациях, когда закономерности изучаемого явления еще неизвестны, предлагается заранее действие, минимизацией которого находят искомые уравнения. Так был получен ряд уравнений квантовой механики, усовершенствованы уравнения теории относительности. Поэтому в настоящее время утверждается, что все известные фундаментальные физические поля удовлетворяют принципу стационарности действия [1, с. 24].

Необходимо отметить, что в основе применения вариационных принципов лежит некоторое вариационное уравнение, связанное с вариационной формулировкой первого и второго начал термодинамики. В случаях, когда применим вариационный принцип, он эквивалентен некоторому вариационному уравнению (ВУ). В общем случае вариационное уравнение неголономно (определение см. ниже) и не сводится к условию стационарности какого-либо функционала. Условия голономности вариационного уравнения будут даны ниже.

Вариационные уравнения

Исторически первым вариационным уравнением был

принцип возможных перемещений ("золотое правило механики") [1, с. 28].

В современном виде его сформулировал Бернулли. Здесь приводится формулировка для системы материальных точек, подчиненных некоторым кинематическим идеальным (т. е. при отсутствии потерь) связям. Пусть $\mathbf{x}_s$ — координата s-й точки; $\mathbf{F}_s$ — сила, на нее действующая; $\delta \mathbf{x}_s$ — бесконечно малые перемещения, совместимые со связями. Для нахождения системы в состоянии равновесия необходимо и достаточно, чтобы суммарная работа внешних сил на возможных перемещениях была равна нулю

$$\sum_s \mathbf{F}_s \cdot \delta \mathbf{x}_s = 0 . \qquad (5)$$

При отсутствии кинематических ограничений ($\delta \mathbf{x}_s = 0$) уравнение (5) тривиально: $\mathbf{F}_s = 0$.

Принцип Даламбера и уравнение энергии перемещений. В задачах динамики ВУ (5) будет справедливым, если к силам $\mathbf{F}_s$ добавить силы инерции $-m_s \mathbf{a}_s$

$$\sum_s \left(\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s \right) \cdot \delta \mathbf{x}_s = 0 . \qquad (6)$$

Здесь m_s, $\mathbf{a}_s$ — масса и ускорение s-й частицы соответственно. ВУ (6) называется принципом Даламбера. В случае отсутствия связей из (6) следуют уравнения Ньютона.

ВУ (6) (принцип Даламбера) считают исходным постулатом механики систем с конечным числом степеней свободы.

В работе [15] было показано, что вариационное уравнение механики (6) есть уравнение энергии, записанное для возможных перемещений, которое записывается так:

$$\delta K = \delta A^e + \delta \Omega . \qquad (7)$$

Здесь $\delta A^e = \sum_s \mathbf{F}_s \cdot \delta \mathbf{x}_s$ — работа внешних сил; $K = \sum_s \frac{1}{2} m_s v_s^2$ — кинетическая энергия системы; функция $\delta \Omega$ определяется так:

$$\delta \Omega = -\sum_s \left(m_s \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_s}{\mathrm{d}t} \delta \mathbf{x}_s - m_s \mathbf{v}_s \delta \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_s}{\mathrm{d}t} \right).$$

Функционал $\delta \Omega$ на действительном движении обращается в нуль, поэтому на действительном движении вариационное уравнение (7) переходит в уравнение энергии

$$\delta K = \delta A^e .$$

ВУ (7) можно рассматривать как запись первого начала термодинамики (уравнения энергии) для возможных перемещений в случае систем с конечным числом степеней свободы [1, с. 30]. Отметим схожесть последнего уравнения и уравнения Лагранжа второго рода (см., например, [16, т. 2, с. 542]).

Как видно из (7), в ВУ не вошел вклад энергии, связанный с диссипацией. Это в данном случае и означает идеальность связей. Для неидеальных связей ВУ (7) содержало бы соответствующий член, учитывающий диссипацию энергии.

