МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 532.546+534-18

© Н. Н. Князьков, Б. П. Шарфарец

АКУСТИКА ПОРИСТО-УПРУГИХ НАСЫЩЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ СРЕД (ОБЗОР ТЕОРИИ БИО)

В обзоре приведены основные элементы теории Био для акустики пористых насыщенных жидкостью сред. Теория справедлива и для собственно пористых, и для зернистых структур. Приведены связанные уравнения движения в частотно-пространственной области, позволяющие вычислять различные поля, описывающие динамику гармонических задач акустики пористых сред. Приведены все данные, позволяющие ставить и решать соответствующие краевые задачи. Проведен достаточно информативный библиографический обзор, позволяющий при необходимости самостоятельно добавить не освещенные в статье элементы теории Био. Изложенная теория позволяет решать в том числе разнообразные задачи научного приборостроения.

Кл. сл.: насыщенные пористые среды, насыщенные зернистые среды, теория Био, связанные уравнения, частотно-пространственное представление

ВВЕДЕНИЕ

История механики насыщенных жидкостью пористых сред насчитывает уже более полутора сотен лет, отсчитывая свое появление с открытия экспериментального закона фильтрации жидкости в пористой среде — закона А. Дарси (Darcy H.) в 1856 г. [1]. Далее большой вклад в эту проблематику внесли P. Fillunger [2] и K. Terzaghi [3], которые считаются основоположниками первых теорий пористых сред. Отцом современной механики пористых сред является М. Био (Biot M.A.), который в своих многочисленных работах (см. [4] с обзором основных публикаций Био на данную тематику), обобщая работы Terzaghi на случай трехмерных задач, развил в 40–80-х гг. XX в. теорию пористых сред, насыщенных вязкой жидкостью, практически до ее современного состояния. Согласно введению в [4], теория Био является в XX в. одним из крупных вкладов в развитие механики сплошных сред, состоящим в обобщении классической теории упругости на область пористых, насыщенных жидкостью сред.

Как сказано в подробном библиографическом обзоре по рассматриваемой тематике [5], "в своих исследованиях Био развил принцип соответствия, согласно которому уравнения, описывающие механику пористых сред, будут формально такими же, как и для упругих или вязкоупругих систем, при условии, что упругие коэффициенты заменены соответствующими операторами".

Далее будем ссылаться лишь на основные работы Био, посвященные распространению колебаний и волн в пористых средах [6–10] (отметим, что имеется перевод на русский язык работ [8–10] — это соответственно работы [11–13]).

Важным разделом механики пористых сред являются задачи акустики пористых насыщенных жидкостью сред, связанные с распространением в них акустических волн. Впервые задачу, связанную с акустикой пористых сред, рассмотрел Я.И. Френкель [14]. В своих первых работах [6, 7] по акустике пористых сред Био описал общую теорию пористых сред, где предполагалось, что среда однородна и изотропна. В дальнейшем эта теория была развита на случаи анизотропного упругого [8] и вязкоупругого скелета [10].

После Био описываемая тематика была развита в многочисленных публикациях, в том числе и в монографиях [15–17], в которых, в частности, содержатся ссылки на библиографические обзоры, посвященные обсуждаемой проблеме.

В теоретических и прикладных задачах научного приборостроения часто приходится иметь дело как с обычными задачами механики пористых насыщенных жидкостью сред (например, случай зонного электрофореза, когда пористая среда (гель) насыщена буферной жидкостью), так и с задачами акустики пористых сред, когда процессы измерений происходят в зернистой среде в условиях наложения звукового поля. Это обстоятельство делает крайне актуальным учет закономерностей теории пористых насыщенных сред в соответствующих задачах теории и практики научного приборостроения.

Наконец, следует отметить, что теория пористых сред не различает случаи собственно пористых сред, когда среда представляет собой единый упругий пористый скелет, насыщенный жидкостью, и зернистых сред, когда в жидкости взвешены отдельные не связанные между собой упругие зерна или частицы (см., например, [6]). Объясняется это особенностями построения математических моделей пористых сред, годных для макроскопического описания существующих в них полей. Макроскопические поля получаются из микроскопических полей (т. е. привязанных к конкретной точке пространства) осреднением последних по некоторому репрезентативному элементарному объему (REV, representative elementary volume). После чего макроскопические поля в пористых средах могут быть описаны в рамках теории сплошных сред. Далее приводятся соображения, исходя из которых выбираются размеры REV. Техника осреднения при переходе от микроскопических к макроскопическим полям приведена, например, в [18].

