ФИЗИКА ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

УДК 537.534.7

© А. С. Бердников, И. А. Аверин, Н. К. Краснова, К. В. Соловьёв

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ, ОДНОРОДНЫХ ПО ЭЙЛЕРУ С НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ ОДНОРОДНОСТИ

В нашей работе "*Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности" (см. этот выпуск) мы отметили полезность парадигмы однородных по Эйлеру полей для разработки электронно- и ионно-оптических систем. Нецелочисленные показатели однородности значительно расширяют возможности и гибкость использования таких полей в оптике заряженных частиц, однако общая теория гармонических однородных функций с нецелочисленными порядками однородности в настоящий момент практически отсутствует. Данная работа посвящена рассмотрению интегральных формул, с помощью которых могут генерироваться трехмерные однородные гармонические функции с нецелочисленными порядками однородности, служащие потенциалами для соответствующих электрических и магнитных полей.

Кл. сл.: электрические поля, магнитные поля, однородные по Эйлеру функции, принцип подобия траекторий в оптике заряженных частиц, аналитические решения уравнения Лапласа

ВВЕДЕНИЕ

В этом цикле работ, первой из которых является [1], мы рассматриваем целенаправленное конструирование электронно- и ионно-оптических устройств с желаемыми свойствами, используя математический аппарат функций, однородных по Эйлеру с заданным порядком однородности k. Принцип подобия траекторий [2–7] позволяет использовать электростатические поля, однородные по Эйлеру, как эффективные энергоспектрографы [2–4, 8–11], а магнитостатические поля, однородные по Эйлеру, — эффективные масс-спектрографы [12–15], однако этим отнюдь не ограничиваются перспективы использования полей, однородных по Эйлеру, для создания разнообразных приборов с полезными свойствами. В [1] даны соответствующие определения и рассмотрена общая задача синтеза оптических схем, применяемых для решения задач оптики заряженных частиц, с помощью функций с целочисленным порядком однородности по Эйлеру.

Использование нецелочисленных порядков однородности значительно расширяет как возможности, так и гибкость в применении полей, однородных по Эйлеру, для решения практических задач оптики заряженных частиц [9, 10, 12–14]. К сожалению, в настоящий момент практически отсутствует теория однородных гармонических функций с нецелочисленными порядками однородности, хотя математическая теория однородных гармонических функций, у которых порядки однородности являются целыми числами, развита вполне удовлетворительно [16, 17].

При переносе этого подхода на область функций с нецелочисленными порядками однородности мы будем опираться на определения и результаты из [1]. Кратко приведем их.

1. Электростатическими полями и магнитостатическими полями, однородными по Эйлеру, называются поля, напряженность или индукция которых являются функциями, однородными по Эйлеру в смысле, который придается этому термину в общих курсах математического анализа [18, 19]: при произвольных значениях параметра $\lambda > 0$ для напряженности электрического поля $\mathbf{E}(x,y,z)$ выполняется тождество

$$\mathbf{E}(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\mathbf{E}(x,y,z),$$

а для индукции магнитного поля $\mathbf{B}(x,y,z)$ выполняется тождество

$$\mathbf{B}(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\mathbf{B}(x,y,z)$$

(число k является порядком однородности соответствующего поля и не обязано быть натуральным или целым числом).

2. Как правило, однородность по Эйлеру электрического или магнитного поля автоматически влечет за собой тот факт, что скалярный потенциал такого поля обязан быть однородной по Эйлеру функцией порядка k:

$$U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^k U(x, y, z)$$

или

$$\Phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^k \Phi(x, y, z)$$

(где $\mathbf{E} = -\nabla U$, $\mathbf{B} = -\nabla \Phi$). Исключением являются поля с нулевым порядком однородности, для которых скалярный потенциал кроме однородной функции нулевого порядка может содержать также аддитивную логарифмическую добавку вида $C \log\left(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ [20, 21].

3. Все гармонические функции трех переменных, однородные по Эйлеру с нулевым порядком однородности $k = 0$, даются формулой Донкина [16, 17, 22–25]:

$$U(x, y, z) = \\ = F\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \quad (1)$$

а все гармонические функции трех переменных, однородные по Эйлеру с порядком однородности $k = -1$ даются близкой к ней формулой [16, 17, 22, 23]

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \times \\ \times F\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \quad (2)$$

где $F(p, q)$ — произвольная функция, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа $\partial^2 F / \partial p^2 + \partial^2 F / \partial q^2 = 0$. Электростатические потенциалы, порождаемые формулой (1), исследовались, например, в работах [24, 25]. Электростатические потенциалы вида (2), насколько известно авторам, до сих пор глубоко не исследовались.

4. (*Теорема о дифференцировании однородных гармонических функций*) Любая гармоническая функция, однородная по Эйлеру с порядком однородности k, является производной от некоторой гармонической функции, однородной по Эйлеру с порядком однородности $k+1$:

$$U(x, y, z) = \partial W(x, y, z) / \partial x .$$

То, что производные по любой координате от гармонических функций, однородных по Эйлеру с порядком однородности $k+1$, будут гармоническими функциями, однородными по Эйлеру с порядком однородности k, является достаточно тривиальным фактом. Однако то, что *любая* однородная гармоническая функция получается как производная от некоторой однородной гармонической функции старшего порядка, причем для перебора всех функций порядка k достаточно использовать дифференцирование по одной заранее выбранной координате, является неожиданным. Доказательство соответствующей теоремы может быть найдено в [16 (глава IV, §15 и §16)] и, при ослабленных требованиях к гладкости однородных гармонических функций, в [26].

5. (*Формула Томсона для трехмерных гармонических функций*, называемая также преобразованием Кельвина [27–30]) Если $U(x, y, z)$ — произвольная гармоническая функция, то функция

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \times \\ \times U\left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \quad (3)$$

тоже будет гармонической. Легко убедиться, что если $U(x, y, z)$ — однородная по Эйлеру функция с порядком однородности k, то вычисленная согласно правилу (3) функция $V(x, y, z)$ будет однородной по Эйлеру функцией с порядком однородности $(-k-1)$. Повторная подстановка (3) осуществляет обратный переход от функции $V(x, y, z)$ к функции $U(x, y, z)$. Поэтому для каждой гармонической функции, однородной по Эйлеру с порядком однородности k, обязательно существует прототип с порядком однородности $(-k-1)$, из которого ее можно получить с помощью формулы (3). Для однородных функций $U(x, y, z)$ формула (3) принимает упрощенный вид [31, приложение Б к гл. 1]:

$$V(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{-2k-1} U(x, y, z) . \quad (3a)$$

При подстановке однородной функции U функция (3a) будет однородной, а ее гармоничность следует из выполнения уравнения Лапласа $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$ и дифференциального соотношения Эйлера $xU_x + yU_y + zU_z = kU$ [18, 19].

