ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2016, том 26, № 4, с. 13–30

ФИЗИКА ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

УДК 537.534.7

© А. С. Бердников, И. А. Аверин, Н. К. Краснова, К. В. Соловьёв

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ, ОДНОРОДНЫХ ПО ЭЙЛЕРУ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ ПОРЯДКОМ ОДНОРОДНОСТИ

Электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру, являются удобным инструментом для разработки электронно- и ионно-оптических систем. Принцип подобия траекторий в таких полях, впервые примененный Ю.К. Голиковым, позволяет более осмысленно и целенаправленно синтезировать спектрографические корпускулярно-оптические системы при использовании полей, принадлежащих этому классу. Как результат, аналитические выражения для лапласовых потенциалов однородных по Эйлеру полей являются серьезным подспорьем при разработке подобного рода оптических схем. Данная работа посвящена рассмотрению общих формул алгебраически-дифференциального вида, с помощью которых могут легко генерироваться трехмерные однородные гармонические функции, описывающие соответствующие электрические и магнитные поля.

Кл. сл.: электрические поля, магнитные поля, однородные по Эйлеру функции, принцип подобия траекторий в оптике заряженных частиц, аналитические решения уравнения Лапласа

ВВЕДЕНИЕ

Электростатическими полями и магнитостатическими полями, однородными по Эйлеру, называются поля, напряженность или индукция которых являются функциями, однородными по Эйлеру в смысле, который придается этому термину в общих курсах математического анализа [1, 2]: при произвольных значениях параметра $\lambda > 0$ для напряженности электростатического поля $\mathbf{E}(x,y,z)$ должно выполняться тождество $\mathbf{E}(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\mathbf{E}(x,y,z)$, а для индукции магнитостатического поля $\mathbf{B}(x,y,z)$ должно выполняться тождество $\mathbf{B}(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\mathbf{B}(x,y,z)$ (число k является порядком однородности соответствующего поля и не обязано быть натуральным или целым числом[1]).

Для однородных по Эйлеру электростатических и магнитостатических полей справедлив принцип подобия траекторий, который можно сформулировать в следующем виде [3–8]:

а) для движения заряженной частицы в электростатических полях, однородных по Эйлеру с порядком однородности, равным k, при масштабировании начальных координат в λ раз, при сохранении начальных углов и при масштабировании начальной кинетической энергии в $\gamma = \lambda^k$ раз траектория геометрически масштабируется в λ раз как единое целое, тогда как время движения по траектории будет масштабировано в $\varepsilon = \sqrt{\lambda^{k-2}/\mu}$ раз в каждой точке траектории (где μ — коэффициент масштабирования массы частицы, которое осуществляется независимо от геометрического масштабирования);

б) для движения заряженной частицы в магнитостатических полях, однородных по Эйлеру с порядком однородности, равным k, при масштабировании начальных координат в λ раз, при сохранении начальных углов и при масштабировании модуля начального импульса в $\chi = \lambda^k$ раз траектория геометрически масштабируется в λ раз как единое целое, тогда как время движения по траектории будет масштабировано в $\varepsilon = \lambda^{k-1}/\mu$ раз в каждой точке траектории (где μ — коэффициент масштабирования массы частицы, которое осуществляется независимо от геометрического масштабирования).

[1] При дифференцировании однородных функций по любой из переменных получается однородная функция с порядком однородности, пониженным на единицу [1, 2]. Поэтому в этом определении закон однородности для напряженности электрического поля и для индукции магнитного поля сознательно использует степень $k-1$, чтобы для потенциалов был выполнен закон однородности со степенью k.

Это позволяет использовать электростатические поля, однородные по Эйлеру с показателем однородности, не равным нулю, как эффективные энергоспектрографы [3–5, 9–13], а магнитостатические поля, однородные по Эйлеру с показателем однородности, не равным нулю, как эффективные масс-спектрографы [9, 14, 15]. Поля, однородные по Эйлеру с показателем однородности, равным нулю, обладают тем полезным свойством, что входной параллельный моноэнергетический (для электрических полей) или моноимпульсный (для магнитных полей) пучок заряженных частиц преобразуется в параллельный же выходной пучок заряженных частиц, где угол отклонения зависит от энергии или импульса [16, 17]. Применение двухкаскадных схем с магнитными полями, однородными по Эйлеру, для разработки статических масс-спектрографов с двойной фокусировкой рассматривается в [14, 15], а применение для той же цели комбинированных (наложенных друг на друга) электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру, разбирается в [18].

Электрическое поле, однородное по Эйлеру, как правило, является градиентом скалярного электрического потенциала $U(x,y,z)$, который представляет собой однородную по Эйлеру функцию порядка k: $\mathbf{E}(x,y,z)=-\nabla U(x,y,z)$, $\forall\lambda : U(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^k U(x,y,z)$. Соответственно в пределах односвязной подобласти пространства, свободной от катушек с током и намагниченных объектов, магнитное поле, однородное по Эйлеру, в большинстве случаев можно представить как градиент *скалярного* магнитного потенциала $\Phi(x,y,z)$, который будет однородной по Эйлеру функцией порядка k: $\mathbf{B}(x,y,z)=-\nabla\Phi(x,y,z)$, $\forall\lambda : \Phi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^k\Phi(x,y,z)$ [19]. Единственным исключением из этого правила являются поля, однородные по Эйлеру с нулевым порядком однородности $k=0$, у которых скалярный потенциал может содержать логарифмическую аддитивную добавку, не являющуюся однородной по Эйлеру функцией. Строгое доказательство этого факта можно найти в [20, 21].

Как правило, электрические и магнитные поля, использующиеся в оптике заряженных частиц, обладают плоскостью симметрии (далее предполагается, что она совпадает с координатной плоскостью $z=0$). Для плоскости симметрии справедливо: если заряженная частица начинает движение в этой плоскости, т. е. начальные координаты и начальные скорости лежат в плоскости симметрии, то при дальнейшем движении заряженная частица никуда не уходит из плоскости симметрии. (Это не отменяет того факта, что при малых возмущениях начальных условий, выводящих заряженную частицу из плоскости симметрии, результирующая траектория может уходить от плоскости симметрии сколь угодно далеко [22].)

Для выполнения сохранения движения заряженной частицы в плоскости симметрии электрический потенциал должен быть симметричной функцией от координаты z: $U(x,y,-z)=U(x,y,z)$, так что нормальная компонента напряженности электрического поля в плоскости симметрии обращается в ноль, поскольку $E_z(x,y,0)=-\left(\partial U(x,y,z)/\partial z\right)_{z=0}=0$ (тем самым отсутствует электрическая сила, выводящая заряженную частицу за пределы плоскости симметрии). Скалярный же магнитный потенциал должен быть антисимметричной функцией от координаты z: $\Phi(x,y,-z)=-\Phi(x,y,z)$, так что $\Phi(x,y,0)\equiv 0$, а тангенциальные компоненты индукции магнитного поля в плоскости симметрии обращаются в ноль из-за соотношений:

$$B_x(x,y,0)=-\left(\partial\Phi(x,y,z)/\partial x\right)_{z=0}=0$$

и

$$B_y(x,y,0)=-\left(\partial\Phi(x,y,z)/\partial y\right)_{z=0}=0$$

(т. е. отсутствует магнитная сила, выводящая заряженную частицу за пределы плоскости симметрии). Критерии устойчивости траекторий по отношению к малым отклонениям от плоскости симметрии в симметричных статических электромагнитных полях исследуются в [22].

Электрический потенциал $U(x,y,z)$ и скалярный магнитный потенциал $\Phi(x,y,z)$ должны удовлетворять трехмерному уравнению Лапласа:

$$\partial^2 U/\partial x^2+\partial^2 U/\partial y^2+\partial^2 U/\partial z^2=0,$$
$$\partial^2\Phi/\partial x^2+\partial^2\Phi/\partial y^2+\partial^2\Phi/\partial z^2=0.$$

Нахождение функций, однородных по Эйлеру и удовлетворяющих этим условиям, является весьма нетривиальной задачей [16, 17, 21, 23–28].

На основе общих соображений можно сделать вывод, что в общем случае трехмерная однородная гармоническая функция однозначно определяется по итогам выбора двух произвольных функций одного вещественного переменного (см., например, интегральную формулу Уиттекера для однородных гармонических функций в [23, 26]). Это, вообще говоря, предоставляет нам для синтеза электронно- и ионно-оптических систем, которые используют поля, однородные по Эйлеру, не так уж много свободы. Для сравнения: гармоническая функция трех переменных, т. е. удовлетворяющий уравнению Лапласа электрический или магнитный скалярный потенциал, определяется однозначно по итогам выбора двух произвольных функций *двух* переменных, что следует из процедуры восстановления потенциала в виде ряда Тейлора по заданному поведению потенциала и его нормальной производной вдоль бесконечной плоскости $z = \text{const}$ [19, 29].

При наложении на однородные гармонические функции каких-либо дополнительных требований эта свобода выбора еще больше сокращается. Например, однородные по Эйлеру двумерные, осесимметричные или мультипольные потенциалы с заданным порядком однородности в самом общем случае определяются однозначным образом всего лишь с помощью выбора двух произвольных констант независимо от того, является порядок однородности натуральным (целым) числом или нет [27]. (Определенным достоинством в этом случае, однако, является то, что для этих потенциалов можно выписать явные аналитические формулы и при этом быть уверенными, что каких-либо других потенциалов, удовлетворяющих выбранным ограничениям, в природе не существует.) Трехмерные однородные гармонические полиномы [23], а в особенности трехмерные однородные квазиполиномиальные потенциалы с заданным порядком однородности [21, 27, 28], не обязательно целочисленным, представляют собой в этом отношении разумный компромисс — с одной стороны, обеспечивая явные и конструктивные аналитические формулы для вычисления потенциалов с заданным порядком однородности, а с другой стороны, обеспечивая при этом куда как более широкую свободу выбора, чем у перечисленных выше классов однородных гармонических функций.

1. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ, ОДНОРОДНЫХ ПО ЭЙЛЕРУ С ПОРЯДКАМИ ОДНОРОДНОСТИ $k = 0$ И $k = -1$

Все гармонические функции трех переменных, однородные по Эйлеру с нулевым порядком однородности, могут быть вычислены с помощью общей формулы, называемой формулой Донкина[2]:

$$U(x,y,z) = F\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \quad (1)$$

где $F(p,q)$ — произвольная функция, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа $\partial^2 F/\partial p^2 + \partial^2 F/\partial q^2 = 0$ [16, 17, 23, 24, 30, 31]. Электростатические потенциалы, порождаемые формулой (1), исследовались в работах [16, 17].