ЦЕЛЬ ПРЕДПРИНЯТОГО ОБЗОРА ТЕОРИИ

Как правило, в оригинальных работах, монографиях и обзорах по механике пористых сред уравнения макроскопического движения представляются в виде связанной системы уравнений в пространственно-временнóй области. В настоящем обзоре предпочтение будет отдано обзору теории акустики пористых сред в пространственно-частотной области. При этом уравнения движения будут воспроизведены в терминах различных искомых полей. Будут освещены вопросы, связанные с корректной постановкой краевых задач механики пористых сред. Элементы теории стационарных во времени процессов (т. е. не связанных с акустикой) в пористых средах можно прочесть, например, в работах [18, 19].

ИСХОДНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Теория Био основана на следующих исходных допущениях и предположениях [16, с. 220].

1. Амплитуда смещений, деформаций и скоростей частиц мала, уравнения движения линейны и формализмы в описании полей Эйлера и Лагранжа в первом порядке совпадают.
2. Вследствие макроскопического подхода к рассмотрению соответствующих полей к ним могут быть применены методы механики сплошных сред.
3. Длина волны звуковых колебаний λ должна удовлетворять следующему неравенству:

$$d \ll l \ll \lambda ,$$

где d — средний размер пор (зерен); l — линейный размер REV, по которому производится усреднение соответствующих величин.

4. Температурное поле принимается стационарным.
5. Жидкая фаза непрерывна; скелет (матрица) состоит из твердой фазы и незаполненных жидкой фазой пор, которые не учитываются при определении пористости среды.
6. В большинстве случаев материал скелета является изотропным. Анизотропия возникает в случае принудительного вытягивания пор (или трещин).

Таким образом, векторы смещений и тензоры деформации скелета и жидкости являются макроскопически усредненными и корректно определенными в репрезентативном элементарном объеме REV.

Далее величины, относящиеся к скелету, помечаются верхним индексом s, а к жидкой фазе — f. Тогда вектора смещения будут иметь обозначения $\mathbf{u}^s$ и $\mathbf{u}^f$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ "$\mathbf{u}^s$—$\mathbf{u}^f$"

Вначале изложим версию теории Био [6, 7], представленную в [17, гл. 6] для случая изотропной пористой среды. Неизвестными связанными полями выступают смещения $\mathbf{u}^s$ и $\mathbf{u}^f$.

Тензоры напряжений, зависящие от смещений, для скелета σ_{ij}^s и жидкости σ_{ij}^f представляются в следующем виде:

$$\sigma_{ij}^s = \left[\left(P - 2N \right) \theta^s + Q\theta^f \right] \delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij} , \qquad (1)$$

$$\sigma_{ij}^f = -\phi p \delta_{ij} = \left(Q\theta^s + R\theta^f \right) \delta_{ij} , \qquad (2)$$

где P, Q, R и N — константы; ϕ — пористость среды, равная отношению объема сообщающихся между собой пор V_f к общему объему V

$$\phi = \frac{V^f}{V} ;$$

$\theta^{s(f)} = \nabla \cdot \mathbf{u}^{s(f)}$; p — давление в жидкости; δ_{ij} — единичный тензор (дельта-символ Кронекера).

Константы равны [17, с. 114]:

$$N = G = \mu ;$$

$$P = \frac{(1-\phi)\left(1 - \phi - \dfrac{K_b}{K^s}\right) K^s + \phi \dfrac{K^s}{K^f} K_b}{1 - \phi - K_b / K^s + \phi K^s / K^f} + \frac{4}{3} N ,$$

$$Q = \frac{\left(1-\phi - K_b / K^s\right)\phi K^s}{1-\phi - K_b / K^s + \phi K^s / K^f},$$

$$R = \frac{\phi^2 K^s}{1-\phi - K_b / K^s + \phi K^s / K^f}.$$

Здесь K_b — модуль объемной упругости (bulk modulus) пористой среды в целом при дренажных условиях, т. е. когда поддерживается постоянное давление в поровой жидкости; K^s — модуль объемной упругости упругого скелета; K^f — модуль объемной упругости жидкости; G — модуль сдвига, совпадающий со вторым параметром Ламе μ теории упругости.