Вариационная формулировка первого начала термодинамики. Системы с конечным числом степеней свободы характеризуются кинетической энергией $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и потенциальной энергией $\Pi(\mathbf{q})$, по которым строится функция Лагранжа $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. При переходе к сплошным средам кинетическая K и внутренняя E энергии становятся функционалами от определяющих функций. Поскольку сплошная среда описывает статистические закономерности для большого числа хаотически двигающихся частиц, возникает такая характеристика, как энтропия S, которая также является функционалом от определяющих функций [1, с. 25]. Большое значение для получения результатов по данной тематике оказали работы Дж. Гиббса по термодинамике гетерогенных систем [17], а также работы Л.И. Седова (см. библиографию в [1], под номерами [212–219]).

Предполагается, что энтропия и внутренняя энергия аддитивны по массе:

$$S = \int_V \rho s \, \mathrm{d}v , \qquad \mathrm{E} = \int_V \rho \varepsilon \, \mathrm{d}v ,$$

а кинетическая энергия по объему:

$$K = \int_V \kappa \, \mathrm{d}v ,$$

где ρ — плотность массы; $\mathrm{d}v$ — элемент объема области V; s и ε — плотности энтропии и внутренней энергии на единицу массы соответственно, а κ — плотность кинетической энергии в единице объема

$$\kappa = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 .$$

В процессе при произвольных приращениях δ (а не действительных приращениях d) уравнение первого начала термодинамики таково [1, с. 30]:

$$\delta \Sigma = \delta A^e + \delta \Phi + \delta \Omega , \qquad (8)$$

где Σ — энергия системы; δA^e — приращение работы внешних макроскопических сил; $\delta \Phi$ — приток тепла и всех остальных видов энергии; $\delta \Omega$ — невязка между действительным процессом и случаем произвольного допустимого приращения (в действительном процессе $\delta \Omega = 0$).

Если функционалы Σ, δA^e, $\delta \Phi$ и $\delta \Omega$ определены, то уравнение (8) превращается в вариационное уравнение, выражающее первое начало термодинамики для возможных приращений определяющих функций. Функционал $\delta\Sigma$ есть вариация функционала Σ. Под δA^e понимают значения функционала $\mathrm{d}A^e$ на значениях δu^k.

Приток тепла $\delta\Phi$ на любом допустимом процессе определяется так [1, с. 31]:

$$\delta\Phi = \int_V \rho T \delta s \,\mathrm{d}v - \delta\Phi',$$

где $\delta\Phi'$ — некомпенсированное тепло; T — абсолютная температура. После подстановки значения $\delta\Phi$ в (8) получается вариационное уравнение первого начала термодинамики

$$\delta\Sigma = \delta A^e + \int_V \rho T \delta s \,\mathrm{d}v - \delta\Phi' + \delta\Omega. \tag{9}$$

Отметим, что при выводе (9) использовалось второе начало термодинамики [1, с. 31].

Вариационное уравнение Седова [1, 15]. В ВУ (9) не все величины можно задавать независимо. Часть задается явно, часть определяется. Вводятся следующие выражения:

$$\delta\Sigma = \int_V \rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \varepsilon\right)\mathrm{d}v,$$

$$\delta\Omega = \int_V \rho\left(v_i \frac{\mathrm{d}\delta x_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\delta x_i\right)\mathrm{d}v.$$

Работа внешних сил A^e представляется в виде суммы работ объемных и поверхностных сил $\delta A^e = \delta A^e_v + \delta A^e_s$. Здесь приняты обозначения $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. После ряда несложных преобразований ВУ (9) переписывается в следующем виде [1, с. 31]:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_V \Lambda dv dt + \delta W^* + \delta W = 0, \tag{10}$$

где

$$\Lambda = \rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 - \varepsilon\right),$$

$$\delta W = -\left[\int_V \rho v_i \delta x_i \,\mathrm{d}v\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta A^e_s \,\mathrm{d}t,$$

$$\delta W^* = \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_V \rho T \delta s \,\mathrm{d}v - \delta\Phi' + \delta A^e_V\right)\mathrm{d}t.$$

Вариационное уравнение Седова (10) имеет место для любого объема V и любого интервала времени $t \in [t_1, t_2]$. Величина Λ называется лагранжианом (плотностью функции Лагранжа, см., например, [11, гл. 3]). Лагранжиан Λ и функционал δW^* есть задаваемые величины, а функционал δW находят из вариационного уравнения (10) [1, с. 32].