Вывод формулы Донкина "с нуля" [24, 30, 31] представляет собой образец математического искусства и мастерства очень высокого уровня. Но как только явный вид формулы (1) оказывается известным, ее доказательство становится элементарным. Действительно, любая функция $U(x,y,z)$, не обязательно гармоническая, но зато однородная по Эйлеру с нулевым порядком однородности, может быть представлена в форме (1) с помощью подходящим образом заданной функции $F(p,q)$ двух переменных. Такая запись представляет собой модифицированный вариант записи однородных функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с порядком однородности, равным k, в виде $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_1^k g(x_2/x_1, \ldots x_n/x_1)$ [1, 2]:

$$U(x,y,z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}, \frac{2q}{1-p^2-q^2}\right) = F(p,q),$$
$$p = \frac{y/x}{1+\sqrt{1+(y/x)^2+(z/x)^2}},$$
$$q = \frac{z/x}{1+\sqrt{1+(y/x)^2+(z/x)^2}}.$$

Подстановка выражения (1) в трехмерное уравнение Лапласа немедленно дает: для того, чтобы функция $U(x,y,z)$ удовлетворяла трехмерному уравнению Лапласа, необходимо и достаточно, чтобы функция $F(p,q)$ удовлетворяла двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial z^2} \equiv$$
$$\equiv \frac{(1-p^2-q^2)^2}{4x^2}\left(\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2}\right),$$
$$p = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad q = \frac{z}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

[2] В работах [16, 17, 23, 24] вместо выделенной координаты x и плоскости симметрии $z = 0$, как это делается в приведенных здесь формулах, при записи формулы Донкина используется выделенная координата z и плоскость симметрии $y = 0$. Легко понять, что получающиеся формулы отличаются только циклической перестановкой переменных.

$$y = \frac{2px}{1-p^2+q^2}, \quad z = \frac{2qx}{1-p^2+q^2}.$$

По такой же в точности схеме можно показать, что формула

$$V(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \times$$
$$\times F\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \qquad (2)$$

где $F(p,q)$ — произвольная функция, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа $\partial^2 F/\partial p^2 + \partial^2 F/\partial q^2 = 0$, является общей формулой для гармонических функций, однородных по Эйлеру с порядком однородности $k=-1$:

$$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} \equiv$$
$$\equiv \frac{\left(1-p^2-q^2\right)^3}{4x^3\left(1+p^2+q^2\right)}\left(\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2}\right).$$

Альтернативные формулы для гармонических функций, однородных по Эйлеру с порядком однородности $k=-1$, могут быть получены из (1) после дифференцирования по x,y,z [24]. Однако тот факт, что (2) является общей формулой для гармонических и однородных функций с порядком однородности $k=-1$, гарантирует, что все эти формулы так или иначе сводятся к виду (2) при соответствующем выборе функции $F(p,q)$.

Двумерные гармонические функции

Генератором гармонических функций $F(p,q)$ для формул (1), (2) служат вещественные и мнимые части аналитических функций комплексного переменного [19, 32–35]. Тот факт, что вещественные и мнимые части любой аналитической функции комплексного переменного действительно удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа, является элементарным и может быть найден в любом учебнике по аналитическим функциям [19, 32–35] при обсуждении следствий из соотношений Коши—Римана. Не менее элементарным, но не столь акцентируемым фактом является то, что любая функция двух вещественных переменных, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа, на самом деле является вещественной частью либо мнимой частью (по выбору) некоторой подходящей аналитической функции комплексного переменного. Тем самым, ограничивая свой выбор аналитическими функциями комплексного переменного, мы на самом деле не потеряем ни одной двумерной гармонической функции.

Обоснование. Из соотношений Коши—Римана

$$\partial G(p,q)/\partial q = \partial F(p,q)/\partial p,$$
$$\partial G(p,q)/\partial p = -\partial F(p,q)/\partial q$$

для функций комплексного переменного $f(z) = f(p+\mathrm{i}q) = F(p,q) + \mathrm{i}G(p,q)$, дифференцируемых по крайней мере один раз, следуют соотношения

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial G}{\partial q}\right] = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial G}{\partial p}\right] = \frac{\partial^2 G}{\partial p \partial q} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial F}{\partial p}\right] = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial F}{\partial q}\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial q^2} = -\frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial q^2} = 0,$$

что означает, что $F(p,q)$ и $G(p,q)$ удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа.

Рассмотрим произвольное решение $F(p,q)$ двумерного уравнения Лапласа и посмотрим, можно ли восстановить парную функцию $G(p,q)$, удовлетворяющую соотношениям Коши—Римана $\partial G/\partial q = \partial F/\partial p$, $\partial G/\partial p = -\partial F/\partial q$. Ответ будет положительным, причем искомая функция $G(p,q)$ оказывается единственной с точностью до аддитивной константы. Это связано с тем, что система соотношений Коши—Римана, рассматриваемая как переопределенная система линейных уравнений в частных производных относительно неизвестной функции $G(p,q)$, является совместной и разрешимой (единственным образом и с точностью до аддитивной константы), поскольку условие $\partial[\partial G/\partial q]/\partial p = \partial[\partial G/\partial p]/\partial q$, выполненное в силу гармоничности функции $F(p,q)$, является для этого и необходимым, и достаточным [36–39]. При условии же выполнения соотношений Коши—Римана для пары функций $F(p,q)$ и $G(p,q)$ комплекснозначная функция $F(p,q) + \mathrm{i}G(p,q) = f(p+\mathrm{i}q)$ будет полноценной аналитической функцией комплексного переменного, что следует из интегральной формулы Коши [32–35]. Функция $F(p,q)$ будет являться ее вещественной частью. Аналогичным образом функция $F(p,q)$ может быть сделана мнимой частью некоторой подходящей аналитической функции комплексного переменного.

Взаимно-однозначная связь функций двух переменных, удовлетворяющих двумерному уравнению Лапласа, с вещественными и мнимыми частями аналитических функций комплексного переменного [32–35] обеспечивает исследователей достаточным исходным материалом для синтеза электрических и магнитных полей по формулам (1) и (2). Для того, чтобы потенциалы (1) или (2) были функциями, симметричными по координате z, необходимо и достаточно, чтобы $F(p,q)$ была функцией, симметричной по координате q (т. е. была вещественной частью функции комплексного переменного $f(p+\mathrm{i}q)$, которая на вещественной оси $q=0$ принимает вещественные значения [19]). Для того, чтобы потенциалы вида (1) или (2) были функциями, антисимметричными по координате z, необходимо и достаточно, чтобы $F(p,q)$ была функцией, антисимметричной по координате q (то есть, была мнимой частью функции комплексного переменного $f(p+iq)$, которая на вещественной оси $q=0$ принимает исключительно вещественные значения [19]).

Симметризация

$$F_+(p,q)=\left(F(p,q)+F(p,-q)\right)/2$$

и

$$F_-(p,q)=\left(F(p,q)-F(p,-q)\right)/2$$

позволяет любую несимметричную гармоничную функцию $F(p,q)$ разбить на симметричную и антисимметричную гармоничные части, каждая из которых не равна нулю. Дополнительно: когда $G(p,q)$ является мнимой частью аналитической функции, вещественной частью которой является функция $F(p,q)$, то мнимой частью для симметричной функции $F_+(p,q)$ будет антисимметричная функция $G_+(p,q)=\left(G(p,q)-G(p,-q)\right)/2$, а мнимой частью для антисимметричной $F_-(p,q)$ — симметричная функция $G_-(p,q)=$ $=\left(G(p,q)+G(p,-q)\right)/2$. Если гармоничная функция $F(p,q)$ сама по себе является симметричной или антисимметричной, то недостающую (антисимметричную или симметричную) часть можно восстановить из соотношений Коши—Римана [32–35] $\partial G(p,q)/\partial q=\partial F(p,q)/\partial p$, $\partial G(p,q)/\partial p=-\partial F(p,q)/\partial q$, которые в силу гармоничности функции $F(p,q)$ всегда будут иметь решение, причем единственное с точностью до аддитивной константы.

2. ПОТЕНЦИАЛЫ, ОДНОРОДНЫЕ ПО ЭЙЛЕРУ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ ОДНОРОДНОСТИ

В работе [24, (гл. IV, §15 и §16)] рассматривается, как можно представить в самом общем виде гармонические функции, однородные по Эйлеру, при любом целочисленном порядке однородности. Алгоритм генерирования максимально полного набора гармонических и однородных функций с целочисленными порядками однородности базируется на двух фундаментальных фактах.

А. Если $U(x,y,z)$ — произвольная гармоническая функция, то функция

$$V(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\times$$
$$\times U\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right) \qquad (3)$$

тоже будет гармонической [40, 41]. Замена переменных (3) представляет собой инверсию в шаре. Она сохраняет однородность функции и гармоничность функции. Указанное преобразование может использоваться при синтезе электронно- и ионно-оптических систем [5].

Легко убедиться, что если $U(x,y,z)$ — однородная по Эйлеру функция с порядком однородности k, то $V(x,y,z)$ будет однородной по Эйлеру функцией с порядком однородности $(-k-1)$. Легко проверить, что повторная подстановка (3) осуществляет обратный переход от функции $V(x,y,z)$ к функции $U(x,y,z)$. Таким образом, для каждой гармонической функции, однородной по Эйлеру с порядком однородности k, обязательно существует прототип с порядком однородности $(-k-1)$, из которого ее можно получить с помощью формулы (3).

Формулу Томсона (3), называемую также преобразованием Кельвина [42–44], для однородных функций $U(x,y,z)$ можно дополнительно упростить. Если с помощью тождества однородности

$U(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^k U(x,y,z)$ вынести множитель $1/(x^2+y^2+z^2)$ из-под аргументов функции (3), формула преобразуется к виду

$$V(x,y,z)=U(x,y,z)\Big/\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{2k+1}. \qquad (3а)$$

То, что такая функция $V(x,y,z)$ будет однородной с порядком однородности $(-k-1)$, проверяется прямой подстановкой $x\to\lambda x$, $y\to\lambda y$, $z\to\lambda z$. То, что такая функция $V(x,y,z)$ будет гармонической, можно доказать, если принять во внимание, что функция $U(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=0$ и соотношению Эйлера $xU_x+yU_y+zU_z=kU$ ([45, приложение Б к гл. 1]).