В итоге генерирование общих формул для гармонических функций, однородных по Эйлеру с целочисленными порядками однородности k, сводится к довольно простой технике:

а) для $k=0$ самое общее представление дается формулой (1), а для $k=-1$ самое общее представление дается формулой (2);

б) для отрицательных и целочисленных порядков однородности $k=-2,-3,-4,\ldots$ общие формулы получаются с помощью дифференцирования формулы (2) нужное число раз по переменной x (теорема о дифференцировании однородных гармонических функций гарантирует, что ни одна гармоническая функция при таком подходе не будет пропущена);

в) для натуральных показателей однородности $k=1,2,3,\ldots$ общие формулы получаются из общих формул для отрицательных показателей однородности $k=-2,-3,-4,\ldots$ с помощью подстановок Томсона (3), (3а) (обратимость подстановок (3) и (3а) гарантирует, что у однородной функции порядка k обязательно существует "томсоновский" прототип порядка $(-k-1)$). В работе [1] подробно исследуются явные общие формулы такого типа, получаемые при $k=-3,-2,-1,0,1,2$.

К сожалению, аналогичной процедуры для нецелочисленных показателей однородности пока не найдено. Теорема о дифференцировании (п. 4) и подстановка Томсона (п. 5) сохраняют свою силу и при нецелочисленных порядках однородности, однако простых общих формул для какого-либо фиксированного нецелочисленного порядка однородности, с которых можно начать описанный процесс генерирования общих формул, пока что не обнаружено. Поэтому целью настоящей работы является получение и исследование интегральных формул общего вида для однородных гармонических функций с нецелочисленными порядками однородности, которые затем могут использоваться для синтеза корпускулярно-оптических систем, функционирующих на базе принципа подобия траекторий [2–7].

ФОРМУЛА УИТТЕКЕРА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В монографии [17], а также в работе [32] приводится следующая интегральная формула для гармонических и однородных по Эйлеру функций:

$$U(x,y,z)= \\ =\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\left(z+\mathrm{i}x\cos\varphi+\mathrm{i}y\sin\varphi\right)^n h(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \qquad (4)$$

где $h(\varphi)=f(\varphi)+\mathrm{i}g(\varphi)$ — произвольная комплекснозначная функция. Предполагается, что эта формула дает универсальное представление для однородных гармонических функций с натуральными порядками однородности $n=1,2,3,\ldots$ (универсальность означает, что *все* однородные гармонические функции с порядками однородности $n=1,2,3,\ldots$ могут быть представлены в таком виде при подходящем выборе функции $h(\varphi)$). Кроме того, при произвольных значениях n, не обязательно целочисленных, эта формула, как легко проверить, также порождает однородные гармонические функции, хотя, возможно, и не все имеющиеся однородные гармонические функции соответствующего порядка.

Однако при более пристальном рассмотрении оказывается, что эта формула будет универсальной лишь для тех однородных функций, на которые наложено дополнительное условие, что они являются регулярными (т. е. разложимыми в сходящийся ряд Тейлора) в окрестности начала координат $x=y=z=0$. Также оказывается, что однородные гармонические функции, которые можно получить с ее помощью при $n=1,2,3,\ldots$, всегда являются линейной комбинацией хорошо известных однородных гармонических полиномов $1,x,y,z,x^2-z^2,y^2-z^2,\ldots$, для получения которых вовсе не требуется использовать формулу Уиттекера. Для обоснования этого утверждения можно разложить $\left(z+\mathrm{i}x\cos\varphi+\mathrm{i}y\sin\varphi\right)^n$ в сумму одночленов $\sim x^k y^l z^{n-k-l}\cos^k\varphi\sin^l\varphi$ и убедиться, что после выполнения интегрирования получится однородный многочлен от x,y,z — ведь зависящие от x,y,z множители $x^k y^l z^{n-k-l}$ успешно выносятся за знак интеграла.

Тот факт, что однородные гармонические функции, регулярные в начале координат, всегда являются гармоническими полиномами и что такие функции существуют только для натуральных порядков однородности $n=1,2,3,\ldots$, является, конечно, весьма полезной информацией. Точно также полезно знать, что формула (4) при нецелочисленных значениях n обеспечит нас если и не всеми существующими в природе однородными гармоническими функциями, то по крайней мере достаточно представительным их множеством. К сожалению, это не решает проблему *полного* перебора однородных гармонических потенциалов с нецелочисленными порядками однородности при синтезе оптических систем с электрическими и магнитными полями, однородными по Эйлеру.

Примеры однородных гармонических функций с натуральными порядками однородности, которые не являются гармоническими полиномами и, следовательно, которые нельзя выразить с помощью формулы Уиттекера, можно найти в [20, 32, 33]. Также для получения контрпримеров к формуле Уиттекера можно использовать упоминавшиеся выше общие формулы [1] для натуральных порядков однородности $n = 1, 2, 3, \ldots$, которые, как легко проверить, далеко не всегда порождают на выходе именно полиномы. Тем самым, к сожалению, формула Уиттекера не только не решает проблему общих формул для какого-либо фиксированного нецелочисленного порядка однородности, но и для натуральных порядков однородности $n = 1, 2, 3, \ldots$ вводит исследователя в заблуждение. Однако ее вполне можно использовать для генерирования отдельных гармонических однородных функций с нецелочисленными порядками однородности.

Как легко видеть, для полного перебора уиттекеровских однородных функций достаточно ограничиться выбором $h(\varphi) = 1$, $h(\varphi) = \cos m\varphi$, $h(\varphi) = \sin m\varphi$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) — такие функции образуют полный линейный базис в пространстве однородных гармонических функций, описываемых формулой Уиттекера. Это не означает, что нет смысла использовать и другие функции $h(\varphi)$ — с их помощью можно получать компактные аналитические выражения для однородных гармонических потенциалов, которые в противном случае разлагались бы в бесконечный ряд по рассматриваемому линейному базису. Но это означает, что, по всей видимости, множество уиттекеровских однородных функций окажется много меньше полного набора однородных гармонических функций с заданным порядком однородности.

ЭТАЛОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ, ОДНОРОДНЫЕ ПО ЭЙЛЕРУ С НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ ОДНОРОДНОСТИ

В [1, 24, 25] рассмотрены некоторые полезные алгебраически-дифференциальные формулы, позволяющие вычислять в самом общем виде скалярные потенциалы, являющиеся гармоническими и однородными по Эйлеру функциями с целочисленными (положительными и отрицательными) порядками однородности, рассматриваемыми в [16, 17, 22, 23]. Однако, как показывают примеры [9, 10, 12–14], однородные функции с *нецелочисленными* порядками однородности обеспечивают гораздо более богатые возможности по оптимальному конструированию соответствующих корпускулярно-оптических систем.

Процедура, описанная в предыдущем разделе, позволяет генерировать общие формулы для произвольных нецелочисленных порядков однородности, если удается найти семейства однородных функций самого общего вида для порядков однородности $-1 < k < 0$. Это можно сделать (см. [20]) с помощью функции Грина для задачи Дирихле трехмерного уравнения Лапласа с границей в виде плоскости $z = 0$ [34–36].