ВУ (10) имеет две отличительные черты. Во-первых, оно записано для любой части сплошной среды (это сближает его по форме с уравнением энергии (9)); во-вторых, оно содержит вклады, связанные с необратимыми процессами. Построение новых моделей в рамках вариационного подхода заключается в фиксировании набора определяющих функций и задании Λ и δW^*. Вычисление δW соответствует установлению уравнений состояния.

Вариационное уравнение Лагранжа. Это уравнение используется тогда, когда V — весь объем, занятый сплошной средой, а t_1 и t_2 — моменты времени, в которые значения определяющих функций заданы. Тогда вариационное уравнение Седова (10) для всего объема перепишется в виде [1, с. 33]

$$\delta(I) + \delta\overline{A} = 0, \tag{11}$$

где

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \Lambda \mathrm{d}v\mathrm{d}t, \quad \overline{A} = \delta\overline{W^*} + \delta\overline{W}. \tag{11a}$$

Черта сверху говорит о принадлежности величины всему объему V.

Вариационное уравнение (11) обычно называют уравнением Лагранжа. Из уравнения Лагранжа следует замкнутая система уравнений сплошной среды, а также и краевые условия [1, с. 33].

Отметим, что вариационные уравнения первого начала термодинамики Седова и Лагранжа справедливы для обратимых и необратимых процессов.

Условимся, что при упоминании ниже вариационных уравнений вариации функционалов находятся в левой стороне уравнения, приравниваемого к нулю справа, как например в (10), (11).

В некоторых случаях (см. ниже) вариационное уравнение сводится к виду

$$\delta(I) = 0 \tag{12}$$

и означает, что действие имеет стационарное значение, т. е. работает *вариационный принцип*. Как уже отмечалось выше, вариационные принципы справедливы для всех физических полей, а также макроявлений, которые можно считать обратимыми. Что касается макроявлений, то справедливость вариационного принципа связана с тем, что осредненное описание процессов, в которых отсутствует "необратимая стохастичность", можно дать при помощи непосредственного осреднения микроскопического действия [1, с. 33], [11, с. 289]. Отсюда соответствующие вариационные принципы для различного рода обратимых процессов в теории сплошных сред.

Действие в физических проблемах является интегральным функционалом с лагранжианом Λ, зависящим от определяющих функций (полевых переменных) $u^k(x_i, t)$ и конечного числа их производных по координатам и времени. Если лагранжиан Λ зависит от u^k и первых производных u^k, то система уравнений вариационного типа записывается так (см., например, [1, с. 33], [11, с. 266] и др.):

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial u^k} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Lambda}{\partial u^k_{,t}} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial u^k_{,i}} = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Здесь n — число определяющих функций (полевых переменных); m — пространственная размерность задачи; $u^k_{,t} = \frac{\partial u^k}{\partial t}$; $u^k_{,i} = \frac{\partial u^k}{\partial x_i}$.

Такую форму имеют уравнения электродинамики, гравитации, уравнения механики идеальной жидкости, теории упругости. Во всех этих теориях система (12) полностью определяется заданием только лагранжиана Λ.

Важной особенностью явлений, описываемых уравнениями (13), — взаимность физических эффектов. Если рассматривается перекрестное взаимодействие между двумя полями, то действие одного поля на другое автоматически порождает обратное в некотором смысле симметричное воздействие: например, если лагранжиан Λ содержит перекрестный член $u^1_{,t}u^2_{,t}$, то в уравнении для поля u^1 появится сила со стороны поля 2, равная $u^2_{,tt}$ и наоборот. Поэтому *во всех случаях, когда взаимодействие нетривиально, вариационный подход становится единственно пригодным для построения уравнений, описывающих такие физические процессы*.

Уравнениям, которые учитывают необратимые процессы, по-видимому, также свойственна специальная структура, однако универсальные обобщения вариационных принципов на необратимые процессы пока неизвестны [1, с. 34].