Б. Если $U(x,y,z)$ — гармоническая функция, однородная по Эйлеру с порядком однородности k, то существует такая гармоническая функция $W(x,y,z)$, однородная по Эйлеру с порядком однородности $k+1$, что $U(x,y,z)=\partial W(x,y,z)/\partial x$. Вместо координаты x можно выбрать y или z, а также произвольное направление дифференцирования. То есть для любого выбора констант a,b,c найдется такая гармоническая функция $W(x,y,z)$, однородная по Эйлеру с порядком однородности $k+1$ (разная при разном выборе констант a,b,c), для которой будет справедливо соотношение

$$U(x,y,z)=a\cdot\partial W(x,y,z)/\partial x+b\cdot\partial W(x,y,z)/\partial y+$$
$$+c\cdot\partial W(x,y,z)/\partial z.$$

То, что производные от функции $W(x,y,z)$ по x,y,z являются гармоническими функциями, однородными по Эйлеру с порядком однородности k, является прямым следствием формулы дифференцирования функций, однородных по Эйлеру [1, 2]. Однако то, что *все* функции $U(x,y,z)$ рассматриваемого типа являются производными некоторых гармонических однородных функций порядка $k+1$ и что дифференцирования лишь по *одной* из координат достаточно, чтобы получить все возможные функции $U(x,y,z)$, является нетривиальным фактом.

Единственность существования функции-прототипа $W(x,y,z)$, впрочем, здесь не выполняется: существенно разным функциям $W(x,y,z)$ могут соответствовать одни и те же функции $U(x,y,z)$. Например, при дифференцировании по координате x трехмерные гармонические однородные функции порядка $k+1$, отличающиеся на аддитивную добавку вида $W_0\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^{k+1}\cos\left((k+1)\operatorname{arctg}(y/z)+\varphi\right)$, которая представляет собой двумерную гармоническую однородную функцию порядка $k+1$, будут порождать одни и те же функции $U(x,y,z)$, гармонические и однородные по Эйлеру с порядком однородности k.

Итак, для генерирования гармонических функций, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности, получаем следующую процедуру. Для гармонических функций, однородных по Эйлеру с нулевым порядком однородности, формула Донкина (1) дает все возможные функции такого вида (или как вариант формула (2) дает все возможные функции, гармонические и однородные по Эйлеру с порядком $k=-1$). С помощью дифференцирования этих функций по выбранной координате (например, x) последовательно получаем все гармонические функции, однородные по Эйлеру с порядками однородности $-1,-2,-3,\ldots$ С помощью подстановки (3) из этих гармонических функций получаются все гармонические функции, однородные по Эйлеру с порядками однородности $+1,+2,+3,\ldots$ Сформулированные выше теоремы гарантируют, что при такой процедуре действий никакая гармоническая функция с целочисленным порядком однородности не будет пропущена.

Частным случаем этой процедуры является процесс Томсона ([45, приложение Б к гл. 1]) для рекурсивного генерирования однородных функций нулевого порядка. А именно, если $V_0(x,y,z)$ — гармоническая однородная функция нулевого порядка, то функции

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\frac{\partial V_0(x,y,z)}{\partial x},$$
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\frac{\partial V_0(x,y,z)}{\partial y},$$
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\frac{\partial V_0(x,y,z)}{\partial z}$$

будут новыми однородными гармоническими функциями нулевого порядка. Действительно, производные от $V_0(x,y,z)$ — однородные гармонические функции порядка $k=-1$, и после применения к ним формулы Томсона, записанной в виде (3а), получаем новые гармонические однородные функции нулевого порядка. Повторное применение этой процедуры дает подстановки следующего уровня с участием вторых производных и т. д. Для формулы Донкина (1) данная процедура означает замену гармонической функции $F(p,q)$ на функции

$$-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q},\quad \frac{1-p^2+q^2}{2}\frac{\partial F}{\partial p}-pq\frac{\partial F}{\partial q},$$
$$-pq\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{1+p^2-q^2}{2}\frac{\partial F}{\partial q}.$$

Легко проверить, что эти новые функции, представляющие собой с точностью до множителя вещественные и мнимые части аналитических функций комплексного переменного $z\,\partial F(z)/\partial z$ и $(1-z^2)\partial F(z)/\partial z$, действительно будут гармоническими.

После дифференцирования разные однородные потенциалы порядка k способны порождать одни и те же однородные потенциалы порядка $k-1$, поэтому полезно проанализировать получаемые формулы на предмет избыточности. Рассмотрим, например, случаи $k=0$ и $k=-1$. С одной стороны, для $k=-1$ все возможные однородные гармонические функции определяются формулой (2). С другой стороны, эти же функции должны определяться как производные по x от формулы (1). Результат сравнения выглядит следующим образом:

$$V(p,q,r)=\frac{1}{r}G(p,q)= =-\frac{1}{r}\left(p\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}+q\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}\right), \tag{4}$$

где в формуле (2) сделана замена $F\to G$, чтобы не путать между собой разные функции, а также использована подстановка

$$x=\frac{(1-p^2-q^2)r}{1-p^2-q^2},\quad y=\frac{2pr}{1-p^2-q^2},\quad z=\frac{2qr}{1-p^2-q^2}, \tag{5}$$

позволяющая взаимно-однозначным образом перейти от переменных x,y,z к переменным

$$p=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad q=\frac{z}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{6}$$

Пусть $G_*(p+\mathrm{i}q)=G(p,q)+\mathrm{i}\tilde{G}(p,q)$ и $F_*(p+\mathrm{i}q)= =F(p,q)+\mathrm{i}\tilde{F}(p,q)$ — функции комплексного переменного, вещественными частями которых служат гармонические функции $G(p,q)$ и $F(p,q)$. (Парные функции $\tilde{G}(p,q)$ и $\tilde{F}(p,q)$ восстанавливаются по заданным функциям $G(p,q)$ и $F(p,q)$ из соотношений Коши—Римана $\partial\tilde{F}/\partial q=\partial F/\partial p$, $\partial\tilde{F}/\partial p=-\partial F/\partial q$ и $\partial\tilde{G}/\partial q=\partial G/\partial p$, $\partial\tilde{G}/\partial p=-\partial G(p,q)/\partial q$ с точностью до аддитивной константы.) Для выполнения тождества (4) необходимо и достаточно условие $G_*(s)=-s\frac{\mathrm{d}F_*(s)}{\mathrm{d}s}$, где $s=p+\mathrm{i}q$ — комплексная переменная. Поэтому между гармоническими функциями G и F, участвующими в тождестве (4), устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

1. Функция $G=-p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial\tilde{F}}{\partial p}=-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}$ будет гармонической, если F гармоническая функция. Функция $\tilde{G}=-q\frac{\partial F}{\partial p}-p\frac{\partial\tilde{F}}{\partial p}= =-q\frac{\partial F}{\partial p}+p\frac{\partial F}{\partial q}$ — парная функция для G. Функции $G,\tilde{G}$ вычисляются по заданной функции F однозначным образом. Гармоничность функций $G,\tilde{G}$ и соотношения Коши—Римана для функций $G,\tilde{G}$ устанавливаются прямой проверкой.

2. Функция F восстанавливается из соотношений $-G=p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}$, $\tilde{G}=-q\frac{\partial F}{\partial p}+p\frac{\partial F}{\partial q}$ по заданной паре функций $G,\tilde{G}$ однозначным образом с точностью до аддитивной константы с помощью процедуры, описанной в [36, 37]. Условия совместности [36–39] для этой переопределенной системы уравнений относительно неизвестной функции F выполнены, поскольку $G,\tilde{G}$ связаны между собой соотношениями Коши—Римана. Прямой проверкой (поскольку $\frac{\partial F}{\partial p}=-\frac{pG+q\tilde{G}}{p^2+q^2}$, $\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{-qG+p\tilde{G}}{p^2+q^2}$) можно убедиться, что функция F будет гармонической.

В данном примере процессу упрощения формулы, полученной при дифференцировании, способствовало использование функций комплексного переменного, а также то, что мы заранее знали желаемый ответ в виде формулы (2). Аналогичным образом можно разобрать случаи, когда для генерирования гармонических потенциалов, однородных по Эйлеру с $k=-1$, используется дифференцирование формулы Донкина (1) по y, z или вообще по произвольно взятому направлению. Однако в общем случае приведение к максимально простой форме выражений, полученных при многократном дифференцировании формулы (1), выглядит не столь просто.

Примечание 1. В [30, 31] вместо дифференцирования по выбранной координате рассматривается процедура генерирования однородных гармонических функций с показателями однородности $-1,-2,-3,\ldots$, состоящая в применении к исходной функции нулевого порядка однородности последовательности из дифференциальных операторов специального вида. Исторически эта процедура была первой, с помощью которой удалось решить проблему гармонических функций с целочисленными порядками однородности [30, 31], однако процедура дифференцирования по выбранной координате выглядит гораздо более привлекательной в техническом плане [24].

Примечание 2. Для нецелочисленных порядков однородности процедура генерирования общих формул могла бы быть устроена аналогичным образом, поскольку и формула Томсона (3), и теорема о дифференцировании однородных гармонических функций никак не используют предположение о целочисленности порядка однородности. Однако имеется проблема с надежными формулами для какого-либо фиксированного нецелочисленного порядка однородности, с которых можно начать процесс генерирования общих формул. Этот вопрос исследуется в публикации [46].

Примечание 3. Доказательство теоремы о дифференцировании и интегрировании однородных гармонических функций, приводимое в монографии [24], существенным образом использует тот факт, что исследуемая функция не имеет особенностей в начале координат $x=y=z=0$. Как следует из примеров, приводимых, в частности, в [7, 16, 17, 21, 25–28], однородные гармонические функции, которые используются в оптике заряженных частиц как потенциалы электрических и магнитных полей, зачастую имеют в отдельных точках особенности, причем в силу базового свойства однородности такие точки либо совпадают с началом координат, либо плотно заполняют собой прямую линию (луч), выходящую из начала координат. В [47] рассматривается уточненное доказательство указанной теоремы, допускающее существование у гармонических однородных функций точек с особенностями, в частности, в начале координат.[3]

3. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ, ОДНОРОДНЫХ ПО ЭЙЛЕРУ С ПОРЯДКАМИ ОДНОРОДНОСТИ $k=-2$, $k=1$ И $k=-3$, $k=2$

Дифференцирование формулы (2) по переменной x позволяет получить общую формулу для гармонических однородных функций с порядком однородности $k=-2$:

$$H(x,y,z)= \\ =\frac{1}{r^2}\left[p\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}+q\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}+\frac{1-p^2-q^2}{1+p^2+q^2}F(p,q)\right], \\ p=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad q=\frac{z}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{7}$$

где $F(p,q)$ — произвольная функция, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа.

