

УДК 532.5.013+532.5.011+536.24+532.69

© Б. П. Шарфарез

ОБЗОР ТЕОРИИ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА И ПОВЕРХНОСТНЫХ ЯВЛЕНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ НАУЧНОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Обзор посвящен рассмотрению поверхностных явлений и явлений переноса, возникающих при течении жидкости. Поверхностные явления рассматриваются применительно к возникающему при искривлении границы раздела фаз поверхностному давлению, а также касательному напряжению, вызванному градиентом коэффициента поверхностного натяжения.

Основное внимание в обзоре уделено явлению переноса импульса при ламинарном течении жидкости и тесно с ним связанным явлениям тепло- и массопереноса. Все явления переноса рассматриваются с единых позиций теории подобия, что позволяет легко экстраполировать результаты для одного из них на другие. Большое внимание уделено критериям подобия, фигурирующим в этих процессах и позволяющим прозрачно наблюдать все их огромное многообразие. При этом широко используется формализм теории пограничного слоя, справедливый для всех указанных явлений переноса. В приложениях рассмотрены методы теории подобия применительно к рассматриваемым явлениям переноса, кратко описаны некоторые аспекты турбулентного течения. Изложенные материалы могут быть использованы в практике научного приборостроения.

Кл. сл.: капиллярное давление, явления переноса, перенос импульса, перенос энергии, перенос массы, пограничный слой, толщина пограничного слоя, явления переноса в круглых трубах, критерий подобия

ВВЕДЕНИЕ

В научном приборостроении, как правило, синтезируются достижения множества направлений фундаментальной и прикладной науки. Так, к примеру, при конструировании только одного научного прибора могут быть востребованы достижения гидродинамики, теории явлений тепло- и массопереноса, теории поверхностных явлений при течении жидкости в капиллярах, теории электрических явлений в жидкостях, акустика и т. д. При этом очень важно рассматривать все процессы в увязке друг с другом в силу их связанного протекания, приводящего к их взаимному влиянию. Например, при протекании электрического тока в жидкости повышается ее температура, что приводит к изменению свойств жидкости (например, вязкости). А это может в свою очередь изменить условия протекания электрического тока и т. д.

В настоящем обзоре рассмотрено два класса явлений. Основное внимание уделено явлениям переноса, в частности явлениям переноса импульса, тепло- и массопереноса. При параллельном протекании эти процессы физически взаимосвязаны, влияя друг на друга. Все они рассматриваются с единых позиций теории подобия, что позволяет легко экстраполировать результаты изучения од-

ного из них на другие. Большое внимание уделено критериям подобия, фигурирующим в описаниях этих процессов и позволяющим прозрачно наблюдать все их огромное многообразие. При этом широко используется формализм теории пограничного слоя, справедливый для всех указанных явлений переноса.

Второму классу — поверхностным явлениям уделено более скромное внимание. Однако эти явления крайне важны в теории научного приборостроения в силу широкого использования в нем капилляров.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА ФАЗ

Поверхностные явления на границе раздела фаз достаточно хорошо описаны в классических руководствах по теоретической физике (см., например, [1–4]). Ниже приведем ряд необходимых данных по этому вопросу, основываясь на этих работах.

Если поверхность раздела двух сред искривлена, то вблизи нее давления в обеих средах различны. Эта разность давления называется поверхностным давлением [1, с. 333] и определяется формулой Лапласа [1, с. 334]

$$p_1 - p_2 = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (1)$$

Здесь p_1 — давление у заданной точки поверхности раздела в первой среде, p_2 — во второй; R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны в данной точке поверхности.

Если считать, что R_1 и R_2 положительны, когда направлены внутрь первой среды, то из (1) видно, что из двух тел давление больше в той среде ($p_1 - p_2 > 0$), поверхность которой выпукла. Если $R_1 = R_2 = \infty$, т. е. поверхность раздела плоская, то давления на границе раздела в каждой из сред одинаковы.