Условия голономности вариационных уравнений

Вариационное уравнение называется *голономным*, если его левая часть представляет вариацию некоторого функционала [1, с. 67]. Примером голономного вариационного уравнения является уравнение (12), где вариация интегрального функционала, будучи равной нулю, превращает вариационное уравнение в вариационный принцип.

Для увеличения прозрачности приведем рассуждения для конечномерного случая с последующим обобщением для бесконечномерного. В конечномерном случае левая часть ВУ представляет собой линейную дифференциальную форму вида $F_k(\mathbf{u})\delta u_k$, где $\mathbf{u} = \{u_k\} \in R^n$. Обозначим ее (по повторяющемуся индексу проводится суммирование) через

$$\delta\Omega = F_k(\mathbf{u})\delta u_k. \tag{14}$$

Ясно, что (14) будет вариацией функционала Ω, если вектор $\{F_k(\mathbf{u})\}$ потенциален, т. е. существует функция φ такая, что

$$F_k(\mathbf{u}) = \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Пусть функции $F_k(\mathbf{u})$ непрерывны и дифференцируемы в области $A \in R^n$. Пусть δu_k и $\delta' u_k$ — два бесконечно малых поля в A. Тогда, если обозначить через $\delta'\delta\Omega$ вариацию формы $\delta\Omega$ вдоль поля $\delta' u_k$, а через $\delta\delta'\Omega$ — вариацию формы $\delta'\Omega$ вдоль поля δu_k, то можно сформулировать следующую теорему [1, с. 68].

Для того чтобы форма $\delta\Omega$ представляла в области A вариацию некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области было выполнено равенство

$$\delta'\delta\Omega = \delta\delta'\Omega. \tag{16}$$

Отсюда следуют хорошо известные условия голономности дифференциальных форм (условия потенциальности вектора $\{F_k(\mathbf{u})\}$) [1, с. 68]

$$\frac{\partial F_k(\mathbf{u})}{\partial u_m} = \frac{\partial F_m(\mathbf{u})}{\partial u_k}, \quad k, m = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Условия голономности (16) имеют локальный характер, т. е. их выполнение в окрестности некоторой точки гарантирует существование в этой окрестности функции $\varphi(\mathbf{u})$, такой что $\delta\Omega = \delta(\varphi)$. Однозначную функцию φ можно указать, если область A односвязна [1, с. 68].

Приведенные рассуждения справедливы и в случае бесконечномерных пространств (в частности, в случае теории сплошных сред), и в качестве критерия голономности также справедливо условие (16) [18, 19].

Для иллюстрации приведем пример из [1, с. 69, 70], рассмотренный для функционала

$$\delta\Omega = \int_V F\left(x, u, u_i, u_{ij}\right)\delta u \mathrm{d}^n x\,, \qquad (18)$$

где $x = \{x_i\} \in R^n$, $u_i = u_{,i}$, $u_{ij} = u_{,ij}$. Условие (16), (17) для функционала (18) имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{u_{ij}} = 0\,. \qquad (19)$$

Легко проверяется, что при $F = \delta\Lambda / \delta u$, где $\Lambda = \Lambda\left(x, u, u_i\right)$ — лагранжиан, зависящий от определяющей функции u и ее первых производных, условие (19) выполняется тождественно.

Замечание. В Физической энциклопедии [16, т. 1, с. 514] в статье о голономных системах определение голономности дано в менее общем виде, чем приведенное выше, а именно: "В аналитической механике под голономной системой понимается механическая система, в которой все наложенные связи являются геометрическими (голономными). Эти связи налагают ограничения только на возможные положения точек и тел системы, но не на их скорости. Разделение систем на голономные и неголономные весьма существенно, т. к. к голономным системам применим принцип наименьшего действия, который несправедлив для неголономных систем".

КОНКРЕТНЫЙ ПРИМЕР СОСТАВЛЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

В этой части работы остановимся на вариационном уравнении для простейшего случая сплошных сред. Исследование более сложных случаев рассмотрим в следующей части работы.