Однако теперь уже нельзя утверждать, что разные гармонические функции $F(p,q)$ порождают разные гармонические функции $H(x,y,z)$. А именно, с учетом процедуры дифференцирования функция $V(x,y,z)$ в формуле (2) может задаваться с точностью до аддитивной добавки в виде гармонической функции, однородной по Эйлеру с порядком однородности $k=-1$ и не зависящей от переменной x. Иными словами, с точностью до линейной комбинации гармонических функций $\dfrac{y}{y^2+z^2}$ и $\dfrac{z}{y^2+z^2}$. Отсюда следует, что при вычислении по формуле (7) какой-либо функции $H(x,y,z)$, гармонической и однородной по Эйлеру с порядком однородности $k=-2$, функция $F(p,q)$ может задаваться с точностью до линей-

[3] Такое уточнение теоремы является на самом деле важным. Например, общая формула Уиттекера для однородных гармонических функций [23, 26], в процессе вывода подразумевающая регулярность этих функций, как показывает практика, описывает в полном объеме лишь класс однородных гармонических функций, регулярных (разложимых в сходящийся степенной ряд) в точке $x=y=z=0$ (т. е. фактически однородные гармонические полиномы) [41]. Тем самым упускаются решения, не аналитические в начале координат, но имеющие большой практический смысл. Соответствующие контрпримеры могут быть найдены в [21, 26, 27].

ной комбинации функций $\dfrac{p\left(1+p^2+q^2\right)}{p^2+q^2}$ и $\dfrac{q\left(1+p^2+q^2\right)}{p^2+q^2}$.

Применение подстановки Томсона (3) позволяет из формулы (7) получить общую формулу для гармонических однородных функций с порядком однородности $k=+1$:

$$H(x,y,z)=$$
$$=r\left[p\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}+q\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}+\frac{1-p^2-q^2}{1+p^2+q^2}F(p,q)\right]. \quad (8)$$

Здесь для получения разных функций $H(x,y,z)$ функция $F(p,q)$ также должна задаваться с точностью до линейной комбинации функций $\dfrac{p\left(1+p^2+q^2\right)}{p^2+q^2}$ и $\dfrac{q\left(1+p^2+q^2\right)}{p^2+q^2}$.

Дифференцирование формулы (2) по переменным y,z дает альтернативные общие формулы для гармонических однородных функций с порядком однородности $k=-2$ и соответственно для гармонических однородных функций с порядком однородности $k=+1$:

$$\begin{aligned}H(x,y,z)&=r^k\left[\left(p^2-q^2-1\right)\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}+\right.\\&\left.+2pq\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}+\frac{4p}{1+p^2+q^2}F(p,q)\right],\\H(x,y,z)&=r^k\left[2pq\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}+\right.\\&\left.+\left(q^2-p^2-1\right)\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}+\frac{4q}{1+p^2+q^2}F(p,q)\right].\end{aligned} \quad (9)$$

Линейные комбинации формул (7), (9) дают дополнительные общие выражения, сводимые, впрочем, к (7) при надлежащем выборе функции $F(p,q)$ и замене переменных p,q. По всей видимости, из всех этих формул выражение (7) является самым простым. В самом общем виде возможности этих формул исследуются далее в разделе 5.

Повторное дифференцирование формулы (2) по переменной x позволяет получить общие формулы для гармонических однородных функций с $k=-3$ и $k=+2$:

$$H(x,y,z)=$$
$$\begin{aligned}&=r^k\left[2\frac{\left(1-p^2-q^2\right)^2-2\left(p^2+q^2\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}F(p,q)+\right.\\&+2\frac{\left(2-p^2-q^2\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)}\left(p\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}+q\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}\right)+\\&\left.+p^2\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2}+2pq\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p\partial q}+q^2\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2}\right].\end{aligned} \quad (10)$$

Как и раньше, здесь использована подстановка (6), а $F(p,q)$ представляет собой произвольную функцию, удовлетворяющую двумерному уравнению Лапласа. Прямая проверка подтверждает, что функции (10) действительно удовлетворяют трехмерному уравнению Лапласа. С учетом того, что $\dfrac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2}+\dfrac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2}=0$, формулы (10) могут быть записаны в разных эквивалентных формах.

Чтобы получать одни и те же значения для выражений (10), получаемых в результате двукратного дифференцирования выражения (2), в формуле (2) однородная функция $V(x,y,z)$ порядка (-1) задается с точностью до аддитивной добавки

$$C_a\frac{y}{y^2+z^2}+C_b\frac{z}{y^2+z^2}+C_c\frac{xyz}{\left(y^2+z^2\right)^2}+C_d\frac{x\left(y^2-z^2\right)}{\left(y^2+z^2\right)^2}.$$

Это означает, что и функция $F(p,q)$ в формулах (10) должна задаваться с точностью до линейной суперпозиции функций

$$\frac{p\left(1+p^2+q^2\right)}{p^2+q^2},\quad \frac{q\left(1+p^2+q^2\right)}{p^2+q^2},$$
$$\frac{pq\left(1-\left(p^2+q^2\right)^2\right)}{\left(p^2+q^2\right)^2},\quad \frac{\left(p^2-q^2\right)\left(1-\left(p^2+q^2\right)^2\right)}{\left(p^2+q^2\right)^2},$$

если мы хотим получать существенно разные функции $H(x,y,z)$.

Альтернативные формулы для $k=-3$, $k=+2$ могут быть получены с помощью двукратного дифференцирования формулы (2) по различным комбинациям x,y,z. Из шести получаемых таким образом формул только пять будут независимыми, поскольку дифференцируемая функция $V(x,y,z)$ является гармонической и должна подчиняться уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$. Дифференцирование облегчается, если использовать формулы

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1-p^2-q^2}{1+p^2+q^2},\quad \frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{p}{r},\quad \frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{q}{r},$$
$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{2p}{1+p^2+q^2},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1-p^2+q^2}{r},\quad \frac{\partial q}{\partial y}=-\frac{pq}{r},$$
$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{2q}{1+p^2+q^2},\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{pq}{r},\quad \frac{\partial q}{\partial z}=\frac{1+p^2-q^2}{r}.$$

Дополнительные варианты конструируются в виде линейных комбинаций с постоянными коэффициентами формул, полученных в результате дифференцирования, а также с помощью конформной замены аргументов у функции F. Возможные упрощения формул (7)–(10) с помощью конформной замены переменных рассматривается далее в разделе 6.

4. ОБЩИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Возможно, удастся упростить выражения (7)–(10) так, чтобы удалить из них производные от функции? Задача не представляется безнадежной: например, в разделе 2 результат дифференцирования алгебраической формулы (1), представляющий собой алгебраически-дифференциальное выражение с производными первого порядка, удается упростить до чисто алгебраического вида (2).

Рассмотрим алгебраическое выражение $R(x,y,z)\cdot F\big(f(x,y,z),g(x,y,z)\big)$ и попробуем найти такие функции R,f,g от переменных x,y,z, чтобы при любой гармонической функции F результат удовлетворял трехмерному уравнению Лапласа и был однородной функцией. Наличие формул (1), (2) показывает, что такая задача не бессмысленна, а тот факт, что сумма двух однородных гармонических функций снова является однородной гармонической функцией, заставляет ограничиться линейными по F выражениями, причем с нулевым свободным членом. При этом, поскольку всегда есть возможность применить взаимно-обратную подстановку (5), (6), исследуемое алгебраическое выражение можно с самого начала записать через переменные p,q,r, выражаемые через x,y,z по формулам (6):

$$\Phi(x,y,z)=R(r,p,q)\cdot F\big(f(r,p,q),g(r,p,q)\big). \quad (11)$$

Продифференцируем (11) и подставим в трехмерное уравнение Лапласа. В получившееся выражение будут входить значения функции F и ее первые и вторые производные. Требование, чтобы F была гармонической функцией, накладывает единственное условие $\frac{\partial^2 F}{\partial g^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial f^2}$, а значения $F,\frac{\partial F}{\partial f},\frac{\partial F}{\partial g},\frac{\partial^2 F}{\partial f^2},\frac{\partial^2 F}{\partial f\partial g}$ можно рассматривать как произвольные и независимые. Поэтому выражения, сгруппированные как множители перед $F,\frac{\partial F}{\partial f},\frac{\partial F}{\partial g},\frac{\partial^2 F}{\partial f^2},\frac{\partial^2 F}{\partial f\partial g}$, должны обращаться в ноль по отдельности.

Примечание 4. Это можно сделать, поскольку задача Коши о восстановлении гармонической функции по заданным на прямой $g=g_0$ значениям $F(f,g_0),\frac{\partial F(f,g_0)}{\partial g}$ всегда разрешима, по крайней мере, локально в виде сходящегося ряда. Поэтому всегда можно подобрать такую гармоническую функцию $F(f,g)$, у которой величины $F,\frac{\partial F}{\partial f},\frac{\partial F}{\partial g},\frac{\partial^2 F}{\partial f^2},\frac{\partial^2 F}{\partial f\partial g}$ в заданной точке равны заранее назначенным значениям, т. е. величины $F,\frac{\partial F}{\partial f},\frac{\partial F}{\partial g},\frac{\partial^2 F}{\partial f^2},\frac{\partial^2 F}{\partial f\partial g}$ могут быть произвольными, если не накладывать каких-либо дополнительных ограничений на функцию F.