Уравнения движения в пористой среде, насыщенной жидкостью, представляют собой систему двух связанных уравнений. Выпишем ее представление в частотной области в терминах смещений пористой среды [17, с. 120]:

$$-\omega^2\left(\tilde{\rho}_{11}\mathbf{u}^s + \tilde{\rho}_{12}\mathbf{u}^f\right) = \\ = \left(P-N\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^s + N\Delta\mathbf{u}^s + Q\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^f, \quad (3)$$

$$-\omega^2\left(\tilde{\rho}_{12}\mathbf{u}^s + \tilde{\rho}_{22}\mathbf{u}^f\right) = Q\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^s + R\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^f, \quad (4)$$

где

$$\tilde{\rho}_{11} = \rho_1 + \rho_a - \mathrm{i}\sigma\phi^2\frac{G(\omega)}{\omega},$$

$$\tilde{\rho}_{12} = -\rho_a + \mathrm{i}\sigma\phi^2\frac{G(\omega)}{\omega},$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \phi\rho_0 + \rho_a - \mathrm{i}\sigma\phi^2\frac{G(\omega)}{\omega}.$$

Здесь приняты следующие обозначения [17]: ρ_0 — плотность жидкости; ρ_1 — плотность скелета; ρ_a — эффективная плотность жидкости

$$\rho_a = \phi\rho_0 \times \begin{cases} \left(\alpha_\infty - 1\right) & \text{при } \omega \to 0, \\ \left(\alpha^f(\omega) - 1\right) & \text{при } \omega > 0; \end{cases}$$

$\alpha^f(\omega)$ — частотная зависимость извилистости, которая, согласно [17, с. 119], равна

$$\alpha^f(\omega) = \alpha_\infty + \frac{\nu\phi}{\mathrm{i}\omega q_0}G(\omega);$$

$\alpha_\infty = \lim\limits_{\omega\to 0}\alpha_f(\omega)$ — предельная низкочастотная извилистость. Согласно [15, с. 163], извилистость $\alpha_\infty \ge 1$ (называемая также структурным фактором) определяется выражением

$$\alpha_\infty = 1 - r\left(1 - \frac{1}{\phi}\right),$$

где r — параметр, равный $1/2$ для каркаса, состоящего из сфер, и лежащий в интервале $0 \le r \le 1$ для различных эллипсоидов. Для однородных цилиндрических пор с осями, параллельными направлению градиента давления, $\alpha_\infty = 1$, в то время как при случайной ориентации пор $\alpha_\infty = 3$. Параметр σ — сопротивление потоку (flow resistivity, см. в [17] выражения и значения для различного характера пористости); ν — отношение Пуассона (см. Приложение); $G(\omega)$ — весовой частотнозависимый множитель [17, с. 90]

$$G(\omega) = \left[1 + \left(\frac{2\alpha_\infty q_0}{\phi\Lambda}\right)^2 \frac{\mathrm{i}\omega}{\nu}\right]^{1/2};$$

Λ — характерный размер, заменяющий понятие гидравлического радиуса для общего вида пористости, определяется выражением [17, с. 80]

$$\Lambda = \left(\frac{8\eta\alpha_\infty}{\sigma\phi}\right)^{1/2}\frac{1}{c};$$

η — динамическая вязкость жидкости; c — константа, близкая к единице; q_0 — предельная низкочастотная проницаемость при $\omega \to 0$ (частотную зависимость проницаемости $q(\omega)$ см. в [17, с. 74]).

ТРИ ВОЛНЫ БИО В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

После стандартного представления полей через скалярные и векторные потенциалы

$$\mathbf{u}^s = \nabla\varphi^s + \nabla\times\boldsymbol{\psi}^s, \qquad \mathbf{u}^f = \nabla\varphi^f + \nabla\times\boldsymbol{\psi}^f$$

можно разделить движение в пористой среде на продольные волны (волны сжатия) и поперечные волны (сдвиговые волны). В результате система (3), (4) распадается на две — соответственно для скалярных и векторных потенциалов [17, с. 120–122]:

$$-\omega^2\left(\tilde{\rho}_{11}\varphi^s + \tilde{\rho}_{12}\varphi^f\right) = P\Delta\varphi^s + Q\Delta\varphi^f, \quad (5)$$

$$-\omega^2\left(\tilde{\rho}_{12}\varphi^s + \tilde{\rho}_{22}\varphi^f\right) = Q\Delta\varphi^s + R\Delta\varphi^f, \quad (6)$$

$$-\omega^2\left(\tilde{\rho}_{11}\boldsymbol{\psi}^s + \tilde{\rho}_{12}\boldsymbol{\psi}^f\right) = N\Delta\boldsymbol{\psi}^s, \quad (7)$$

$$-\omega^2\left(\tilde{\rho}_{12}\boldsymbol{\psi}^s + \tilde{\rho}_{22}\boldsymbol{\psi}^f\right) = 0. \quad (8)$$