Натянутая гибкая идеальная струна. При описании этого простейшего примера в [11, с. 288–290] продемонстрирован уже упоминавшийся выше прием усреднения при использовании вариационного подхода в сплошных средах на основе методов аналитической механики дискретных частиц.

Процесс колебаний гибкой струны обратим (консервативен). Поэтому в качестве лагранжиана в [11, с. 289] для случая малых колебаний выбран кинетический потенциал

$$\Lambda\left(\psi_{,t}, \psi_{,x}\right) = K\left(\psi_{,t}\right) - U\left(\psi_{,x}\right) = \\ = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi\left(x,t\right)}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial\psi\left(x,t\right)}{\partial x}\right)^2. \qquad (20)$$

Здесь $\psi\left(x,t\right)$ — отклонение от состояния равновесия элемента струны с координатой x во времени t; K и U — линейные плотности соответственно кинетической и потенциальной энергий струны (на единицу ее длины); ρ — линейная плотность струны; T_0 — натяжение струны.

Найдем $\delta\Lambda\left(\psi_{,t}, \psi_{,x}\right)$:

$$\delta\Lambda\left(\psi_{,t}, \psi_{,x}\right) = \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,t}}\delta\psi_{,t} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,x}}\delta\psi_{,x} = \\ = \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,t}}\frac{\partial}{\partial t}\delta\psi + \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,x}}\frac{\partial}{\partial x}\delta\psi. \qquad (21)$$

Выше учтено, что операторы $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial}{\partial x}$ коммутируют с оператором δ. После вариации интеграла $I = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \Lambda \mathrm{d}v\mathrm{d}t$ получаем $\delta I = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \delta\Lambda \mathrm{d}v\mathrm{d}t$, где $\delta\Lambda$ с учетом соответствующего интегрирования по частям и факта равенства нулю вариаций на границах преобразуется к виду

$$\delta\Lambda = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,x}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,t}}\right)\delta\psi\,.$$

Определим величину $\dfrac{\delta\Lambda}{\delta\psi}$:

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,x}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,t}}\,.$$

Записываем условие стационарности действия:

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta\psi} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,x}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,t}} = 0\,,$$

что приводит к уравнению колебания струны [11, с. 290]

$$c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0\,, \qquad c^2 = \frac{T_0}{\rho}\,.$$

Исследуем голономность функционала $\delta\Lambda\left(\psi_{,t}, \psi_{,x}\right)$. Согласно (14) и (21), имеем

$$\delta\Omega = \delta\Lambda\left(\psi_{,t}, \psi_{,x}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_1\left(\mathbf{u}\right)\delta u_1 + F_2\left(\mathbf{u}\right)\delta u_2 = \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,t}}\delta\psi_{,t} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_{,x}}\delta\psi_{,x}\,.$$

Отсюда следует

$$F_1 = \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi_{,t}}, \quad F_2 = \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi_{,t}}, \qquad \delta u_1 = \delta \psi_{,t}, \quad \delta u_2 = \delta \psi_{,x}. \tag{22}$$

Выпишем условие (17) применительно к случаю (22):

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \psi_{,t} \partial \psi_{,x}} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \psi_{,x} \partial \psi_{,t}} = 0.$$

Отсюда следует, что для вариации лагранжиана (20) условия голономности соблюдаются и мы имеем дело с вариационным принципом, т. е. поиском стационарного значения интегрального функционала.

ВЫВОДЫ

Для выбора наиболее эффективного механизма математического моделирования взаимосвязанных физических полей в сплошных средах рассмотрено использование в этих целях вариационных подходов. Изложена существующая по этому вопросу теория, основанная на использовании вариационных принципов либо составлении вариационных уравнений. Приведено необходимое и достаточное условие при котором решение задачи сводится к использованию вариационного принципа. Приведен и проанализирован конкретный пример составления уравнения движения для простейшей модели сплошной среды — колебания натянутой гибкой струны. Во второй части работы предполагается разбор случаев, когда анонсированный подход является единственно возможным для составления математических моделей мультифизичных явлений. В Приложении приведена диссипативная функция (диссипативный потенциал) для случая однородной вязкой теплопроводной жидкости, играющая важную роль при моделировании необратимых процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поскольку наиболее интересными для рассмотрения являются случаи необратимых процессов, здесь приводится пример диссипативной функции применительно к случаю однородной вязкой жидкости.