Далее по отдельности рассматриваются симметричные и антисимметричные относительно плоскости $z = 0$ однородные гармонические функции, интегральные выражения для которых можно сконструировать с помощью формулы Грина. Произвольную же функцию $U(x, y, z)$ всегда можно представить как сумму симметричной и антисимметричной функций: $U \equiv V + W$, где $V = \left(U(x, y, z) + U(x, y, -z)\right)/2$ — симметричная по z функция, а $W(x, y, z) = \left(U(x, y, z) - U(x, y, -z)\right)/2$ — антисимметричная по z функция. Поскольку в нашем случае каждая из этих функций по отдельности необходимым и достаточным образом будет и однородной, и гармоничной в силу однородности и гармоничности функции U, то потери общности при таком разложении не происходит.

ЭТАЛОННЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ ГАРМОНИЧНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ, СИММЕТРИЧНЫЕ ПО ПЕРЕМЕННОЙ z

Гармоническая функция $V(x, y, z)$, однородная по Эйлеру с порядком однородности k, которая является симметричной по переменной z и тем самым обеспечивает условие $\partial V(x, y, 0)/\partial z = 0$ вдоль граничной плоскости $z = 0$, при $z \geq 0$ может быть представлена как

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) K(\varphi, x, y, z)\,\mathrm{d}\varphi,$$
$$K(\varphi, x, y, z) = \tag{5}$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{z r^{k+1}}{\left((r\cos\varphi - x)^2 + (r\sin\varphi - y)^2 + z^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}r,$$

где $\Phi(\varphi)$ является произвольной периодической функцией. Интеграл для ядра $K(\varphi, x, y, z)$ в формуле (5), как легко проверить, сходится при $k > -2$, $k < 1$ (для наших целей достаточно, что он сходится при $-1 < k < 0$). В силу того, что интегральное ядро $K(\varphi, x, y, z)$ является сингулярным, результат интегрирования по формуле (5) не является антисимметричной функцией от z: можно проверить с помощью выделения сингулярных слагаемых в окрестности точки $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и последующего их интегрирования по аналитическим формулам, что $\lim_{z\to 0} V(x,y,z) \neq 0$, зато $\lim_{z\to 0} \partial V(x,y,z)/\partial z = 0$, как и должно быть у симметричной функции от z.

Формула (5) получается из универсальной функции Грина для задачи Дирихле трехмерного уравнения Лапласа с границей в виде плоскости $z = 0$ [34–36] и представления соответствующего решения уравнения Лапласа в виде

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} V_0(x',y') \times \frac{z}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y', \quad (6)$$

где $V_0(x,y) = V(x,y,0)$ — значения функции $V(x,y,z)$ вдоль плоскости $z = 0$. Формула (5) получается из этого интегрального выражения с помощью подстановки граничного условия $V(x,y,0) = r^k\Phi(\varphi)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$, а $\Phi(\varphi)$ — произвольная периодическая функция. Это можно сделать, поскольку трехмерная однородная функция трех переменных $V(x,y,z)$ после подстановки $z = 0$ превращается в однородную функцию двух переменных, а любая однородная функция двух переменных соответствующего порядка однородности может быть записана в форме $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^k \times \Phi(\operatorname{arctg}(y/x)) \equiv x^k F(y/x)$ при надлежащем выборе функции $\Phi(\varphi)$ [18, 19]. Для гарантии можно проверить, что если $V(x,y,0)$ будет однородной функцией порядка k, то из процедуры восстановления решения уравнения Лапласа в окрестности плоскости симметрии в виде ряда Тейлора по переменной z [37–42] сразу следует, что и $V(x,y,z)$ необходимым образом будет однородной функцией того же самого порядка. Как легко видеть, при разных выборах функций $\Phi(\varphi)$ из формулы (5) получаются существенно разные функции $V(x,y,z)$, поскольку их поведение $V(x,y,0) = r^k\Phi(\varphi)$ вдоль плоскости симметрии $z = 0$ будет различным.

Выбор $\Phi(\varphi) = \cos k\varphi$ в формуле (5) приводит к решению $V(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^k \times \cos\left(k\operatorname{arctg}(y/x)\right)$, а выбор $\Phi(\varphi) = \sin k\varphi$ приводит к решению $V(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^k \times \sin\left(k\operatorname{arctg}(y/x)\right)$, которые не зависят от пространственной переменной z. С точностью до линейной суперпозиции с постоянными коэффициентами это — единственные гармонические однородные функции заданного порядка, не зависящие от переменной z, т. е. зависящие лишь от двух пространственных переменных x, y [33]. Выбор $\Phi(\varphi) = 1$, $\Phi(\varphi) = \cos m\varphi$, $\Phi(\varphi) = \sin m\varphi$ ($m = 1,2,\ldots$) порождает линейный базис в пространстве функций $V(x,y,z)$, причем можно убедиться, что все базисные функции будут линейно независимы. Конструирование альтернативного линейного базиса для функций $V(x,y,z)$ в виде квазиполиномов по четным степеням переменной z, который более пригоден для практических приложений, можно найти в [33, 43].

ЭТАЛОННЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ ГАРМОНИЧНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ, АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ПО ПЕРЕМЕННОЙ z

Гармоническая функция $W(x,y,z)$, однородная по Эйлеру с порядком однородности k, которая является антисимметричной по переменной z и тем самым обеспечивает условие $W(x,y,0) = 0$ вдоль граничной плоскости $z = 0$, при $z \geq 0$ может быть выражена как

$$W(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\varphi) L(\varphi,x,y,z)\,\mathrm{d}\varphi,$$
$$L(\varphi,x,y,z) = \quad (7)$$
$$= \int_0^{+\infty} r^{k+2} \frac{(r\cos\varphi - x)^2 + (r\sin\varphi - y)^2 - 2z^2}{\left((r\cos\varphi - x)^2 + (r\sin\varphi - y)^2 + z^2\right)^{5/2}} \mathrm{d}r,$$

где $\Psi(\varphi)$ является произвольной периодической функцией, а интеграл для интегрального ядра $L(\varphi,x,y,z)$, как легко проверить, сходится при $k > -3$, $k < 0$ (для наших целей достаточно, что он сходится при $-1 < k < 0$). В силу того, что интегральное ядро $L(\varphi,x,y,z)$ является сингулярным, результат интегрирования по формуле (7) не является симметричной функцией от z. Можно убедиться с помощью выделения сингулярных слагаемых в окрестности точки $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и последующего их интегрирования по аналитическим формулам, что $\lim\limits_{z\to 0}\partial W\left(x,y,z\right)/\partial z\neq 0$, зато $\lim\limits_{z\to 0}W\left(x,y,z\right)=0$, как и должно быть у антисимметричной функции от z.