Система (5), (6) в матричном виде записывается так:

$$-\omega^2\left[M\right]^{-1}\left[\rho\right]\left[\varphi\right]=\Delta\left[\varphi\right],$$

где

$$\left[M\right]=\begin{bmatrix}P & Q\\ Q & R\end{bmatrix};\quad \left[\rho\right]=\begin{bmatrix}\tilde{\rho}_{11} & \tilde{\rho}_{12}\\ \tilde{\rho}_{12} & \tilde{\rho}_{22}\end{bmatrix};\quad \left[\varphi\right]=\begin{bmatrix}\varphi^s\\ \varphi^f\end{bmatrix}.$$

Как видно, элементы матрицы $\left[M\right]^{-1}$ и $\left[\rho\right]$, а следовательно, и элементы квадратной 2×2 матрицы $\omega^2\left[M\right]^{-1}\left[\rho\right]$ являются постоянными, в общем случае комплексными числами. Следовательно, собственные числа и векторы этой матрицы также являются постоянными. Пусть собственные значения матрицы $\omega^2\left[M\right]^{-1}\left[\rho\right]$ равны соответственно δ_1^2 и δ_2^2. Тогда система (5), (6) диагонализируется и записывается в виде [17, с. 121]

$$-\delta_1^2\left[\varphi_1\right]=\Delta\left[\varphi_1\right],$$
$$-\delta_2^2\left[\varphi_2\right]=\Delta\left[\varphi_2\right].$$

В результате получены решения для двух волн сжатия:

$$\left[\varphi_1\right]=\begin{bmatrix}\varphi_1^s\\ \varphi_1^f\end{bmatrix},\qquad \left[\varphi_2\right]=\begin{bmatrix}\varphi_2^s\\ \varphi_2^f\end{bmatrix},$$

где квадраты волновых чисел δ_1^2, δ_2^2 волн сжатия и константа D равны

$$\delta_1^2=\frac{\omega^2}{2\left(PR-Q^2\right)}\left[P\tilde{\rho}_{22}+R\tilde{\rho}_{11}-2Q\tilde{\rho}_{12}-\sqrt{D}\right],$$

$$\delta_2^2=\frac{\omega^2}{2\left(PR-Q^2\right)}\left[P\tilde{\rho}_{22}+R\tilde{\rho}_{11}-2Q\tilde{\rho}_{12}+\sqrt{D}\right],$$

$$D=\left[P\tilde{\rho}_{22}+R\tilde{\rho}_{11}-2Q\tilde{\rho}_{12}\right]^2-$$
$$-4\left(PR-Q^2\right)\left(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22}-\tilde{\rho}_{12}^2\right).$$

Там же [17, с. 121] получены отношения φ_i^f/φ_i^s, $i=1,2$, амплитуд волн в жидкости и скелете для обеих волн сжатия.

Отметим, что формализм изложения волн сжатия в [17] отличается от оригинального [6] и от изложения в обзоре [5]. Впервые на наличие двух волн сжатия было обращено внимание в работе [14].

Далее получено выражение для единственной сдвиговой волны в скелете

$$\Delta\boldsymbol{\psi}^s+\frac{\omega^2}{N}\left(\frac{\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22}-\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}\right)\boldsymbol{\psi}^s=0$$

с квадратом волнового числа δ_3^2 сдвиговой волны

$$\delta_3^2=\frac{\omega^2}{N}\left(\frac{\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22}-\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}\right).$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ "$\mathbf{u}^s$—$\mathbf{w}$"

При изложении этой тематики ориентируемся на работы Био [9, 10], обзор [5] и конспективно написанный раздел "Appendix 6.A :The Biot second representation" из работы [17, с. 131]. Принимаются следующие обозначения: $\mathbf{w}$ — смещение жидкости относительно скелета [9, 10]

$$\mathbf{w}=\phi\left(\mathbf{u}^f-\mathbf{u}^s\right),$$

$$\varsigma=-\nabla\cdot\mathbf{w}=-\phi\nabla\cdot\left(\mathbf{u}^f-\mathbf{u}^s\right)=\phi\left(\theta^s-\theta^f\right),$$

$$\theta^s=\nabla\cdot\mathbf{u}^s,\ \theta^f=\nabla\cdot\mathbf{u}^f.$$

Уравнения состояния в работах Био [9, 10] принимаются в следующем виде:

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\delta_{ij}\left(\lambda_c\theta^s-\alpha M\zeta\right),$$
$$p_f=-\alpha M\theta^s+M\zeta.$$

Здесь σ_{ij} — суммарный тензор напряжения, приложенный к пористо-упругой среде в целом; ε_{ij} — тензор деформации скелета. Константы будут выписаны позже.