Диссипативная функция (ДФ)

ДФ (функция рассеяния, диссипативный потенциал), вводимая для учета влияния сил вязкого трения на движение механической системы и характеризующая степень убывания механической энергии этой системы, а также для учета перехода энергии упорядоченного движения в энергию неупорядоченного движения (в конечном счете в тепловую), имеет размерность мощности (и равна потере энергии в единицу времени). ДФ может быть построена для механических систем, у которых скорости макроскопических движений малы настолько, что силы сопротивления движению можно считать линейно зависящими от скоростей [16, т. 1, с. 653], [20, с. 187]. ДФ ввел впервые Рэлей [9, гл. 4].

ДФ в случае классической механики является квадратичной формой от значений компонентов скоростей [21, с. 102] или тензоров скорости деформации в случае механики сплошных сред, и, например, для случая движения вязкой теплопроводной жидкости с постоянными коэффициентами вязкости ДФ, отнесенная к единице объема, записывается следующим выражением [13, с. 205] (см. также [16, т. 1, с. 653], [20, с. 187], [22, с. 423] и др.):

$$\Phi = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} + \lambda \theta^2 .$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе для вязкой изотропной жидкости; $\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформаций, $\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{Vmatrix}$, а компоненты тензора равны

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right),$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right),$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right);$$

$\theta = \nabla \cdot \mathbf{v}$; $\mathbf{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$ — вектор скорости течения жидкости; $\mathbf{D} : \mathbf{D}$ — скалярное произведение двух одинаковых тензоров $\mathbf{D}$ (определение скалярного произведения см. [13, с. 9])

$$\mathbf{D} : \mathbf{D} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 .$$

Окончательно имеем

$$\Phi = \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2+\left.\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2\right\}+$$
$$+\lambda\theta^2.$$

В терминах сдвиговой η и объемной ς вязкостей, для которых справедливы соотношения с параметрами Ламе (см., например, [23]) $\varsigma = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, $\eta = \mu$, последнее выражение для ДФ перепишется в виде

$$\Phi = \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2+\left.\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2\right\}+$$
$$+\left(\varsigma-\frac{2}{3}\eta\right)\theta^2, \qquad (П1)$$

что полностью совпадает, например, с выражением в работе [24, с. 342].

Представим Φ в переменных ε_{ik}:

$$\Phi = 2\left(\eta\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ik}^2+\frac{1}{2}\left(\varsigma-\frac{2}{3}\eta\right)\theta^2\right), \qquad (П2)$$

где $\theta^2 = \left(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yy}^2+\varepsilon_{zz}^2+2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}+2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}\right)$, индексы 1, 2, 3 отвечают соответственно переменным x, y и z. Выражение (П1) для ДФ с точностью до множителя 2 совпадает с соответствующим выражением, представленным в работах [16, т. 1, с. 653] и [20, с. 187]. Аналогичное выражение для ДФ, представленное в работе [25, с. 256], отличается от выражения (П1) только отсутствием в нем коэффициента объемной вязкости ς вследствие принятия гипотезы Стокса $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ [25, с. 67], что эквивалентно тому, что $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$ или $\varsigma = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$.

Таким образом, Φ из выражения (П2) является квадратичной формой компонент тензора скоростей деформаций с коэффициентами, характеризующими вязкость среды, и представляет собой то количество механической энергии жидкости, которое преобразуется вследствие трения во внутреннюю энергию за единицу времени в единице объема жидкости.