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\left(1+p^2+q^2\right)^2\left(f_p^2+f_q^2\right)+4r^2f_r^2=\\
&\qquad=\left(1+p^2+q^2\right)^2\left(g_p^2+g_q^2\right)+4r^2g_r^2,\\
&\left(1+p^2+q^2\right)^2\left(f_pg_p+f_qg_q\right)+4r^2f_rg_r=0,\\
&2\left(1+p^2+q^2\right)^2\left(f_pR_p+f_qR_q\right)+8r^2f_rR_r+\\
&\qquad+R\left(1+p^2+q^2\right)^2\left(f_{pp}+f_{qq}\right)+\\
&\qquad\qquad+4rR\left(rf_{rr}+2f_r\right)=0,\\
&2\left(1+p^2+q^2\right)^2\left(g_pR_p+g_qR_q\right)+8r^2g_rR_r+\\
&\qquad+R\left(1+p^2+q^2\right)^2\left(g_{pp}+g_{qq}\right)+\\
&\qquad\qquad+4rR\left(rg_{rr}+2g_r\right)=0,\\
&\left(1+p^2+q^2\right)^2\left(R_{pp}+R_{qq}\right)+4r\left(rR_{rr}+2R_r\right)=0
\end{aligned}\quad (12)$$

(для экономии места символы частных производных заменены на нижние индексы).

Кроме уравнения Лапласа функция (11) должна удовлетворять дифференциальному соотношению Эйлера для однородных функций [1, 2]

$$x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z = k\Phi\,, \tag{13}$$

откуда в силу произвольности величин $F, \partial F/\partial f, \partial F/\partial g$ сразу следуют соотношения $f_r = 0$, $g_r = 0$, $rR_r = kR$. Тем самым $R(r,p,q) = r^k S(p,q)$, а функции f,g,S не зависят от r. Первые два уравнения системы (12) приобретают вид $f_p^2 + f_q^2 = g_p^2 + g_q^2$, $f_p g_p + f_q g_q = 0$, откуда сразу следует, что либо $f_p = g_q$, $f_q = -g_p$, либо $f_p = -g_q$, $f_q = g_p$. Тем самым функции f,g необходимым образом должны быть гармоническими и удовлетворять соотношениям Коши—Римана, т. е. задавать конформное отображение $(p,q) \leftrightarrow (f,g)$. Значит, для аргументов функции F всегда можно сделать предварительную обратную замену переменных, по крайней мере, локально, сохранив при этом ее свойство быть произвольной гармонической функцией. Поэтому на этапе предварительного анализа проблемы без ограничения общности можно считать, что $f(p,q) \equiv p$, $g(p,q) \equiv q$ (потом в случае необходимости можно применить конформную замену для аргументов функции F уже в полученной формуле).

Тогда соотношения (12) приобретают вид $R_p = 0$, $R_q = 0$, $rR_{rr} + 2R_r = 0$. Поскольку $R = r^k S(p,q) = \text{const}\cdot r^k$, условие $rR_{rr} + 2R_r = 0$ может быть выполнено только при $k = 0$ или при $k = -1$. Поэтому формулы (1) и (2) с точностью до постоянного множителя и конформной замены аргументов p,q — единственные с требуемым свойством. С помощью конформной замены переменных формулам Донкина (1), (2) можно придать другой вид, но а) все эти формы записи будут эквивалентны, б) ни одна из них не проще другой. Отсюда также следует, что избавиться от производных в формулах (7)–(10) невозможно.

5. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ С ПЕРВЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

По аналогии с предыдущим разделом рассмотрим выражения

$$\Phi(x,y,z) = R\,F(f,g) + S\frac{\partial F(f,g)}{\partial f} + T\frac{\partial F(f,g)}{\partial g}, \tag{14}$$

где $R(r,p,q)$, $S(r,p,q)$, $T(r,p,q)$, $f(r,p,q)$, $g(r,p,q)$ — фиксированные функции от выражений (6), а F — произвольная гармоническая функция двух переменных.

Требование удовлетворить дифференциальному соотношению Эйлера дает условия

$$T\frac{\partial f}{\partial r} + S\frac{\partial g}{\partial r} = 0,\ S\frac{\partial f}{\partial r} - T\frac{\partial g}{\partial r} = 0,\ r\frac{\partial R}{\partial r} = kR,$$

$$r\frac{\partial S}{\partial r} + rR\frac{\partial f}{\partial r} = kS,\ \ r\frac{\partial T}{\partial r} + rR\frac{\partial g}{\partial r} = kT.$$

Если $S^2 + T^2 \neq 0$, то из первых двух условий следует, что $f_r = g_r = 0$, т. е. f,g зависят только от p,q и не зависят от r. Оставшиеся уравнения дают условия $R = r^k \rho(p,q)$, $S = r^k \sigma(p,q)$, $T = r^k \tau(p,q)$, где $\rho(p,q)$, $\sigma(p,q)$, $\tau(p,q)$ — пока не известные функции.

С учетом этих условий подстановка (14) в уравнение Лапласа (где также используются соотношения $\dfrac{\partial^2 F}{\partial g^2} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial f^2}$, $\dfrac{\partial^3 F}{\partial f \partial g^2} = -\dfrac{\partial^3 F}{\partial f^3}$, $\dfrac{\partial^3 F}{\partial g^3} = -\dfrac{\partial^3 F}{\partial f^2 \partial g}$, а остальные значения функции F и ее производных считаются независимыми) дает для множителей перед производными $\dfrac{\partial^3 F(f,g)}{\partial f^3}$ и $\dfrac{\partial^3 F(f,g)}{\partial f^2 \partial g}$ следующую систему уравнений:

$$\sigma\left(f_p^2 + f_q^2 - g_p^2 - g_q^2\right) - 2\tau\left(f_p g_p + f_q g_q\right) = 0,$$

$$2\sigma\left(f_p g_p + f_q g_q\right) + \tau\left(f_p^2 + f_q^2 - g_p^2 - g_q^2\right) = 0.$$

Поскольку предполагается, что $\sigma^2 + \tau^2 \neq 0$, то отсюда следует, что $f_p^2 + f_q^2 = g_p^2 + g_q^2$, $f_p g_p + f_q g_q = 0$, так что либо $f_p = g_q$, $f_q = -g_p$, либо $f_p = -g_q$, $f_q = g_p$ (тем самым снова реализуется конформная замена переменных для аргументов функции F). Используя рассуждения из предыдущего раздела, без ограничения общности можно считать, что $f(p,q) \equiv p$, $g(p,q) \equiv q$, поскольку фиксированное конформное преобразование для аргументов функции F приводит всего лишь к взаимно-однозначному переходу к другой произвольной гармонической функции F. Тогда оставшиеся уравнения, получаемые при подстановке (14) в уравнение Лапласа и группировке множителей перед независимыми производными от функции F, приобретают вид

$$
\begin{aligned}
&\sigma_p - \tau_q = 0, \quad \sigma_q + \tau_p = 0, \\
&4k(k+1)\sigma + \left(1+p^2+q^2\right)^2\left(\sigma_{pp}+\sigma_{qq}+2\rho_p\right)=0, \\
&4k(k+1)\tau + \left(1+p^2+q^2\right)^2\left(\tau_{pp}+\tau_{qq}+2\rho_q\right)=0, \\
&k(k+1)\rho + \left(1+p^2+q^2\right)^2\left(\rho_{pp}+\rho_{qq}\right)=0.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Из первых двух уравнений системы (15) следует, что пара функций σ, τ удовлетворяет уравнениям Коши—Римана, и тем самым функции σ и τ должны удовлетворять двумерному уравнению Лапласа. Поэтому с помощью третьего и четвертого уравнений системы (15) их можно выразить через функцию ρ:

$$
\sigma(p,q) = -\frac{\left(1+p^2+q^2\right)^2}{2k(k+1)}\rho_p,
$$

$$
\tau(p,q) = -\frac{\left(1+p^2+q^2\right)^2}{2k(k+1)}\rho_q
$$

(предполагается, что $k(k+1)\neq 0$, поскольку случаям $k=0$ и $k=-1$ соответствуют алгебраические общие формулы, разобранные в разделе 4). После этого из первых двух уравнений и из последнего уравнения системы (15) можно вывести соотношения

$$
\begin{aligned}
\rho_{pp} &= \frac{2}{\left(1+p^2+q^2\right)}\left(-p\rho_p+q\rho_q\right) - \\
&\qquad - \frac{2k(k+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}\rho, \\
\rho_{pq} &= -\frac{2}{\left(1+p^2+q^2\right)}\left(q\rho_p+p\rho_q\right), \\
\rho_{qq} &= \frac{2}{\left(1+p^2+q^2\right)}\left(p\rho_p-q\rho_q\right) - \frac{2k(k+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}\rho.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Для смешанных частных производных должны выполняться соотношения $\frac{\partial}{\partial q}\left(\rho_{pp}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\rho_{pq}\right)$, $\frac{\partial}{\partial p}\left(\rho_{qq}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(\rho_{pq}\right)$. Поэтому из соотношений (16) следует, что либо $\rho_p=\rho_q=0$ (а тогда и $\sigma=\tau=0$, и мы возвращаемся к варианту из раздела 4), либо $k^2+k-2=0$, т. е. при $k=-2$ или $k=+1$. Значит, формулы вида (14) возможны лишь в тех случаях, для которых уже имеются формулы (7) и (8). Отсюда также следует, что избавиться от вторых производных в формулах (10) не представляется возможным.