Формула (7) получается из формулы (5) при замене $k\to k+1$ и дифференцировании по переменной z, поскольку в соответствии с теоремой о дифференцировании однородных гармонических функций гармоническая антисимметричная функция порядка k получается в результате дифференцирования по переменной z гармонической симметричной функции порядка $k+1$. Выбор $\Psi_0\left(\varphi\right)=a\cos\left(k+1\right)\varphi+b\sin\left(k+1\right)\varphi$ приводит к решению $W\left(x,y,z\right)=0$ (такой выбор соответствует в формуле (5) гармоническим однородным функциям вида $V\left(x,y\right)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{k+1}\times$ $\times\cos\left(\left(k+1\right)\operatorname{arctg}\left(y/x\right)\right)$ и $V\left(x,y\right)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{k+1}\times$ $\times\sin\left(\left(k+1\right)\operatorname{arctg}\left(y/x\right)\right)$, которые не зависят от z и превращаются в ноль при дифференцировании). За этим исключением при разных выборах функций $\Psi\left(\varphi\right)$ (с точностью до аддитивных добавок вида $\Psi_0\left(\varphi\right)=a\cos\left(k+1\right)\varphi+b\sin\left(k+1\right)\varphi$) получаются существенно разные функции $W\left(x,y,z\right)$.

Выбор $\Psi\left(\varphi\right)=1$, $\Psi\left(\varphi\right)=\cos m\varphi$, $\Psi\left(\varphi\right)=$ $=\sin m\varphi$ ($m=1,2,\ldots$) очевидным образом содержит в себе линейный базис в пространстве функций $W\left(x,y,z\right)$, антисимметричных, гармоничных и однородных по Эйлеру, но не совпадает с ним. Действительно, некоторые получаемые функции будут линейно зависимыми, поскольку подстановка в формулу (7) в качестве $\Psi\left(\varphi\right)$ результата разложения функций $\cos\left(k+1\right)\varphi$ или $\sin\left(k+1\right)\varphi$ в ряды Фурье обеспечит тождественный ноль, поскольку других функций $\Psi\left(\varphi\right)$, при которых (7) обращается в тождественный ноль, нет. Поэтому если в разложении $\cos\left(k+1\right)\varphi$ или $\sin\left(k+1\right)\varphi$ в ряд Фурье выделить две произвольные гармоники с ненулевыми коэффициентами и вычеркнуть их из тригонометрического базиса $\Psi\left(\varphi\right)=1$, $\Psi\left(\varphi\right)=\cos m\varphi$, $\Psi\left(\varphi\right)=\sin m\varphi$ ($m=1,2,\ldots$), оставшиеся тригонометрические функции будут порождать полноценный линейный базис для функций вида (7). Конструирование альтернативного линейного базиса для функций $W\left(x,y,z\right)$ в виде полиномов по нечетным степеням переменной z, который более пригоден для практических приложений, можно найти в [33, 43].

Комментарий к полученным результатам

Итак, гармоническая функция $U\left(x,y,z\right)$, однородная по Эйлеру с порядком однородности k, может быть представлена в виде суммы $U\left(x,y,z\right)=V\left(x,y,z\right)+W\left(x,y,z\right)$, составленной из симметричной по z функции $V\left(x,y,z\right)=\left(U\left(x,y,z\right)+U\left(x,y,-z\right)\right)/2$ и антисимметричной по z функции $W\left(x,y,z\right)=$ $=\left(U\left(x,y,z\right)-U\left(x,y,-z\right)\right)/2$. Каждая из функций $V\left(x,y,z\right)$ и $W\left(x,y,z\right)$ является гармонической и однородной по Эйлеру с порядком однородности k и может быть выражена с помощью формул (5) или (7). Тем самым сумма выражений (5) и (7), зависящая от двух произвольных функций одного переменного, является самым общим представлением для гармонической функции $U\left(x,y,z\right)$, однородной по Эйлеру с порядком однородности $-2<k<0$ (впрочем, для наших целей достаточно, что эти формулы работают при $-1<k<0$).

Интересно, что использование формул (5), (7) при $k=-1$ в сочетании с формулой (2), в которой сделана циклическая замена переменных $y\to x'$, $z\to y'$, $x\to z'$, позволяет получить любопытные интегральные представления общего вида для четных и нечетных гармонических функций двух переменных.

К сожалению, приведение выражений (5) и (7) и выводимых из них интегральных формул аналогичного типа (см. следующий раздел) к аналитическим выражениям приемлемой сложности даже при простых функциях $\Phi\left(\varphi\right)$ и $\Psi\left(\varphi\right)$ сопряжено со значительными техническими трудностями, если k не является целым числом. Необходимость выполнять в формулах (5) и (7) интегрирование по бесконечному интервалу основательно затрудняет их использование для численного расчета соответствующих однородных электрических и магнитных полей. С этой точки зрения использование для синтеза электронно- и ионно-оптических систем с желаемыми свойствами при нецелых значениях k однородных гармонических квазиполиномов [33, 43] с нецелочисленными порядками однородности может оказаться более выгодным решением.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ, ПОЛУЧАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Формальное дифференцирование выражений (5) и (7) по переменной z позволяет получать интегральные формулы для гармонических однородных функций с другими порядками однородности. Это связано с тем, что область сходимости интегральных ядер (равная $-2<k<0$ для формул (5) и (7)) при дифференцировании меняется, в частности, потому, что степень k', подставляемая в интегральную формулу перед дифференцированием, должна быть вполне определенным образом связана с порядком однородности k получаемой на выходе гармонической функции и тем самым сингулярность рассматриваемого интегрального ядра будет меняться. Так, после первого дифференцирования получаем формулы

$$
\begin{gathered}
V(x,y,z)=\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\varphi)K(\varphi,x,y,z)\mathrm{d}\varphi,\\
K(\varphi,x,y,z)=\\
=\int_0^{+\infty} r^{k+3}\frac{z\left(2z^2-3(r\cos\varphi-x)^2-3(r\sin\varphi-y)^2\right)}{\left((r\cos\varphi-x)^2+(r\sin\varphi-y)^2+z^2\right)^{7/2}}\mathrm{d}r;\\
W(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\varphi)L(\varphi,x,y,z)\mathrm{d}\varphi,\\
L(\varphi,x,y,z)=\\
=\int_0^{+\infty} r^{k+2}\frac{(r\cos\varphi-x)^2+(r\sin\varphi-y)^2-2z^2}{\left((r\cos\varphi-x)^2+(r\sin\varphi-y)^2+z^2\right)^{5/2}}\mathrm{d}r
\end{gathered}
\tag{8}
$$

с общей областью сходимости $-3<k<0$.