Приведем граничные условия на границе раздела двух фаз [1, с. 337]. Вначале полагаем, что обе фазы жидкие.

Если поверхностное натяжение не учитывается, то на границе двух движущихся жидкостей имеет место условие [1, с. 337]

$$n_k (\sigma_{ik}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(1)}) = 0,$$

что выражает равенство сил трения, действующих на поверхности обеих жидкостей. Здесь $\sigma_{ik}^{(l)}$ — тензор напряжений среды l , $l = 1, 2$,

$$\sigma_{ik}^{(l)} = -p^{(l)} \delta_{ik} + \sigma'_{ik}{}^{(l)};$$

$\sigma'_{ik}{}^{(l)}$ — тензор вязких напряжений фазы l , равный [1, с. 72]

$$\sigma'_{ik}{}^{(l)} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Здесь η и ζ — коэффициенты динамической (сдвиговой) и объемной вязкости соответственно, в общем случае являющиеся функциями давления и температуры.

При учете поверхностного натяжения нужно в правой части добавить дополнительную силу, определяемую по величине формулой Лапласа (1) и направленную по нормали к поверхности раздела фаз $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ внутрь первой фазы

$$n_k (\sigma_{ik}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(1)}) = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i,$$

или иначе

$$(p_1 - p_2) n_i = (\sigma_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)}) n_k + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i. \quad (2)$$

Выше по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Если обе жидкости идеальные, то вязкие напряжения σ'_{ik} исчезают и (2) трансформируется к виду (1). Вязкие напряжения исчезают также в случае неподвижности обеих сопряженных вязких жидкостей, что следует из их математического определения (см. выше). В этом случае выражение (2) трансформируется к статичному выражению (1).

Если первая фаза жидкая, а вторая представляет собой упругую среду, то выражение (2), очевидно, трансформируется к виду

$$p_1 n_i = (\sigma_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)}) n_k + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_{ik}^{(2)}$ — тензор напряжений упругой среды.

Второе необходимое условие на границе раздела фаз с участием вязких жидкостей заключается в равенстве векторов скоростей граничных точек каждой фазы на поверхности раздела фаз. Если имеется граница раздела двух несмешивающихся жидкостей (или жидкости и газа), то скорости обеих жидкостей должны быть равны [1, с. 75]

$$\mathbf{v}_1|_S = \mathbf{v}_2|_S, \quad (4)$$

где S — поверхность раздела фаз. Аналогичное краевое условие для скорости ставится на границе между фазами, если одна из фаз — вязкая жидкость, а вторая — упругая среда. Наконец, если вязкая жидкость граничит с неподвижным твердым телом, то граничное условие для скорости жидкости на границе раздела фаз отражает т. н. условие прилипания жидкости к неподвижной твердой поверхности [1, с. 75]

$$\mathbf{v}_1|_S = 0. \quad (5)$$

Условия (2), (3) требуют уточнения в случае, если коэффициент поверхностного натяжения α является функцией координат, например в случае наличия переменного поля температуры, от которой величина коэффициента α существенно зависит. В этом случае выражение (2) трансформируется к виду [1, с. 338]

$$\left[p_1 - p_2 - \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_i = (\sigma_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)}) n_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}. \quad (2a)$$

Отметим, что это условие справедливо только для вязких жидкостей [1, с. 338]. В случае невязких жидкостей слева в (2a) будет стоять вектор, нормальный к поверхности раздела фаз, а справа — вектор, касательный к ней в силу равенства нулю

вязких тензоров напряжения. Аналогичный диссонанс с размерностью возникнет в случае покоящихся жидкостей (тензоры вязких напряжений также в этом случае тождественно равны нулю). Отсюда следует, что скорости фаз не могут быть нулевыми при наличии градиента коэффициента поверхностного натяжения. При ненулевом градиенте поверхностного натяжения фазы приходят в движение.