Запишем уравнения движения, полученные в [9] для случая однородной изотропной среды в терминах $\mathbf{u}^s$, $\mathbf{w}$:

$$\mu\Delta\mathbf{u}^s+\left(\mu+\lambda_c\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^s-\alpha M\nabla\varsigma=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho\mathbf{u}^s+\rho^f\mathbf{w}\right),$$

$$\alpha M\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^s-M\nabla\varsigma=\rho^f\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u}^s+\tilde{Y}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}.$$

Или с учетом равенства $\varsigma=-\nabla\cdot\mathbf{w}$ переписываем последнюю систему

$$\mu\Delta\mathbf{u}^s+\left(\mu+\lambda_c\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^s+\alpha M\nabla\nabla\cdot\mathbf{w}=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho\mathbf{u}^s+\rho^f\mathbf{w}\right),$$

$$\alpha M\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^s+M\nabla\nabla\cdot\mathbf{w}=\rho^f\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u}^s+\tilde{Y}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}.$$

Здесь $\tilde{Y}$ — введенный Био в [9] вязкодинамический оператор, являющийся функцией оператора дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t}$ во временно́й области и круговой частоты ω — в частотной; $\rho = (1-\phi)\rho^s + \phi\rho^f$ — масса единицы объема пористого пространства (см. [6, выражение (3.8)]).

Пользуясь работами [6–10], достаточно неоднозначными в обозначениях, а также обзором [5] с корректными обозначениями, выпишем выражения для введенных в последней системе уравнений постоянных λ_c, α, M:

$$M = \frac{\left(K^s\right)^2}{d - K_b}; \quad \alpha = 1 - \frac{K_b}{K^s}; \qquad \lambda_c = H - 2\mu,$$

где $d = K^s\left[1 + m\left(\frac{K^s}{K^f} - 1\right)\right]$; $H = \frac{\left(K^s - K_b\right)^2}{d - K_b} +$ $+K_b + \frac{4}{3}\mu$; $m = \rho^f \alpha^f$ (в работе [9] указано, что извилистость α^f варьирует в пределах $\alpha^f \in [1, \infty)$); α — коэффициент эффективных напряжений.

Переходя в последней системе уравнений движения в частотную область и полагая все функции гармоническими с фактором $e^{\mathrm{i}\omega t}$, получаем систему (где все величины представлены амплитудами колебаний):

$$\begin{aligned}&\mu\Delta\mathbf{u}^s + \left(\mu + \lambda_c\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^s + \alpha M\nabla\nabla\cdot\mathbf{w} = \\ &\quad = -\omega^2\left(\rho\mathbf{u}^s + \rho^f\mathbf{w}\right), \\ &\alpha M\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^s + M\nabla\nabla\cdot\mathbf{w} = -\omega^2\rho^f\mathbf{u}^s + \mathrm{i}\omega\tilde{Y}(\omega)\mathbf{w}.\end{aligned}$$

Выражения вязкодинамического оператора $\tilde{Y}$ в низкочастотной и высокочастотной областях приведены в [9]. Так, в низкочастотной области

$$\tilde{Y}(\omega) = \frac{\eta}{q_0} + m\omega.$$

В высокочастотной области функция $\tilde{Y}(\omega)$ выглядит так:

$$\tilde{Y}(\omega) = \frac{\overline{\eta}}{q_0} + m\omega.$$

Здесь $\overline{\eta}$ — зависимость динамической вязкости от частоты [9]: $\overline{\eta} = \eta\cdot\mathrm{F}\left(\beta\frac{\omega}{\omega_c}\right)$, $\omega_c = \eta/\left(q_0\rho^f\right)$ — некоторая критическая частота.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЭЗЕЛЯ (DAZEL REPRESENTATION)

В этой модели [20] рассматривается упрощенный случай, когда материал матрицы является несжимаемым. Метод кратко изложен в [17, с. 131, 132]

СМЕШАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ "$\mathbf{u}^s$—p"

В этом случае вместо "$\mathbf{u}^s$—$\mathbf{u}^f$"-представления используется "$\mathbf{u}^s$—p"-представление связанной системы уравнений движения. Метод кратко изложен в [17, с. 132–134]. Предполагается однородность порового пространства.