После второго дифференцирования получаем

$$
\begin{gathered}
V(x,y,z)=\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\varphi)K(\varphi,x,y,z)\mathrm{d}\varphi,\\
K(\varphi,x,y,z)=\int_0^{+\infty} r^{k+3}\times\\
\times\frac{z\left(2z^2-3(r\cos\varphi-x)^2-3(r\sin\varphi-y)^2\right)}{\left((r\cos\varphi-x)^2+(r\sin\varphi-y)^2+z^2\right)^{7/2}}\mathrm{d}r;\\
W(x,y,z)=\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\varphi)L(\varphi,x,y,z)\mathrm{d}\varphi,\\
L(\varphi,x,y,z)=\int_0^{+\infty} r^{k+4}\times\\
\times\frac{40z^4-3\left((r\cos\varphi-x)^2+(r\sin\varphi-y)^2-4z^2\right)^2}{\left((r\cos\varphi-x)^2+(r\sin\varphi-y)^2+z^2\right)^{9/2}}\mathrm{d}r
\end{gathered}
\tag{9}
$$

с областью сходимости $-4<k<0$ и т. д. Использование для полученных интегральных формул подстановки Томсона (3), (3а) (возможно, в сочетании с последующим однократным или многократным дифференцированием) дает возможность еще больше разнообразить наборы универсальных интегральных ядер для генерирования симметричных и антисимметричных гармонических функций, однородных по Эйлеру. Одновременно происходит расширение диапазона доступных для вычислений порядков однородности, в том числе и в область положительных значений k.

Однако, как легко видеть, за увеличение диапазона для порядков однородностей, при которых можно использовать интегральные формулы (8), (9) и т. д., приходится платить. Ценой является все возрастающая сингулярность интегральных ядер в окрестности точки $z\approx 0$, $x\approx r\cos\varphi$, $y\approx r\sin\varphi$ (т. е. для $r\approx\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi\approx\operatorname{arctg}(y/x)$, $z\approx 0$), а также все большая степень неоднозначности в задании функций $\Phi(\varphi)$ и $\Psi(\varphi)$, которая требуется, чтобы получать на выходе различные функции $V(x,y,z)$ и $W(x,y,z)$.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С ЛОКАЛЬНЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОДНОРОДНОСТИ: НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Чтобы в формулах (5), (7) и им подобных можно было вычислить выражение, используемое в качестве интегрального ядра, необходимо, чтобы на сингулярность подынтегрального выражения в точках $r=0$ и $r=\infty$ были наложены серьезные ограничения. В ситуации, когда требуется, чтобы рассматриваемая гармоническая функция была однородной во всем пространстве, это ограничение является неизбежным. Однако в реальности нужное нам электрическое или магнитное поле требуется не во всем пространстве, а лишь в области, в которой действительно происходит движение заряженных частиц. Соответственно условие однородности $U(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^k U(x,y,z)$ требуется обеспечить лишь в некоторой подобласти значений x,y,z, где в каждой точке параметру λ из фундаментального тождества однородности позволено меняться лишь в некотором допустимом диапазоне значений.

Если обнулить функцию U вне интересующей нас области, то, вообще говоря, получим новую функцию с несколькими локальными областями однородности (поскольку функция $U(x,y,z)=0$ тоже является однородной). Наличие нескольких локальных областей однородности означает, что когда масштабирование координат выбранной точки в λ раз слишком велико и выводит рассматриваемую точку пространства из одной области локальной однородности в соседнюю область локальной однородности, то тождество однородности нарушается. Соответственно, если масштабированная траектория заряженной частицы не укладывается целиком в ту же локальную область однородности, что и эталонная траектория, то для нее принцип подобия траекторий не будет выполняться. Если же какая-то траектория пересекает две и более локальных областей однородности (разделенных, например, идеальными сетками), то даже бесконечно близкие к ней траектории, по всей видимости, не будут глобально совпадать с масштабированной версией исходной траектории.

Исключением является случай, когда при преобразовании $x \to \lambda x$, $y \to \lambda y$, $z \to \lambda z$ каждая из локальных областей однородности отображается сама на себя (и тем самым оказывается инвариантной при преобразовании подобия). Границами раздела в таком случае служат плоскости и конические поверхности, вообще говоря, криволинейные, с вершиной в начале координат, а каждая локальная область будет являться либо клином, либо конусом, либо их дополнением до целого пространства. В этом случае составленная из отдельных кусочков локально-однородная функция будет глобально однородной, а принцип подобия траекторий сохраняет свою силу.

Искажение структуры поля вне интересующей нас трехмерной области приводит к тому, что граничное значение $V_0(x,y)=V(x,y,0)$, заданное на плоскости $z=0$ и используемое в формуле Грина (6), искажается, вообще говоря, произвольным образом вне некоторой интересующей нас подобласти плоскости $z=0$ (являющейся в некотором нестрогом смысле проекцией трехмерной области однородности). При этом использование для стыковки разнородных областей специальных множителей в виде финитных "шапочек" (финитных бесконечно дифференцируемых функций C_0^∞ [44])

$$\omega(r)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-(r-r_0)^2}\right), & r_0-\varepsilon<r<r_0+\varepsilon;\\ 0, & r\le r_0-\varepsilon,\ r\ge r_0+\varepsilon\end{cases}$$

позволяет сделать переход к новому граничному значению сколь угодно гладким.

Однако следует заметить, что искаженная локально-однородная функция $V(x,y,z)$ уже не может быть выражена с помощью формулы (6), поскольку функция Грина для такой конструкции должна быть иной, учитывающей все имеющиеся границы раздела, а не только плоскость $z=0$. Соответственно подстановка искаженного граничного условия $V_0(x,y)$ в формулу (6) даст нам какую-то иную гармоническую функцию. Вообще говоря, в этом случае получаемая по формуле (6) функция больше не обязана являться ни однородной, ни даже локально-однородной, хотя она и останется при этом гармонической. Правда, принцип максимума для гармонических функций [44] гарантирует, что вдали от внесенных нами искажений гармоническая функция меняется мало и тем самым отклонения траекторий заряженных частиц от закона подобия будут незначительны, даже если точное тождество однородности для построенной нами гармонической функции и не выполняется больше.

В частности, можно принудительно обнулить функцию $V_0(x,y)=V(x,y,0)$ вне выбранного нами диапазона $r_{\min}^2 \le x^2+y^2 \le r_{\max}^2$. В таком случае интегральные ядра, которые используются в интегральных формулах (5), (7) для однородных функций, будут интегрироваться не по интервалу $0 \le r \le \infty$, а по гораздо более узкому интервалу $r_{\min} \le r \le r_{\max}$, где сингулярности интегрируемого выражения в точках $r=0$ и $r=\infty$ при выбранном значении параметра k уже не имеют значения. Другим преимуществом перехода к конечному интервалу $r_{\min} \le r \le r_{\max}$ будет то, что интегрирование по конечной области достаточно просто выполняется численно.