При $k=-2$ и $k=+1$ система уравнений (16) приобретает вид

$$
\begin{aligned}
\rho_{pp} &= \frac{2}{\left(1+p^2+q^2\right)}\left(-p\rho_p+q\rho_q\right) - \frac{4}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}\rho, \\
\rho_{pq} &= -\frac{2}{\left(1+p^2+q^2\right)}\left(q\rho_p+p\rho_q\right), \\
\rho_{qq} &= \frac{2}{\left(1+p^2+q^2\right)}\left(p\rho_p-q\rho_q\right) - \frac{4}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}\rho.
\end{aligned}
$$

Ее можно записать в эквивалентном виде, как

$$
\begin{aligned}
\rho_p &= \lambda, \\
\rho_q &= \mu, \\
\lambda_p &= -\frac{2p}{\left(1+p^2+q^2\right)}\lambda + \frac{2q}{\left(1+p^2+q^2\right)}\mu - \\
&\qquad - \frac{4}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}\rho, \\
\lambda_q &= -\frac{2q}{\left(1+p^2+q^2\right)}\lambda - \frac{2p}{\left(1+p^2+q^2\right)}\mu, \\
\mu_p &= -\frac{2q}{\left(1+p^2+q^2\right)}\lambda - \frac{2p}{\left(1+p^2+q^2\right)}\mu, \\
\mu_q &= \frac{2p}{\left(1+p^2+q^2\right)}\lambda - \frac{2q}{\left(1+p^2+q^2\right)}\mu - \\
&\qquad - \frac{4}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}\rho
\end{aligned} \tag{17}
$$

относительно трех неизвестных функций $\rho(p,q)$, $\lambda(p,q)$, $\mu(p,q)$. Условия совместности $\frac{\partial}{\partial q}\left(\rho_p\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\rho_q\right)$, $\frac{\partial}{\partial q}\left(\lambda_p\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\lambda_q\right)$, $\frac{\partial}{\partial q}\left(\mu_p\right)= =\frac{\partial}{\partial p}\left(\mu_q\right)$ для этой системы выполнены. "Заморозив" переменную q, получаем, что оставшиеся уравнения, использующие дифференцирование по p, образуют полноценную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Из этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений получается решение

$$\rho=\frac{1-p^2+q^2}{1+p^2+q^2}C_a(q)+\frac{p}{1+p^2+q^2}C_b(q)+qC_c(q),$$

$$\lambda=-\frac{4p\left(1+q^2\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}C_a(q)+\frac{1-p^2+q^2}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}C_b(q),$$

$$\mu=-\frac{2q\left(1-p^2+q^2\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}C_a(q)-$$

$$-\frac{2pq}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}C_b(q)+\frac{1}{1+p^2+q^2}C_c(q).$$

Подставив его в систему уравнений (17), определяем оставшиеся неизвестными функции $C_a(q)$, $C_b(q)$, $C_c(q)$. В окончательном виде решение самого общего вида выглядит так:

$$\rho(p,q)=\frac{4q}{1+p^2+q^2}c_a+\frac{4p}{1+p^2+q^2}c_b+\frac{1-p^2-q^2}{1+p^2+q^2}c_c,$$

$$\sigma(p,q)=2pq\,c_a-\left(1-p^2+q^2\right)c_b+p\,c_c,$$

$$\tau(p,q)=-\left(1+p^2-q^2\right)c_a+2pq\,c_b+q\,c_c,$$

где c_a, c_b, c_c — произвольные константы. Тем самым формула (14) в самом общем виде без учета конформных преобразований аргументов у гармонической функции F представляет собой просто линейную комбинацию формул (8), (9).

Можно использовать свободу выбора конформного преобразования $f(p,q)$, $g(p,q)$ в формуле (14), с тем чтобы упростить выражение. В частности, если взять за основу для выбора функций R,S,T выражения (7), (8) и применить подстановку $f=\ln\sqrt{p^2+q^2}$, $g=\operatorname{arctg}(q/p)$, то результатом будет следующая общая формула для $k=-2$ и $k=+1$, содержащая только одну производную:

$$H(x,y,z)=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^k\times$$

$$\times\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}F(p,q)+\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}\right),$$

$$p=\ln\left(\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\quad q=\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{y}\right).$$

6. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ СО ВТОРЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

По аналогии с предыдущим разделом рассмотрим выражение

$$\Phi(x,y,z)=$$

$$=R\,F(f,g)+S\frac{\partial F(f,g)}{\partial f}+T\frac{\partial F(f,g)}{\partial g}+$$

$$+M\frac{\partial^2 F(f,g)}{\partial f^2}+N\frac{\partial^2 F(f,g)}{\partial f\partial g}+K\frac{\partial^2 F(f,g)}{\partial g^2}, \quad (18)$$

где R, S, T, M, N, K, f, g — фиксированные функции от переменных r,p,q, заданных с помощью выражений (6), а F — произвольная гармоническая функция двух переменных. В силу гармоничности функции F можно без ограничения общности считать $K\equiv 0$. Дальнейший анализ выполняется по уже знакомой схеме (здесь описывается только общий ход рассуждений без детальных выкладок).

1. Из дифференциального соотношения Эйлера (13) сразу следует, что $f_r=g_r=0$ (т. е. f и g не зависят от r, а зависят только от p, q), $R(r,p,q)=r^k\rho(p,q)$, $S(r,p,q)=r^k\sigma(p,q)$, $T(r,p,q)=r^k\tau(p,q)$, $M(r,p,q)=r^k\mu(p,q)$, $N(r,p,q)=r^k\eta(p,q)$.

2. С учетом этих соотношений выражение (18) подставляется в трехмерное уравнение Лапласа, а множители при независимых производных от функции F группируются в отдельные уравнения (с учетом тождеств $F_{gg}=-F_{ff}$, $F_{fgg}=-F_{fff}$, $F_{ggg}=-F_{ffg}$, $F_{ffgg}=-F_{ffff}$, $F_{fggg}=-F_{fffg}$, $F_{gggg}=+F_{ffff}$).

3. Из уравнений, полученных как множители при F_{ffff}, F_{fffg}, следует, что $(f,g)\leftrightarrow(p,q)$ является конформной заменой переменных, и тем самым без ограничения общности можно считать $f(p,q)\equiv p$, $g(p,q)\equiv q$.

4. После этого из уравнений при F_{fff}, F_{ffg} следует, что $\mu_p=\eta_q$, $\mu_q=-\eta_p$, так что $\mu_{pp}+\mu_{qq}=0$, $\eta_{pp}+\eta_{qq}=0$. Это позволяет выразить из уравнений при F_{ff}, F_{fg} функции μ,η:

$$\mu=\frac{\left(1+p^2+q^2\right)^2\left(\tau_q-\sigma_p\right)}{2k(k+1)},$$

$$\eta = -\frac{\left(1+p^2+q^2\right)^2\left(\tau_p+\sigma_q\right)}{2k\left(k+1\right)}.$$

5. Теперь надо найти такое же явное выражение для σ. Для этого из уравнений для $F_{fff}, F_{ffg}, F_f, F_g$ находим значения $\sigma_{pp}, \sigma_{pq}, \sigma_{qq}$, как функции от σ_p, σ_q и старших производных от ρ, τ. Дифференцируя эти выражения, находим значения $\sigma_{ppp} = \partial\sigma_{pp}/\partial p$, $\sigma_{ppq} = \left(\partial\sigma_{pp}/\partial q + \partial\sigma_{pq}/\partial p\right)/2$, $\sigma_{pqq} = \left(\partial\sigma_{pq}/\partial q + \partial\sigma_{qq}/\partial p\right)/2$, $\sigma_{qqq} = \partial\sigma_{qq}/\partial q$, как функции от σ_p, σ_q и старших производных от ρ, τ (подставляя по необходимости выражения $\sigma_{pp}, \sigma_{pq}, \sigma_{qq}$, как функции от σ_p, σ_q). Подставив все эти значения в уравнения для F_{ff}, F_{fg}, можем вычислить σ_p, σ_q, как функции от старших производных ρ, τ. Для полученных соотношений условия совместности $\partial\sigma_p/\partial q = \partial\sigma_q/\partial p$ уже выполнены, так что новых соотношений для функции σ получить не удастся. Однако, заново вычисляя с помощью полученных соотношений величины $\sigma_{pp} = \partial\sigma_p/\partial p$ и $\sigma_{qq} = \partial\sigma_q/\partial q$, как функции от σ и от старших производных ρ, τ, и подставляя эти значения в уравнение для F_f, получаем возможность вычислить

$$\sigma = \Big[2\rho_p\left(2\left(1+p^2+q^2\right) - k\left(k+1\right)\right) + \\ +\left(1+p^2+q^2\right)\left(p\rho_{pp} + 2q\rho_{pq} - p\rho_{qq}\right)\Big]\times \\ \times\frac{1}{2k\left(k+1\right)\left(k-1\right)\left(k+2\right)}.$$

При упрощении полученного выражения до приведенной здесь формулы учтен результат дифференцирования соотношения $4k\left(k+1\right)\rho + \left(1+p^2+q^2\right)^2\left(\rho_{pp}+\rho_{qq}\right) = 0$, которое соответствует множителю при F, что позволяет удалить производные третьей степени от функции ρ из выражения для σ. При этом вырожденные случаи $k=0$, $k=-1$, $k=+1$, $k=-2$ анализировать нет необходимости, поскольку алгебраически-дифференциальные формулы общего вида для этих случаев уже были получены ранее без привлечения вторых производных.

6. Забывая временно о том, что σ уже вычислено, по той же самой схеме, что и в предыдущем пункте, вычисляем τ как функцию старших производных функции ρ:

$$\tau = \Big[2\rho_q\left(2\left(1+p^2+q^2\right) - k\left(k+1\right)\right) + \\ +\left(1+p^2+q^2\right)\left(-q\rho_{pp} + 2p\rho_{pq} + q\rho_{qq}\right)\Big]\times \\ \times\frac{1}{2k\left(k+1\right)\left(k-1\right)\left(k+2\right)}.$$

7. Теперь уравнение Лапласа распадается на уравнения, содержащие только функцию ρ и ее производные до пятого порядка включительно. Из соотношения $4k\left(k+1\right)\rho + \left(1+p^2+q^2\right)^2 \times \left(\rho_{pp}+\rho_{qq}\right) = 0$, которое соответствует множителю при F, можно выразить значение ρ_{qq}, а после его дифференцирования получить значения для ρ_{pppqq}, ρ_{ppqqq}, ρ_{pqqqq}, ρ_{qqqqq} — этого оказывается достаточно, чтобы исключить из уравнений все пятые производные от функции ρ. Добавив к уравнениям для $F_{fff}, F_{ffg}, F_f, F_g$ результат дифференцирования $4k\left(k+1\right)\rho + \left(1+p^2+q^2\right)^2 \times \left(\rho_{pp}+\rho_{qq}\right) = 0$ по p, q до второго порядка, можно выразить все производные ρ четвертого и третьего порядков через производные ρ второго и первого порядков. В результате в тех уравнениях, которые после всех этих подстановок не обращаются в ноль, остаются только функция ρ и ее производные второго и первого порядков.