Аналогично выражение (3) для случая, когда одна из фаз упругая, приводится к виду

$$\left[p_i - \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_i = (\sigma_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)}) n_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}. \quad (3a)$$

Как видно из выражений (2а), (3а), наряду с нормальным давлением на поверхности жидкости могут действовать тангенциальные силы, вызванные градиентом коэффициента поверхностного натяжения. Тангенциальная сила, отнесенная к единице поверхности согласно [2, с. 378] равна (последний член справа в выражениях (2а) и (3а))

$$\mathbf{p}_t = \nabla \alpha.$$

Знак плюс перед градиентом означает, что сила \mathbf{p}_t стремится привести поверхность жидкости в движение в направлении от мест с меньшим поверхностным натяжением к местам с большим поверхностным натяжением. Вектор силы \mathbf{p}_t , как и градиент $\nabla \alpha$, в каждой точке поверхности лежит в касательной к ней плоскости. Поэтому в последнем выражении градиент следует рассматривать на поверхности жидкости S

$$\mathbf{p}_t = \nabla_S \alpha.$$

Причиной изменения поверхностного натяжения могут служить нанесение на поверхность жидкости поверхностно-активных веществ с переменной концентрацией, электрический заряд на поверхности жидкости и т. д. Однако простейшей причиной, вызывающей изменение поверхностного натяжения на поверхности жидкости, может служить изменение температуры жидкости.

Под действием тангенциальных сил, действующих на поверхность жидкости, в ней начнется движение, которое называют капиллярной конвекцией [2, с. 383]. На практике так происходит, когда жидкость помещена в сосуд, стенки которого имеют различную температуру. Тогда и температура самой жидкости будет переменной, и, в частности, будет меняться температура жидкости на границе раздела жидкости с сосудом. Переменная температура стенок сосуда вызовет в жидкости наряду с капиллярной конвекцией также и обычное конвективное движение. Однако в случаях, когда поверхность жидкости достаточно ве-

лика по отношению к ее объему, капиллярная конвекция доминирует над обычной объемной конвекцией [2, с. 383]. Такое становится возможным в тонких капиллярах при большом отношении поверхности объема к самому объему, т. е. при доминировании поверхностных сил над объемными силами. Поскольку температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения может быть существенна, то можно записать

$$\nabla_S \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial T} \nabla_S T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_t = \frac{\partial \alpha}{\partial T} \nabla_S T.$$

Полученное выражение для касательного напряжения, вызванного температурным градиентом коэффициента поверхностного натяжения, следует учитывать в выражениях для краевых условий (2а) и (3а), как, впрочем, следует учитывать и движение жидкости, вызванное капиллярной конвекцией.

В заключение, по-видимому, полезно привести вид оператора ∇_S , например в цилиндрических координатах. Как известно, оператор градиента ∇ в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) имеет вид

$$\nabla \psi(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial \psi(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \psi(\rho, \varphi, z)}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

Здесь $\psi(\rho, \varphi, z)$ — некоторая в данном случае скалярная функция; $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ — соответствующие единичные орты. Пусть рассматривается боковая поверхность цилиндра $\rho = r_0 = \text{const}$, где r_0 — радиус цилиндра. Тогда в силу неизменности ρ градиент на поверхности $\rho = r_0$ равен

$$\nabla_S \psi(r_0, \varphi, z) = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi(r_0, \varphi, z)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \psi(r_0, \varphi, z)}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

а в случае осевой симметрии

$$\nabla_S \psi(r_0, z) = \frac{\partial \psi(r_0, z)}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

Для произвольной системы координат, где оператор ∇_S рассматривается на координатной поверхности, действия аналогичны.

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности для течения сжимаемой жидкости записывается так [1, с. 15]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Здесь ρ — плотность жидкости (для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, т. е. плотность не зависит ни от времени, ни от координат).