Как результат, при использовании модифицированного граничного условия $V_0(x,y)$ в формуле (6) на выходе вместо глобально однородной функции получается локально однородная функция, по крайней мере, на границе $z=0$ (поскольку и функция $V_0(x,y)=0$, и функция $V_0(x,y)= = r^k\Phi(\varphi)$ являются локально однородными, каждая в свой области). Будет ли полученная функция локально-однородной хотя бы в некоторой окрестности плоскости $z=0$ и существуют ли вообще локально-однородные гармонические функции в смысле, который мы придали этому термину?

Достаточно очевидно, что если разделить с помощью концентрических сфер пространство на трехмерные подобласти и задать в каждой подобласти свою собственную однородную гармоническую функцию (предположительно, с одним и тем же порядком однородности), то результирующая конструкция будет в точности локально-однородной и одновременно, по крайней мере, локально-гармонической функцией. (Вообще говоря, разделяющие поверхности могут быть любыми, лишь бы касательные плоскости не проходили через начало координат.) С другой стороны, такая функция вдоль границ раздела, скорее всего, не будет непрерывной или уж, по крайней мере, не будет непрерывно-дифференцируемой, поскольку на границе стыковки областей однородности вряд ли может выполняться дифференциальное соотношение Эйлера для однородных функций. Соответственно, на границе стыковки областей однородности не будет выполняться и уравнение Лапласа.

Из общих соображений следует, что если локально-однородная функция является локально-гармонической, и если на границах раздела сохраняется как непрерывность самой функции, так и непрерывность нормальной производной (а тем самым и непрерывность дифференциального соотношения Эйлера), то такая функция обязана быть одной и той же однородной гармонической функцией по обе стороны от границы раздела. Тем самым, если мы имеем локально-однородное электрическое или магнитное поле, так что в каждой локальной области тождество однородности выполняется абсолютно точно, то границами раздела между областями однородности обязаны быть электроды (сетки, магнитные полюса, границы катушек с током и т. д.).

Вообще говоря, будет неправильным утверждать, что искажение граничного условия $V_0(x,y)=r^k\Phi(\varphi)$ вне кольца $r_{\min}^2 \le x^2+y^2 \le r_{\max}^2$ приводит к тому, что образуется цилиндрическая локальная область однородности $r_{\min}^2 \le x^2+y^2 \le r_{\max}^2$, $-\infty<z<+\infty$, внутри которой выполнено тождество однородности и, как следствие, принцип подобия траекторий. Переход в формулах (5) (и соответственно (7)) от интервала интегрирования $0 \le r < \infty$ к интервалу интегрирования $0<a\le r\le b<\infty$ разрушает тождество однородности при $z\ne 0$ *во всех точках*, хотя гармоничность функции, несомненно, сохраняется:

$$K'(\varphi,x,y,z)= \int_a^b \frac{zr^{k+1}}{\left((r\cos\varphi-x)^2+(r\sin\varphi-y)^2+z^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}r;$$

$$K'(\varphi,\lambda x,\lambda y,\lambda z)= \int_a^b \frac{\lambda z r^{k+1}}{\left((r\cos\varphi-\lambda x)^2+(r\sin\varphi-\lambda y)^2+\lambda z^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}r=$$

$$=\int_{a/\lambda}^{b/\lambda} \frac{\lambda z(\lambda r')^{k+1}}{\left((\lambda r'\cos\varphi-\lambda x)^2+(\lambda r'\sin\varphi-\lambda y)^2+\lambda z^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}(\lambda r')=$$

$$=\lambda^k\int_{a/\lambda}^{b/\lambda} \frac{zr'^{k+1}}{\left((r'\cos\varphi-x)^2+(r'\sin\varphi-y)^2+z^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}r'\ne$$

$$\ne \lambda^k K'(\varphi,x,y,z)$$

(здесь следует аккуратно проверить, что при плавающих в зависимости от λ верхних и нижних границах интеграла это неравенство действительно выполнено и что интегрирование по φ этот дисбаланс ядра выправить не сможет). С другой стороны, если зафиксировать какие-то эквипотенциальные линии $V_0(x,y)=\text{const}$, восстановить в трехмерном пространстве соответствующие эквипотенциальные поверхности и "заморозить" значения потенциала на этих поверхностях-электродах, то каким бы жестким ни было изменение поля с внешней стороны электродов на структуре поля внутри ограниченной электродами области это не будет сказываться. Противоречие между этими двумя утверждениями разрешается, если учесть, что поле, о котором идет речь, уже не может быть выражено с помощью формулы (6): функция Грина для краевой задачи обязана учитывать все имеющиеся границы для рассматриваемой области, тогда как в формуле (6) учитывается только плоскость $z=0$.

Другим аргументом является результат [4, 6], который показывает, что малая вариация правой части дифференциального соотношения Эйлера вдоль рассматриваемой траектории приводит к малым же отклонениям реальных траекторий от геометрических кривых, сконструированных исходя из принципа подобия траекторий. Наконец, принцип максимума для гармонических функций [44] гарантирует, что локальные искажения поля на границе, находящейся вдали от области движения заряженных частиц, приводит к быстро затухающим поправкам, слабо сказывающимся на искажении истинных траекторий заряженных частиц. Поэтому есть веские основания (правда, не являющиеся строгим доказательством) считать, что хотя формально при принудительном обнулении граничного условия $V_0(x,y)$ вне кольца $r_{\min}^2 \le x^2+y^2 \le r_{\max}^2$ мы и разрушаем строгое тождество однородности сразу во всех точках, но поведение реальных траекторий практически не будет отличаться от поведения идеальных траекторий, если граница кольца и порожденные ею трехмерные поверхности разрыва потенциальной функции отстоят достаточно далеко от собственно области движения заряженных частиц.

Как именно выбор кольца $r_{\min}^2 \le x^2+y^2 \le r_{\max}^2$, а также способа сглаживания перехода от одного граничного условия $V_0(x,y)$ к другому сказывается на форме и размере трехмерного объема, в котором принцип подобия траекторий сохраняет свою силу с приемлемой точностью, требует отдельного исследования. По-видимому, полезным инструментом при таком исследовании могут быть конструктивные оценки, как именно выбор кольца $r_{\min}^2 \le x^2 + y^2 \le r_{\max}^2$ сказывается на невязке в правой части дифференциального соотношения Эйлера и как именно невязка в правой части дифференциального соотношения Эйлера сказывается на отклонении соседних траекторий. Также на настоящий момент не известно, к каким именно искажениям электродов и магнитных полюсов, требуемых для создания нужного поля, приводит обнуление условия $V_0(x,y) = V(x,y,0) = r^k\Phi(\varphi)$ вне того или иного кольца $r_{\min}^2 \le x^2 + y^2 \le r_{\max}^2$ (и как можно осознанно управлять этим процессом, выбирая оптимальные значения $r_{\min}, r_{\max}$ и сглаживающие множители).