Система (3), (4) с учетом (1), (2) переписывается в виде

$$\begin{aligned}&\omega^2\tilde{\rho}_{11}\mathbf{u}^s + \omega^2\tilde{\rho}_{12}\mathbf{u}^f + \nabla\cdot\sigma^s = 0, \\ &\omega^2\tilde{\rho}_{22}\mathbf{u}^f + \omega^2\tilde{\rho}_{12}\mathbf{u}^s - \phi\nabla p = 0.\end{aligned} \qquad (9)$$

Использование второго уравнения в (9) позволяет исключить $\mathbf{u}^f$ из этой системы:

$$\mathbf{u}^f = \frac{\phi}{\tilde{\rho}_{22}\omega^2}\nabla\cdot p - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}\mathbf{u}^s. \qquad (10)$$

Первое уравнение из (9) с учетом (10) переписывается в виде

$$\omega^2\tilde{\rho}\mathbf{u}^s + \phi\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}\nabla p + \nabla\cdot\sigma^s = 0, \qquad (11)$$

где $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{11} - \frac{\left(\tilde{\rho}_{12}\right)^2}{\tilde{\rho}_{22}}$ — эффективная плотность.

Для исключения имеющейся в $\sigma^s\left(\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^f\right)$ из (1) зависимости от смещения $\mathbf{u}^f$ из системы (1)—(2) получена эксклюзивная зависимость σ^s только от смещения $\mathbf{u}^s$:

$$\sigma^s_{ij}\left(\mathbf{u}^s\right) = \hat{\sigma}^s_{ij}\left(\mathbf{u}^s\right) - \phi\frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}p\delta_{ij}. \qquad (12)$$

Здесь $\hat{\sigma}^s_{ij}$ — тензор напряжений скелета в вакууме

$$\hat{\sigma}^s_{ij} = \delta_{ij}\left(K_b - \frac{2}{3}N\right)\theta^s + 2N\varepsilon^s_{ij};$$

тильда у $\tilde{Q}$ и $\tilde{R}$ подразумевает, что величины Q, R могут зависеть от частоты и затухания.

После ряда дальнейших преобразований получена следующая система связанных уравнений [17, с. 134]:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}^s \left(\mathbf{u}^s\right) + \tilde{\rho}\omega^2 \mathbf{u}^s + \hat{\gamma}\ \nabla p = 0,$$
$$\Delta p + \frac{\tilde{\rho}_{22}}{R}\omega^2 p + \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^2}\hat{\gamma}\omega^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0. \qquad (13)$$

Здесь $\hat{\gamma}$ определяется выражением

$$\hat{\gamma} = \phi\left(\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}}\right). \qquad (14)$$

Поля $\overset{s}{\sigma}_{ij}$ и $\overset{f}{\sigma}_{ij}$ определяются соответственно выражениями (1), (2).

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ ПОРИСТЫХ СРЕД

Постановка краевых условий при решении различных задач акустики пористых сред достаточно полно отражена в обзоре [5, с. 56–58].

ВЫВОДЫ

Таким образом, в обзоре приведены различные связанные уравнения в частотно-пространственной области, позволяющие в том числе и численно решать различные задачи акустики пористых сред.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Связь между тензорами напряжения и деформации через удельную потенциальную энергию деформации

Пусть $\mathbf{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right)$ — вектор смещений в упругой среде. При малых деформациях тензор деформации равен [22, с. 294] $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, $i, j = \overline{1,3}$. Как видно, тензор деформации симметричен $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Следуя [16], вводим обозначения:

$$e_I = e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \varepsilon_{ii}, \quad I = 1,2,3;$$
$$e_I = e_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 2\varepsilon_{ij}, \quad I = 4,5,6, \ i \neq j.$$

Величины $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_y$ и $\varepsilon_{33} = \varepsilon_z$ характеризуют относительные удлинения линейных элементов в направлении осей, величины $2\varepsilon_{ij}$ при $i \neq j$ характеризуют изменение прямого угла, образованного осями i и j (ось x соответствует индексу 1, ось y — 2 и ось z — 3). Вводятся еще две величины, а именно

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22},$$

характеризующая относительное изменение объема, и

$$s = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{22}.$$

Последние две величины являются инвариантами и не зависят от выбора осей координат.