Если для данной среды ДФ известна, то учесть влияние внутреннего трения можно посредством вычисления компонент "диссипативного" тензора σ'_{ik} по формуле ([16, т. 1, с. 653] и [20, с. 188])

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ik}}.$$

Тогда результирующий тензор находится как сумма

$$\sigma_{ik} + \sigma'_{ik},$$

где σ_{ik} — недиссипативная составляющая результирующего тензора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
2. *Rayleigh, Lord*. On the Instability of jets // Proceedings of the London mathematical Society. 1878. Vol. 10. P. 4–13.
3. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. Vol. 28. P. 168–178. Doi: 10.1121/1.1908239.
4. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. Vol. 28. P. 179–191. Doi: 10.1121/1.1908241.
5. *Johnson D.L.* Recent developments in the acoustic properties of porous media // Frontiers in Physical Acoustics. XCIII. North Holland, 1986. P. 255–290.
6. *Князьков Н.Н., Шарфарец Б.П.* Акустика пористоупругих насыщенных жидкостью сред (обзор теории Био) // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 1. С. 77–84. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/full1/Art11.pdf.
7. Вариационные принципы механики / Сб. статей под ред. Л.С. Полака. М.: Физматгиз, 1959. 952 с.
8. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. Их развитие и применение в физике. М.: URSS, 2010. 600 с.
9. *Лорд Рэлей*. Теория звука. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955. 504 с.
10. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.: ГТТИ, 1933. 525 с.
11. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958. 930 с.
12. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975. 209 с.
13. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Иностранная литература, 1963. 256 с.

14. *Pierce A.D.* Variational formulations in acoustic radiation and scattering // Physical Acoustics. Vol. XXII. San Diego: Acad. Press, 1993. P. 195–394.
15. *Седов Л.И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // УМН. 1965. Т. 20, № 5. С. 121–180.
16. Физическая энциклопедия. В 5 томах / Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Советская энциклопедия, 1988–1998. 704+704+672+704+760 с.
17. *Гиббс Дж.* Термодинамические работы. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 492 с.
18. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
19. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972. 416 с.
20. Энциклопедия математической физики / Гл. ред. Л.Д. Фаддеев. М.: Большая российская энциклопедия, 1998. 691 с.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
22. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
23. *Шарфарец Б.П., Шарфарец Е.Б., Князьков Н.Н., Пашовкин Т.Н.* Некоторые особенности численного решения задач термоупругости и гидродинамики теплопроводящей сжимаемой вязкой жидкости с помощью универсальных пакетов // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 3. С. 57–63. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/full3/Art8.pdf.
24. *Яворский Б.М., Детлаф А.А., Лебедев А.К.* Справочник по физике. Для инженеров и студентов вузов. М.: Оникс: Мир и образование, 2006. 1056 с.
25. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 15.12.2016

ISSN 0868–5886 NAUCHNOE PRIBOROSTROENIE, 2017, Vol. 27, No. 1, pp. 102–112

VARIATIONAL METHODS AS THE MOST EFFECTIVE MECHANISM FOR MODELING PHYSICAL INTERRELATED FIELDS IN CONTINUOUS MEDIUM. I. OVERVIEW OF THE THEORY

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia

In order to solve the problem of choosing the most effective mechanism for mathematical modeling of Interrelated physical fields in continuous media are considered using the variational approach. It summarizes the current theory on the subject, based on the use of variational principles, or variational equations. Specifies the criteria for their selection, discusses the features of this method. Is provided specific example. In the second part of the work will be done the analysis of the cases, when the variational approach is only possible to produce mathematical models of multiphysical phenomena. The appendix describes the dissipative function (dissipative potential) in the case of a homogeneous viscous heat-conducting fluid, which plays an important role in the modeling of irreversible processes.

Keywords: mechanics of continua, related physical fields, variational principle, the variational equation, terms of holonomic of variational equations, dissipative potential