Кроме обнуления функции $V_0(x,y)$ вне кольца $r_{\min}^2 \le x^2 + y^2 \le r_{\max}^2$ можно дополнительно обнулять ее также и вне сектора $\varphi_{\min} \le \operatorname{arctg}(y/x) \le \varphi_{\max}$, если соответствующая область не представляет интереса с точки зрения движения заряженных частиц. Дополнительную гибкость процессу управления формой электродов или магнитных полюсов придает создание искусственной переходной области между областью с условием $V_0(x,y) = V(x,y,0) = r^k\Phi(\varphi)$ и областью с условием $V_0(x,y) = V(x,y,0) = 0$, в которой мы имеем возможность варьировать граничное условие $V_0(x,y) = V(x,y,0)$ практически произвольным образом.

Как именно можно использовать свободу выбора поведения граничного значения потенциала в переходной области для упрощения формы электродов и магнитных полюсов, остается неисследованной задачей. Другой интересной задачей является конструирование локально-однородных гармонических функций, теория которых на настоящий момент отсутствует. (Локально-однородные гармонические функции не могут быть получены с помощью функции Грина (6) и соответственно с помощью формул (5) и (7), поскольку для такого случая функция Грина должна конструироваться как с учетом границы $z = 0$, так и с учетом границ, разделяющих между собой отдельные области однородности.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 13–30. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/full4/Art2.pdf.
2. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 2. С. 9–15.
3. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.
4. *Краснова Н.К.* Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. СПб., 2013. 259 с.
5. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.
6. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 1. С. 50–58. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/full1/Art6.pdf.
7. *Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.* Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в ЖТФ. 2016, Т. 42, № 23–24.
8. *Краснова Н.К.* Двумерные степенные электронные спектрографы с плоскостью симметрии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 6. С. 97–103.
9. *Аверин И.А.* Осесимметричные электростатические электронные спектрографы, использующие однородные по Эйлеру потенциалы с нецелочисленными порядками однородности // Тез. докл. Съезда ВМСО и VIII Всероссийской конференции, 2–17 октября 2015 г., Москва. М.: ВМСО, типография изд-ва "Тровант", 2015. 132 с.
10. *Аверин И.А.* Электростатические и магнитостатические электронные спектрографы с однородными по Эйлеру потенциалами, характеризуемыми нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 3. С. 35–44. URL: http://213.170.69.26/mag/2015/full3/Art5.pdf.
11. *Аверин И.А., Бердников А.С.* Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 5–8.
12. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12, № 4. С. 272–281.
13. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1.

С. 11–20.

14. *Бердников А.С., Аверин И.А.* Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 89–95.
15. *Бердников А.С., Аверин И.А.* О невозможности двойной фокусировки в комбинированных электрических и магнитных полях, однородных по Эйлеру. // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 62–65.
16. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.
17. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. Ч. 2: Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 516 с.
18. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 616 с.
19. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.
20. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (44). С. 147–165.
21. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Теорема об однородности скалярных и векторных потенциалов у электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 6.
22. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace's Functions &c. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. P. 43–57.
23. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace's Functions &c. // Proceedings of the Royal Society of London. 1856-1857. Vol. 8. P. 307–310.
24. *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.* Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 2. С. 91–94.
25. *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.* Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 3. С. 44–47.
26. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Исследование теоремы о дифференцировании и интегрировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 6.
27. *Thomson W.* Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de mathématiques pures et appliquées. T. XII. 1847. P. 256–264.
28. *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.-Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.
29. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
30. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.
31. *Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.* Трактат по натуральной философии. Ч. I. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010. 572 с.
32. *Голиков Ю.К.* Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (44). С. 165–181.
33. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Простейшие аналитические электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (44). С. 17–32.
34. *Боголюбов А.Н., Левашова Н.Т., Могилевский И.Е., Мухартова Ю.В., Шапкина Н.Е.* Функция Грина оператора Лапласа. М.: Физический факультет МГУ, 2012. 130 с.
35. *Пикулин В.П., Похожаев С.И.* Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004. 208 с.
36. *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1998. 350 с.
37. *Хокс П., Каспер Э.* Основы электронной оптики. Т. 1. М.: Мир, 1993. 480 с.
38. *Yavor M.I.* Optics of Charged Particle Analyzers // Advances of Imaging and Electron Physics. Elsevier, 2009. Vol. 157. P. 142–144.
39. *Страшкевич А.М.* Электронная оптика электростатических систем. М.-Л.: "Энергия", 1966. 328 с.
40. *Зинченко Н.С.* Курс лекций по электронной оптике, 2-е изд. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та. 1961.
41. *Рустерхольц А.* Электронная оптика. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 263 с.
42. *Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В.* Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Учебное пособие. Л.: Изд-во ЛПИ, 1984. 79 с.
43. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Квази-полиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физические и математические науки. 2016. № 4.
44. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4, ч. 1. М.: Наука, 1974. 336 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург (*Бердников А.С.*, *Аверин И.А.*)

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.*)

Контакты: *Бердников Александр Сергеевич*, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию: 28.07.2016

INTEGRAL EXPRESSIONS FOR 3D ELECTRIC AND MAGNETIC POTENTIALS WHICH ARE UNIFORM IN EULER TERMS AND HAVE NON-INTEGER ORDERS OF UNIFORMITY

A. S. Berdnikov[1], **I. A. Averin**[1,2], **N. K. Krasnova**[2], **K. V. Solovyev**[2]

[1]*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*
[2]*Peter The Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Russia*

In our previous paper "Universal expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms" (see this issue) we already noted the usefulness of the paradigma of Euler's uniform fields for designing of electron-optical and ion-optical systems. Non-integer orders of uniformity significantly extends possibilities and flexibility of usage for such fields in charged particle optics. As a result the analytical expressions for the Laplace potentials which are uniform in Euler terms are a useful tool to design optical systems of this type. However, at this moment general theory of harmonic and uniform 3D functions with non-integer order of uniformity is absent. This paper considers particular integral expressions which produces 3D harmonic functions which are uniform in Euler' terms with non-integer orders of uniformity and can be used as potentials of corresponding electric and magnetic fields.

Keywords: electric fields, magnetic fields, uniform in Euler' terms functions, similarity principle for charged particle trajectories, analytical solutions of Laplace equation