Потенциальная энергия деформации V в единице объема упругой среды в наиболее общем виде определяется так [16]:

$$2\mathrm{V} = \sum_{I}^{6}\sum_{J \geq I}^{6} a_{IJ} e_I e_J.$$

Здесь a_{IJ} — коэффициенты, выражаемые через упругие постоянные среды. Если среда изотропная, то последнее выражение преобразуется к такому виду:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{V} = {} & c_{11}\left(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2\right) + \\ & + 2\left(c_{11} - 2c_{66}\right)\left(e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33}\right) + \\ & + c_{66}\left(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2\right) \end{aligned}$$

либо к такому:

$$2\mathrm{V} = \left(\lambda + 2\mu - \frac{4}{3}\mu\right)\theta^2 + 2\mu d^2,$$

где $c_{11} = \lambda + 2\mu$ и $c_{66} = \mu$; λ и μ — константы Ламе; $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$; d^2 — девиатор

$$d^2 = e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + \frac{1}{2}\left(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2\right) - \frac{\theta^2}{3}.$$

Величина V связывает тензоры деформации ε_{ij} и напряжения σ_{ij} следующим соотношением [16, с. 4]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial V}{\partial e_{ij}}.$$

Вычисление тензора напряжения в однородной изотропной среде дает следующий результат [17, с. 5]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu,$$

и окончательно уравнение движения записывается в виде [16, с. 4]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ — объемная сила (сила, приведенная к единице объема). В терминах вектора смещения уравнение движения имеет вид [17, с. 119; 23, с. 125]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}.$$

С постоянными Ламе λ и μ связаны другие известные упругие постоянные: модуль Юнга E, модуль сдвига G и отношение Пуассона ν:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Darcy H.* Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau. Paris: V. Dalmont, 1856. 647 p.
2. *Fillunger P.* Der Auftrieb von Talsperren, Teil I-III // Osterr. Wochenschrift fur den offentlicen Baudienst, 1913. (7) S. 10–532.
3. *Von Terzaghi K.* Die Berechnung der Durchlassischen Spannungserscheinungen // Sitzungsber. Akad. Wissensch. Math.-Naturwiss. Klasse. 1923. (132) S. 125–128.
4. *Tolstoy I.* Acoustics, elasticy, and thermodynamics of porous media: Twenty-one papers by M.A. Biot. New-York: AIP Press, 1992. 272 p.
5. *Городецкая Н.С.* Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью пористых средах // Акустичний виснік. 2007. Т. 10, № 2. С. 43–63.
6. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range //J. Acoust. Soc. Am. 1956. Vol. 28. P. 168–178. Doi: 10.1121/1.1908239.
7. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Am., 1956. Vol. 28. P. 179–191. Doi: 10.1121/1.1908241.
8. *Biot M.A.* Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // J. Appl. Phys. 1955. Vol. 26. P. 182–185. Doi: 10.1063/1.1721956.
9. *Biot M.A.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Am. 1962. Vol. 34. P. 1254–1264. Doi: 10.1121/1.1918315.
10. *Biot M.A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33. P. 1482–1498. Doi: 10.1063/1.1728759.
11. *Био М.А.* Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1957. Т. 1, № 35. С. 140–147.
12. *Био М.А.* Обобщенная теория распространения акустических волн в диссипативных пористых средах // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1963. Т. 6, № 82. С. 135–155.
13. *Био М.А.* Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1963. Т. 6, № 82. С. 103–134.
14. *Френкель Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1944. Т. 8, № 4. С. 133–149.
15. *Mavko G. et al*. The Rock Physics Handbook. 2nd ed., Cambridge University Press, 2009. 329 p. Doi: 10.1017/CBO9780511626753.
16. *Carcione J.M.* Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media. Pergamon-Elsevier (Handbook of Geophysical Exploration, vol. 31, Seismic Exploration), 2001.
17. *Allard J.F., Atalla N.* Propagation of Sound in Porous Media. 2nd ed. Wiley, 2009. Doi: 10.1002/9780470747339.
18. *Леонтьев Н.Е.* Основы теории фильтрации. М.: МГУ, 2009. 88 с.
19. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е.* К вопросу о подвижности частиц и молекул в пористых средах // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 4. С. 43–55. URL: http://213.170.69.26/mag/2015/full4/Art6.pdf
20. *Dazel O., Brouard B., Depollier C., Griffiths S.* An alternative Biot's displacement formulation for porous materials // J. Acoust. Soc. Am. 2007. Vol. 121. P. 3509–3516.
21. *Atalla N., Panneton R., Debergue P.* A mixed displacement pressure formulation for poroelastic materials // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 104. P. 1444–1452. Doi: 10.1121/1.424355.
22. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. IV, ч. 1. М.: Наука, 1974. 336 с.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию: 11.12.2015

ACOUSTICS OF POROUS-ELASTIC FLUID SATURATED MEDIUM
(AN OVERVIEW OF THE BIOT THEORY)

N. N. Knyaz'kov, B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, Russia

The overview provides the basic elements of the Biot theory for acoustics of porous fluid saturated media. The theory is valid and for actually porous and for granular structures. The coupled equations of motion in frequency-spatial domain are given, which allow to calculate the various fields describing the dynamics of the harmonic problems of acoustics of porous media. All the data, allowing to put and solve the corresponding boundary value problems are given. Held fairly comprehensive bibliographic review, which allows if necessary yourself to add not covered in the review elements of the Biot theory. The theory allows to solve, among them various problems of analytical instrumentation.