8. Полученные из множителей для F_{ff}, F_{fg} уравнения требуют аккуратности. Они содержат множитель k^2+k-6 и тем самым автоматически обращаются в ноль, когда $k=-3$ и $k=+2$. Пусть $k \neq -3$ и $k \neq +2$, тогда из уравнений для F_{ff}, F_{fg}, F можно выразить производные $\rho_{pp}, \rho_{pq}, \rho_{qq}$, как функции от ρ, ρ_p, ρ_q. Затем с помощью условий совместности $\partial\left(\rho_{pp}\right)/\partial q = \partial\left(\rho_{pq}\right)/\partial q$, $\partial\left(\rho_{qp}\right)/\partial q = \partial\left(\rho_{qq}\right)/\partial q$ можно найти ρ, ρ_p, ρ_q, как функции от ρ, и наконец определить единственно возможный вариант: $\rho\left(p,q\right) = \left(\left(p^2+q^2\right)/\left(1+p^2+q^2\right)\right)^{4/3}$. Прямая проверка показывает, что этот вариант является ложным и не обеспечивает обнуления всех требуемых уравнений ни при каких значениях k.

9. Осталось проанализировать вырожденные случаи $k=-3$ и $k=+2$. В этом случае от исходной

системы уравнений остаются уравнения, в которых производные $\rho_{ppp}, \rho_{ppq}, \rho_{pqq}, \rho_{qqq}$ выражаются через $\rho_{pp}, \rho_{pq}, \rho_{qq}, \rho_p, \rho_q, \rho$, плюс дополнительное уравнение $4k(k+1)\rho + \left(1+p^2+q^2\right)^2\left(\rho_{pp}+\rho_{qq}\right)=0$ для вторых производных. Если ввести вспомогательные функции $\rho_{10}=\rho_p$, $\rho_{01}=\rho_q$, $\rho_{20}=\rho_{pp}$, $\rho_{11}=\rho_{pq}$, $\rho_{02}=\rho_{qq}$, получим замкнутую систему линейных уравнений в частных производных по p и q первого порядка от нескольких функций. Проверка показывает, что условия совместности (выражающиеся в тождественном равенстве смешанных производных второго порядка независимо от порядка дифференцирования [36–39]) для этой системы уравнений будут выполнены, так что решение у рассматриваемой переопределенной системы уравнений в частных производных существует. Остается найти это решение в явном виде.

10. Для нахождения решения можно, как в предыдущем разделе, "заморозить" переменную q, решить полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений от переменной p, а затем попробовать так определить неизвестные функции-константы от переменной q, чтобы удовлетворить оставшимся уравнениям. Но проще угадать решение, взяв за основу альтернативные алгебраически-дифференциальные формулы для однородных функций с $k=-3$, $k=+2$, которые можно получить с помощью двукратного дифференцирования формулы (2) по любым возможным комбинациям переменных x, y, z (с учетом того, что из шести получаемых таким образом формул только пять будут независимыми в силу очевидного соотношения $V_{xx}+V_{yy}+V_{zz}\equiv 0$). Как легко понять, линейная комбинация с постоянными коэффициентами, составленная из этих формул, обязана удовлетворять рассматриваемой системе уравнений. Остается проверить, что а) полученный конструкт действительно является решением и б) свободных констант достаточно, чтобы обеспечить произвольные начальные условия в начальной точке. Тогда по теореме существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений получаем, что сконструированная нами линейная комбинация из альтернативных формул и является самой общей формулой, а других формул не существует.

Итогом выкладок является то, что общая форма (18) возможна только при $k=-3$ и $k=+2$, что функции $f(p,q)$ и $g(p,q)$ представляют собой конформную замену переменных и поэтому для начала их можно установить равными $f(p,q)\equiv p$ и $g(p,q)\equiv q$, что при выборе $f(p,q)\equiv p$ и $g(p,q)\equiv q$ самая общая форма (18) сводится к линейной комбинации с постоянными коэффициентами форм, получающихся при двукратном дифференцировании базовой формулы (2) по переменным x, y, z.

По всей видимости, похожие результаты будут справедливыми и при следующих старших порядках производных в общих формулах для однородных функций, однако строгое доказательство этого факта на настоящий момент отсутствует. Этот результат является важным, поскольку, вообще говоря, можно неограниченно наращивать порядок производных в общих формулах (например, скачком повышая порядок однородности с помощью подстановки Томсона (3) и повторно дифференцируя полученную формулу, пока не опустимся до требуемого порядка однородности). Но при этом, как оказывается, для каждого целочисленного порядка однородности имеется минимальный порядок производных, устанавливаемый первичным прямым дифференцированием формулы (2), ниже которого упростить общую формулу алгебраически-дифференциального вида невозможно.

Как и в предыдущем разделе, можно использовать свободу выбора конформного преобразования $f(p,q)$, $g(p,q)$ в формуле (18), с тем чтобы упростить итоговое выражение. В частности, если взять за основу для выбора функций R, S, T, M, N, K выражения (10) и применить замену переменных

$$f=\ln\sqrt{p^2+q^2}-\operatorname{arctg}(q/p),$$
$$g=\ln\sqrt{p^2+q^2}+\operatorname{arctg}(q/p),$$

то результатом будет общая формула для $k=-3$ и $k=+2$, в которой присутствует только смешанная вторая производная:

$$H(x,y,z)=r^k\left(\frac{2x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}F(p,q)+\right.$$
$$\left.+\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}+\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}\right)+2\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p\partial q}\right),$$
$$p=\ln\left(\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{y}\right),$$
$$q=\ln\left(\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{y}\right),$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(специальный анализ показывает, что это единственная конформная замена переменных, позволяющая избавиться от вторых производных $\partial^2 F/\partial p^2, \partial^2 F/\partial q^2$). Если же использовать замену переменных $f = \ln\sqrt{p^2+q^2}$, $g = \operatorname{arctg}(q/p)$, как это было сделано в предыдущем разделе, то общая формула для $k=-3$ и $k=+2$ также приобретает вполне изящный вид:

$$H(x,y,z) = r^k \left(\frac{2x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2} F(p,q) + \right.$$

$$\left. + \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial F(p,q)}{\partial p} + \frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2} \right),$$

$$p = \ln\left(\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right), \quad q = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{y}\right),$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Примечание 5. Как можно заметить, подстановка $f = \ln\sqrt{p^2+q^2}$, $g = \operatorname{arctg}(q/p)$ обладает существенными преимуществами для старших порядков дифференцирования. При использовании этой подстановки в формуле (2) и последующих дифференцированиях ее по x в соответствующих общих формулах будут возникать только производные по переменной p. Производные по переменной q и смешанные производные будут отсутствовать.

Благодарности

Авторы посвящают эту статью памяти нашего общего учителя и наставника Юрия Константиновича Голикова, создателя и бессменного руководителя Лаборатории корпускулярной оптики при кафедре Физической электроники Ленинградского политехнического института (ныне Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого).

Авторы считают своей несомненной обязанностью также выразить свою глубокую благодарность создателям, сотрудникам и спонсорам сайтов

rspl.royalsocietypublishing.org (Proceedings of the Royal Society of London) и

gallica.bnf.fr (Bibliothèque nationale de France),

благодаря самоотверженной работе которых, в частности, имеется возможность свободно ознакомиться со ссылками [30, 31, 40].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 616 с.
2. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. Москва: Наука, 1974. 480 с.
3. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 2. С. 9–15.
4. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.
5. *Краснова Н.К.* Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. СПб., 2013. 259 с.
6. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.
7. *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 1. С. 50–58. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/full1/Art6.pdf.
8. *Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.* Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, № 23–24.
9. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12, № 4. С. 272–281.
10. *Краснова Н.К.* Двумерные степенные электронные спектрографы с плоскостью симметрии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 6. С. 97–103.
11. *Аверин И.А.* Осесимметричные электростатические электронные спектрографы, использующие однородные по Эйлеру потенциалы с нецелочисленными порядками однородности // Тез. докл. Съезда ВМСО и VIII Всероссийской конференции, 2–17 октября 2015 г., Москва. М.: ВМСО, типография изд-ва "Тровант", 2015. 132 с.
12. *Аверин И.А.* Электростатические и магнитостатические электронные спектрографы с однородными по Эйлеру потенциалами, характеризуемыми нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 3. С. 35–44. URL: http://213.170.69.26/mag/2015/full3/Art5.pdf.
13. *Аверин И.А., Бердников А.С.* Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 5–8.
14. *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 11–20.
15. *Бердников А.С., Аверин И.А*. Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 1. С. 89–95.
16. *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давы-*

дов С.Н. Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 2. С. 91–94.

17. *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.* Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, № 3. С. 44–47.
18. *Бердников А.С., Аверин И.А.* О невозможности двойной фокусировки в комбинированных электрических и магнитных полях, однородных по Эйлеру // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13, № 1. С. 62–65.
19. *Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В.* Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Учебное пособие. Ленинград: Издательство ЛПИ, 1984. 79 с.
20. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Теорема об однородности скалярных и векторных потенциалов для электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 6.
21. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.* Трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (44). С. 147–165.
22. *Бердников А.С., Краснова Н.К.* Достаточный критерий устойчивости и компактности плоских ионных пучков в трехмерных электрических и магнитных полях с плоскостью симметрии // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 2. С. 69–90. URL: http://213.170.69.26/mag/2015/full2/Art8.pdf.
23. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. Ч. 2: Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 516 с.
24. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.
25. *Голиков Ю.К.* Решение задачи Коши для однородных гармонических потенциалов нулевой кратности // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2(44). С. 59–62.
26. *Голиков Ю.К.* Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2(44). С. 165–181.
27. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Простейшие аналитические электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2(44). С. 17–32.
28. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Квази-полиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2016. № 4.
29. *Хокс П., Каспер Э.* Основы электронной оптики. Т. 1. М.: Мир, 1993. 552 с.
30. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace‘s Functions &c. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. P. 43–57.
31. *Donkin W.F.* On the Equation of Laplace‘s Functions &c. // Proceedings of the Royal Society of London. 1856-1857. Vol. 8. P. 307–310.
32. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
33. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1968. 486 с. и 624 с.
34. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. 3 изд. перераб. доп. М.: Наука, 1991. 448 с.
35. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968. 646 с.
36. *Гюнтер Н.М.* Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Ленинград-Москва: ОНТИ, 1934.
37. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностранной литературы, 1957. 443 с.
38. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1947. 362 с.
39. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1948. 432 с.
40. *Thomson W.* Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de mathématiques pures et appliquées. T. XII. 1847. P. 256–264.
41. *Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.* Трактат по натуральной философии. Ч. II. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. 560 с.
42. *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. Москва-Ленинград: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.
43. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
44. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.
45. *Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.* Трактат по натуральной философии. Ч. I. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010. 572 с.
46. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Интегральные формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26, № 4. С. 31–42. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/full4/Art3.pdf.
47. *Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.* Исследование теоремы о дифференцировании и интегрировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4, № 6.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург (*Бердников А.С., Аверин И.А.*)

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.*)

Контакты: *Бердников Александр Сергеевич*, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию: 28.07.2016

UNIVERSAL EXPRESSIONS FOR 3D ELECTRIC AND MAGNETIC POTENTIALS WHICH ARE UNIFORM IN EULER TERMS

A. S. Berdnikov[1], I. A. Averin[1,2], N. K. Krasnova[2], K. V. Solovyev[2]

[1]*Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia*
[2]*Peter The Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Russia*

Electric and magnetic fields which are uniform in Euler terms are a useful instrument to design the systems of charge particle optics. The similarity principle for charged particle trajectories in these fields which was realized by Yu.K. Golikov for the first time enables to create spectrographic charge particle optical systems in a more systematic and intelligence way by using the fields which are uniform in Euler terms. As a result the analytical expressions for the Laplace potentials which are uniform in Euler terms are a useful tool to design optical systems of this type. This paper considers general expressions of an algebraic-differential type which produces 3D harmonic functions which are uniform in Euler' terms and can be used as potentials of corresponding electric and magnetic fields.