REFERENCES

1. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Universal expressions or 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4, pp. 13–30. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/full4/Art2.pdf. (In Russ.).
2. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [The electric fields uniform in Euler, for electronic spectrography]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of technical physics], 2011, vol. 81, no. 2, pp. 9–15. (In Russ.).
3. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. *Teoriya sinteza ehlektrostaticheskih ehnergoanalizatorov* [Theory of synthesis of electrostatic power analyzers]. Saint-Petersburg, Polytechnical university Publ., 2010. 409 p. (In Russ.).
4. Krasnova N.K. *Teoriya i sintez dispergiruyushchih i fokusiruyushchih ehlektronno-opticheskih sred*. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [The theory and synthesis of the dispersing and focusing electron-optical environments. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Saint-Petersburg, 2013. 259 p. (In Russ.).
5. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [The generalized principle of similarity and its application in electronic spectrography]. *Prikladnaya fizika* [Applied physics], 2007, no. 2, pp. 5–11. (In Russ.).
6. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [Analytical structures of electric spectrographs the fields of which are expressed in a uniform generalized form]. Nauchnoe Priborostroenie [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 1, pp. 50–58. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/full1/Art6.pdf. (In Russ.).
7. Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R. [The principle of similarity of trajectories at the movement of charged particles with a different masses in electric and magnetic fields, uniform in Euler]. *Pis'ma v ZhTF* [Letters in ZhTF], 2016, vol. 42, no. 23–24. (In Russ.).
8. Krasnova N.K. [Two-dimensional sedate electronic spectrographs with the symmetry plane]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of technical physics], 2011, vol. 81, no. 6, pp. 97–103. (In Russ.).
9. Averin I.A. [The axisymmetric electrostatic electronic spectrographs using potentials, uniform in Euler, with nonintegral orders of uniformity]. *Tez. dokl. S'ezda VMSO i VIII Vserossijskoj konferencii* [Theses reports Congress of VMSO and VIII All-Russian conference]. 02–17 october 2015, Moscow, VMSO "Trovant" Publ. 132 p. (In Russ.).
10. Averin I.A. [Electrostatic and magnetostatic electron spectrographs based on Euler' homogeneous potentials with non-integer orders]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 3, pp. 35–44. Doi: 10.18358/np-25-3-i3544. (In Russ.).
11. Averin I.A., Berdnikov A.S. [Regional fields the bessetochnykh of electronic spectrographs with electrostatic fields, uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 5–8. (In Russ.).
12. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrogaphs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. I]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2015, vol. 12, no. 4, pp. 272–281. (In Russ.).
13. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrogaphs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. II]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 11–20. (In Russ.).
14. Berdnikov A.S., Averin I.A. [New approach to develop-

ment of ion-optical schemes of static mass spectrographs on the basis of the non-uniform magnetic fields uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 89–95. (In Russ.).
15. Berdnikov A.S., Averin I.A. [About impossibility of double focusing in the combined electric and magnetic fields uniform in Euler]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 62–65. (In Russ.).
16. Gobson E.V. *Teoriya sfericheskih i ehllipsoidal'nyh funkcij* [Theory of spherical and ellipsoidal functions]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1952. 476 p. (In Russ.).
17. Uitteker E.T., Vatson G. *Kurs sovremennogo analiza. Ch. 2: Transcendentnye funkcii* [Course of the modern analysis. Part 2: Transcendental functions]. Moscow, GIFML Publ., 1963. 516 p. (In Russ.).
18. Fihtengolc G.M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 1* [Course of differential and integral calculus. Vol. 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 616 p. (In Russ.).
19. Smirnov V.I. *Kurs vysshej matematiki. Tom 1* [Course of the higher mathematics. Vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russ.).
20. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2 (44), pp. 147–165. (In Russ.).
21. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Theorem of uniformity of scalar and vector potentials for the electric and magnetic fields uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 6. (In Russ.).
22. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace's Functions &c. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1857, vol. 147, pp. 43–57. Doi: 10.1098/rstl.1857.0005.
23. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace's Functions &c. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1856-1857, vol. 8, pp. 307–310. Doi: 10.1098/rspl.1856.0075.
24. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [Application of a formula of Donkin in the theory of power-analyzers. I]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of technical physics], 2000, vol. 70, no. 2, pp. 91–94. (In Russ.).
25. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [Application of a formula of Donkin in the theory of power-analyzers. II]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of technical physics], 2000, vol. 70, no. 3, pp. 44–47. (In Russ.).
26. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Research of the theorem of differentiation and integration of the three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 6. (In Russ.).
27. Thomson W. Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1847, vol. XII, pp. 256–264.
28. Sretenskij L.N. *Teoriya n'yutonovskogo potenciala* [Theory of the Newtonian potential]. Leningrad-Moscow, OGIZ-GITTL Publ., 1946. 318 p. (In Russ.).
29. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (In Russ.).
30. Smirnov V.I. *Kurs vysshej matematiki* [Course of the higher mathematics], vol. 4, part 2. Moscow, Nauka Publ., 1981. 297 p. (In Russ.).
31. Thomson W. (Lord Kelvin), Teht P.G. *Traktat po natural'noj filosofii. Ch. 1* [The treatise on natural philosophy. Part I]. Moscow-Izhevsk, NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika" Publ., 2010. 572 p. (In Russ.).
32. Golikov Yu.K. [Analytical ways of the description of harmonious functions]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2 (44), pp. 165–181. (In Russ.).
33. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [The elementary analytical electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2 (44), pp. 17–32. (In Russ.).
34. Bogolyubov A.N., Levashova N.T., Mogilevskij I.E., Muhartova Yu.V., Shapkina N.E. *Funkciya Grina operatora Laplasa* [Green's function of Laplace operator]. Moscow, Faculty of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University, 2012. 130 p. (In Russ.).
35. Pikulin V.P., Pohozhaev S.I. *Prakticheskij kurs po uravneniyam matematicheskoj fiziki* [Practical course on the equations of mathematical physics]. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2004. 208 p. (In Russ.).
36. Bogolyubov A.N., Kravcov V.V. *Zadachi po matematicheskoj fizike* [Tasks in mathematical physics]. Moscow, MSU Publ., 1998. 350 p. (In Russ.).
37. Hoks P., Kasper E. *Osnovy ehlektronnoj optiki. Tom 1* [Fundamentals of electronic optics. Vol. 1]. Moscow, Mir Publ., 1993. 480 p. (In Russ.).
38. Yavor M.I. Optics of Charged Particle Analyzers. *Advances of Imaging and Electron Physics*. Elsevier, 2009, vol. 157, pp. 142–144.
39. Strashkevich A.M. *Elektronnaya optika ehlektrostaticheskih system* [Electronic optics of electrostatic systems]. Moscow-Leningrad, Energy Publ., 1966. 328 p. (In Russ.).
40. Zinchenko N.S. *Kurs lekcij po ehlektronnoj optike* [Course of lectures on electronic optics], Second Edition. Kharkiv, V.N. Karazin Kharkiv National University Publ., 1961. (In Russ.).
41. Rusterhol'c A. *Elektronnaya optika* [Electron optics]. Moscow, IIL Publ, 1952. 263 p. (In Russ.).
42. Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuhin V.V. *Raschet*

elementov elektrostaticheskich elektronno-opticheskich system. Uchebnoe posobie [Calculation of elements of electrostatic electron-optical systems. Education book]. Leningrad, LPI Publ., 1984. 79 p. (In Russ.).
43. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Quasi-polynomial three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets SPbGPU. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 4. (In Russ.).
44. Smirnov V.I. *Kurs vysshej matematiki* [Course of the higher mathematics], vol. 4, part 1. Moscow, Nauka Publ., 1974. 336 p.

Contacts: *Berdnikov Alexander Sergeevich,*
asberd@yandex.ru

Article received in edition: 28.07.2016