REFERENCES

1. Berdichevskij V.L. *Variacionnye principy mekhaniki sploshnoj sredy* [Variation principles of mechanics of the continuous environment]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 448 p. (In Russ.).
2. Rayleigh, Lord. On the Instability of jets. *Proceedings of the London mathematical Society*, 1878, vol. 10, pp. 4–13.
3. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1956, vol. 28, pp. 168–178. Doi: 10.1121/1.1908239.
4. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1956, vol. 28, pp. 179–191. Doi: 10.1121/1.1908241.
5. Johnson D.L. Recent developments in the acoustic properties of porous media. *Frontiers in Physical Acoustics*, XCIII, North Holland, 1986, pp. 255–290.
6. Knyaz'kov N.N., Sharfarets B.P. [Acoustics of porous-elastic fluid saturated medium (an overview of the Biot theory)]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 1, pp. 77–84. URL: Doi: 10.18358/np-26-1-i7784. (In Russ.).
7. Polak L.S., ed. *Variacionnye principy mekhaniki* [Variation principles of mechanics]. Collection of articles. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 952 p. (In Russ.).
8. Polak L.S. *Variacionnye principy mekhaniki. Ih razvitie i primenenie v fizike* [Variation principles of mechanics. Their development and application in physics]. Moscow, URSS Publ., 2010. 600 p. (In Russ.).
9. Rayleigh, Lord. *Teoriya zvuka* [The Theory of Sound]. Vol. 1. Moscow, GITTL Publ., 1955. 504 p. (In Russ.).
10. Kurant R., Gilbert D. *Metody matematicheskoj fiziki* [Methods of mathematical physics]. Vol. 1. Moscow, GTTI Publ., 1933. 525 p. (In Russ.).
11. Mors F.M., Feshbah G. *Metody teoreticheskoj fiziki* [Methods of theoretical physics]. Vol. 1. Moscow, IIL Publ., 1958. 930 p. (In Russ.).
12. Bio M. *Variacionnye principy v teorii teploobmena* [The variation principles in the theory of heat exchange]. Moscow, Energy Publ., 1975. 209 p. (In Russ.).
13. Serrin J. *Matematicheskie osnovy klassicheskoj mekhaniki zhidkosti* [Mathematical principles of classical fluid mechanics]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1963. 256 p. (In Russ.).
14. Pierce A.D. Variational formulations in acoustic radiation and scattering. *Physical Acoustics*, vol. XXII, San Diego, Acad. Press, 1993. pp. 195–394.
15. Sedov L.I. [Mathematical methods of creation of new models of continuous environments]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Achievements of mathematical sciences], 1965, vol. 20, no. 5, pp. 121–180. (In Russ.).
16. Prohorov A.M., ed. *Fizicheskaya ehnciklopediya* [Physical encyclopedia]. In 5 vol. Moscow, Sovetskaya ehnciklopediya Publ., 1988–1998. 704+704+672+704+760 p. (In Russ.).
17. Gibbs J. *Termodinamicheskie raboty* [Thermodynamic works]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1950. 492 p. (In Russ.).
18. Vajnberg M.M. *Variacionnye metody issledovaniya nelinejnyh operatorov* [Variation methods of a research of nonlinear operators]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956. 344 p. (In Russ.).
19. Vajnberg M.M. *Variacionnyj metod i metod monotonnyh operatorov* [Variation method and method of monotonous operators]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 416 p. (In Russ.).
20. Faddeev L.D., ed. *Ehnciklopediya matematicheskoj fiziki* [Encyclopedia of mathematical physics]. Moscow, Bol'shaya rossijskaya ehnciklopediya Publ., 1998. 691 p. (In Russ.).
21. Landau L.D., Lifshic E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 1.*

Mekhanika [Theoretical physics. Vol. 1. Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 216 p. (In Russ.).
22. Landau L.D., Lifshic E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 736 p. (In Russ.).
23. Sharfarets B.P., Sharfarets E.B., Knyaz'kov N.N., Pashovkin T.N. [Some features of the numerical solution of tasks of thermoelasticity and hydrodynamics heat-conducting compressed viscous liquid by means of universal packages]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 3, pp. 57–63. Doi: 10.18358/np-26-3-i5763. (In Russ.).
24. Yavorskiy B.M., Detlaf A.A., Lebedev A.K. *Spravochnik po fizike. Dlya inzhenerov i studentov vuzov* [Reference book on physics. For engineers and students of higher education institutions]. Moscow, Oniks: Mir i obrazovanie Publ., 2006. 1056 p. (In Russ.).
25. Schlichting H. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Boundary layer theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 712 p. (In Russ.).

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article received in edition: 15.12.2016