Keywords: saturated porous medium, saturated granular medium, Biot theory, coupled equations, frequency-spatial representation

REFERENCES

1. Darcy H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau*. Paris, V. Dalmont, 1856. 647 p.
2. Fillunger P. Der Auftrieb von Talsperren, Teil I-III. *Osterr*, Wochenschrift fur den offentlicen Baudienst, 1913. (7) S. 10–532.
3. Von Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlassischen Spannungserscheinungen. *Sitzungsber*, Akad. Wissensch. Math.-Naturwiss. Klasse, 1923, (132) S. 125–128.
4. Tolstoy I. *Acoustics, elasticy, and thermodynamics of porous media: Twenty-one papers by M.A. Biot*. New-York, AIP Press, 1992. 272 p.
5. Gorodezkaya N.S. [Waves in the porous and elastic porous environments sated with liquid]. *Akustichniy visnik* [Acoustic messenger], 2007, vol. 10, no. 2, pp. 43–63. (In Ukrain.).
6. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1956, vol. 28, pp. 168–178. Doi: 10.1121/1.1908239.
7. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1956, vol. 28, pp. 179–191. Doi: 10.1121/1.1908241.
8. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.*, 1955, vol. 26, pp. 182–185. Doi: 10.1063/1.1721956.
9. Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1962, vol. 34, pp. 1254–1264. Doi: 10.1121/1.1918315.
10. Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, pp. 1482–1498. Doi: 10.1063/1.1728759.
11. Biot M.A. [Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid]. *Mechanika. Period. sb. perevodov inostr. Statey*, 1957, vol. 1, no. 35, pp. 140–147. (In Russ.).
12. Biot M.A. [Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media]. *Mechanika. Period. sb. perevodov inostr. Statey*, 1963, vol. 6, no. 82, pp. 135–155. (In Russ.).
13. Biot M.A. [Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media]. *Mechanika. Period. sb. perevodov inostr. Statey*, 1963, vol. 6, no. 82, pp. 103–134. (In Russ.).
14. Frenkel' Ya.I. [To the theory of the seismic and seismoelectric phenomena in the damp soil]. *Izv. AN SSSR. Ser. geograf. i geofiz.* [News of Academy of Sciences of the USSR. Series geographer. and geophysical], 1944, vol. 8, no. 4, pp. 133–149. (In Russ.).
15. Mavko G. et al. *The Rock Physics Handbook.* 2nd ed., Cambridge University Press, 2009. 329 p. Doi: 10.1017/CBO9780511626753.
16. Carcione J.M. *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*. Pergamon-Elsevier (Handbook of Geophysical Exploration, vol. 31, Seismic Exploration), 2001.
17. Allard J.F., Atalla N. *Propagation of Sound in Porous Media*. 2nd ed. Wiley, 2009. Doi: 10.1002/9780470747339.
18. Leont'ev N.E. *Osnovy teorii fil'trazii* [Bases of the theory of a filtration]. Moscow, MGU Publ., 2009. 88 p.
19. Sharfarets B.P., Kurochkin V.E. [To the question of mobility of particles and molecules in porous media]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Science Instrumentation], 2015, vol. 25, no. 4, pp. 43–55. Doi: 10.18358/np-25-4-i4355 (In Russ.).
20. Dazel O., Brouard B., Depollier C., Griffiths S. An alternative Biot's displacement formulation for porous materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2007, vol. 121, pp. 3509–3516.
21. Atalla N., Panneton R., Debergue P. A mixed displacement pressure formulation for poroelastic materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1998, vol. 104, pp. 1444–1452. Doi: 10.1121/1.424355.
22. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki. T. IV, ch.* 1

[Course of the higher mathematics. Vol. 4, Part 1]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 336 p.
23. Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. VII, Teoriya uprugosti* [Theoretical physics. Vol. VII, Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 248 p.

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article received in edition: 11.12.2015

24.