Keywords: electric fields, magnetic fields, uniform in Euler' terms functions, similarity principle for charged particle trajectories, analytical solutions of Laplace equation

REFERENCES

1. Fihtengolc G.M. *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus], vol. 1. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 616 p. (In Russ.).
2. Smirnov V.I. *Kurs vysshej matematiki* [Course of the higher mathematics], vol. 1. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russ.).
3. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [The electric fields uniform in Euler, for electronic spectrography]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of technical physics], 2011, vol. 81, no. 2, pp. 9–15. (In Russ.).
4. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. *Teoriya sinteza ehlektrostaticheskih ehnergoanalizatorov* [Theory of synthesis of electrostatic power analyzers]. Saint-Petersburg, Polytechnical university Publ., 2010. 409 p. (In Russ.).
5. Krasnova N.K. *Teoriya i sintez dispergiruyushchih i fokusiruyushchih ehlektronno-opticheskih sred*. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [The theory and synthesis of the dispersing and focusing electron-optical environments. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Saint-Petersburg, 2013. 259 p. (In Russ.).
6. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [The generalized principle of similarity and its application in electronic spectrography]. *Prikladnaya fizika* [Applied physics], 2007, no. 2, pp. 5–11. (In Russ.).
7. Golikov Yu.K., Krasnova N.K. [Analytical structures of electric spectrographs the fields of which are expressed in a uniform generalized form]. Nauchnoe Priborostroenie [Scientific Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 1, pp. 50–58. URL: http://213.170.69.26/mag/2014/full1/Art6.pdf. (In Russ.).
8. Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R. [The principle of similarity of trajectories at the movement of charged particles with a different masses in electric and magnetic fields, uniform in Euler]. *Pis'ma v ZhTF* [Letters in ZhTF], 2016, vol. 42, no. 23–24. (In Russ.).
9. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. I]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2015, vol. 12, no. 4, pp. 272–281. (In Russ.).
10. Krasnova N.K. [Two-dimensional sedate electronic spectrographs with the symmetry plane]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of technical physics], 2011, vol. 81, no. 6, pp. 97–103. (In Russ.).
11. Averin I.A. [The axisymmetric electrostatic electronic spectrographs using potentials, uniform in Euler, with nonintegral orders of uniformity]. *Tez. dokl. S'ezda VMSO i VIII Vserossijskoj konferencii* [Theses reports Congress of VMSO and VIII All-Russian conference]. 02–17 october 2015, Moscow, VMSO "Trovant" Publ. 132 p. (In Russ.).

12. Averin I.A. [Electrostatic and magnetostatic electron spectrographs based on Euler' homogeneous potentials with non-integer orders]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 3, pp. 35–44. Doi: 10.18358/np-25-3-i3544 .
13. Averin I.A., Berdnikov A.S. [Regional fields the bessetochnykh of electronic spectrographs with electrostatic fields, uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 5–8. (In Russ.).
14. Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K. [The static mass spectrographs of new type using the electric and magnetic fields uniform in Euler. II]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 11–20. (In Russ.).
15. Berdnikov A.S., Averin I.A. [New approach to development of ion-optical schemes of static mass spectrographs on the basis of the non-uniform magnetic fields uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 1, pp. 89–95. (In Russ.).
16. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [Application of a formula of Donkin in the theory of power-analyzers. I]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of technical physics], 2000, vol. 70, no. 2, pp. 91–94. (In Russ.).
17. Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N. [Application of a formula of Donkin in the theory of power-analyzers. II]. *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* [Journal of technical physics], 2000, vol. 70, no. 3, pp. 44–47. (In Russ.).
18. Berdnikov A.S., Averin I.A. [About impossibility of double focusing in the combined electric and magnetic fields uniform in Euler]. *Mass-spektrometriya* [Mass-spectrometry], 2016, vol. 13, no. 1, pp. 62–65. (In Russ.).
19. Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuhin V.V. *Raschet elementov elektrostaticheskich elektronno-opticheskich system. Uchebnoe posobie* [Calculation of elements of electrostatic electron-optical systems. Education book]. Leningrad, LPI Publ., 1984. 79 p. (In Russ.).
20. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Theorem of uniformity of scalar and vector potentials for the electric and magnetic fields uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 6. (In Russ.).
21. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2 (44), pp. 147–165. (In Russ.).
22. Berdnikov A.S., Krasnova N.K. [Sufficient criteria for stability and narrowness of the band-shaped ion beams in 3D electric and magnetic fields with plane of symmetry]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 2, pp. 69–90. Doi: 10.18358/np-25-2-i6990. (In Russ.).
23. Uitteker E.T., Vatson G. *Kurs sovremennogo analiza. Ch. 2: Transcendentnye funkcii* [Course of the modern analysis. Part 2: Transcendental functions]. Moscow, GIFML Publ., 1963. 516 p. (In Russ.).
24. Gobson E.V. *Teoriya sfericheskih i ehllipsoidal'nyh funkcij* [Theory of spherical and ellipsoidal functions]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1952. 476 p. (In Russ.).
25. Golikov Yu.K. [The solution of a task of Cauchy for uniform harmonious potentials of zero frequency rate]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2(44), pp. 59–62. (In Russ.).
26. Golikov Yu.K. [Analytical ways of the description of harmonious functions]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2 (44), pp. 165–181. (In Russ.).
27. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [The elementary analytical electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Aktyubinsk regional state university of K. Zhubanov. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 2 (44), pp. 17–32. (In Russ.).
28. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Quasi-polynomial three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and technical sheets СПбГПУ. Physical and mathematical sciences], 2016, no. 4. (In Russ.).
29. Hoks P., Kasper E. *Osnovy ehlektronnoj optiki* [Fundamentals of electronic optics], vol. 1. Moscow, Mir Publ., 1993. 552 p. (In Russ.).
30. Donkin W.F. On the Equation of Laplace‘s Functions &c. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1857, vol. 147, pp. 43–57. Doi: 10.1098/rstl.1857.0005.
31. Donkin W.F. On the Equation of Laplace‘s Functions &c. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1856-1857, vol. 8, pp. 307–310. Doi: 10.1098/rspl.1856.0075.
32. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 716 p. (In Russ.).
33. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskih funkcij* [Theory of analytical functions], vol. 1, 2. Moscow, Nauka Publ., 1968. 486 and 624 p. (In Russ.).
34. Evgrafov M.A. *Analiticheskie funkcii* [Analytical functions]. Third edition processed and added. Moscow, Nauka Publ., 1991. 448 p. (In Russ.).
35. Gurvic A., Kurant P. *Teoriya funkcij* [Function theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 646 p. (In Russ.).
36. Gyunter N.M. *Integrirovanie uravnenij v chastnyh proizvodnyh pervogo poryadka* [Integration of the equations in private derivatives of the first order]. Leningrad-Moscow,

ONTI Publ., 1934. (In Russ.).
37. Trikomi F. *Lekcii po uravneniyam v chastnyh proizvodnyh* [Lectures on the equations in private derivatives]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1957. 443 p. (In Russ.).
38. Rashevskij P.K. *Geometricheskaya teoriya uravnenij s chastnymi proizvodnymi* [The geometrical theory of the equations with private derivatives]. Leningrad-Moscow, OGIZ Publ., 1947. 362 c. (In Russ.).
39. Finikov S.P. *Metod vneshnih form Kartana v differencial'noj geometrii* [Method of external forms of Cartan in differential geometry]. Leningrad-Moscow, OGIZ Publ., 1948. 432 c. (In Russ.).
40. Thomson W. Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1847, vol. XII, pp. 256–264.
41. Thomson W. (Lord Kelvin), Teht P.G. *Traktat po natural'noj filosofii* [The treatise on natural philosophy], part. II. Moscow-Izhevsk, NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika" Publ., 2011. 560 p. (In Russ.).
42. Sretenskij L.N. *Teoriya n'yutonovskogo potenciala* [Theory of the Newtonian potential]. Leningrad-Moscow, OGIZ-GITTL Publ., 1946. 318 p. (In Russ.).
43. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (In Russ.).
44. Smirnov V.I. *Kurs vysshej matematiki* [Course of the higher mathematics], vol. 4, part 2. Moscow, Nauka Publ., 1981. 297 p. (In Russ.).
45. Thomson W. (Lord Kelvin), Teht P.G. *Traktat po natural'noj filosofii* [The treatise on natural philosophy], part I. Moscow-Izhevsk, NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika" Publ., 2010. 572 p. (In Russ.).
46. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Integrated formulas for the three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler with nonintegral orders of uniformity]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2016, vol. 26, no. 4. pp. 31–42. URL: http://213.170.69.26/mag/2016/full4/Art3.pdf. (In Russ.).
47. Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V. [Research of the theorem of differentiation and integration of the three-dimensional electric and magnetic potentials uniform in Euler]. *Uspekhi prikladnoj fiziki* [Achievements of applied physics], 2016, vol. 4, no. 6. (In Russ.).

Contacts: *Berdnikov Alexander Sergeevich,*
asberd@yandex.ru

Article received in edition: 28.07.2016