Очень часто в гидродинамике принимается правдоподобное приближение о несжимаемости жидкости. Условия допустимости такого приближения хорошо известны: в случае, когда скорость жидкости $|\mathbf{v}| \ll c$ [1, с. 41–42], где c — скорость звука в жидкости, и вариации температуры достаточно малы относительно ее равновесного значения [1, с. 277], жидкость можно считать несжимаемой. В несжимаемой жидкости скорость движения \mathbf{v} удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\nabla \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

выражающему закон сохранения вещества.

Уравнение сохранения импульса (уравнение Навье—Стокса).

Состояние движущейся жидкости полностью характеризуется заданием в каждой точке пространства в каждый момент времени значения четырех величин — трех компонент скорости жидкости \mathbf{v} и давления p . Запишем уравнение Навье—Стокса для несжимаемой жидкости (принимается, что $\nu = \text{const}$ и не зависит от давления и температуры) [1, с. 73], [2, с. 11]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho}. \quad (7)$$

Здесь $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ — кинематическая вязкость; \mathbf{f} — объемная сила (сила, действующая на единицу объема), $\mathbf{f} = (X, Y, Z)$. В координатном виде в декартовой системе координат уравнение (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x + \frac{X}{\rho}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y + \frac{Y}{\rho}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + \frac{Z}{\rho}. \end{aligned} \quad (7a)$$

В цилиндрических координатах уравнение Навье—Стокса и непрерывности в нестационарном

случае приобретает вид [1, с. 76], [2, с. 70], [5, с. 361], [6, с. 395]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{(X^2 + Y^2)^{1/2} \cos \varphi}{\rho}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \quad (7b)$$

$$= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) + \frac{(X^2 + Y^2)^{1/2} \sin \varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + \frac{Z}{\rho},$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (8a)$$

где v_r , v_φ и v_z — радиальная, тангенциальная и аксиальная компоненты скорости; Δ — лапласиан в цилиндрической системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Уравнение энергии (теплопереноса)

Если температура жидкости не постоянна вдоль ее объема, то наряду с уравнением неразрывности (6) (закон сохранения массы) и уравнением Навье—Стокса (7) (закон сохранения импульса) используется также закон сохранения энергии, формальным выражением которого является уравнение теплопереноса. В сжимаемой вязкой жидкости это уравнение записывается в виде [1, с. 272]

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Здесь T — температура; s — энтропия единицы массы; σ'_{ik} — вязкий тензор напряжения; κ — коэффициент теплопроводности. Для приближения несжимаемой жидкости (условия такого приближения см. выше) последнее уравнение теплопереноса можно записать в виде [1, с. 277], [2, с. 16, 190]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (8)$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ — кинематическая вязкость;

$\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}$ — коэффициент температуропроводности.

В (8) принято допущение о том, что вследствие малого динамического диапазона разброса температур можно пренебречь температурным изменением величин η , κ и c_p . Второй член справа представляет собой с точностью до константы диссипативную функцию для случая несжимаемой жидкости. Диссипативная функция Φ для сжимаемой вязкой жидкости имеет вид [7, с. 326]

$$\begin{aligned} \Phi = \eta \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right\} + \\ + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая в формуле (9) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, получаем для диссипативной функции несжимаемой жидкости следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Phi = \eta \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right\} = \\ = \eta \frac{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Как видно, в (8) справа стоит величина $\Phi/\rho c_p$. В работе [2, с. 192] отмечается, что в большинстве случаев оказывается возможным пренебречь в уравнении (8) диссипативным членом. При этом дается качественное, не формализованное условие возможности пренебрежения вкладом диссипативной функции, заключающееся в необходимости:

- достаточно медленного движения жидкости;
- достаточной малости имеющейся в жидкости разности температур для того, чтобы ее физические свойства можно было считать не зависящими

от температуры, а с другой стороны, эти разности должны быть достаточно велики, чтобы по сравнению с ними можно было пренебречь изменениями температуры, вызванными внутренним трением.

Второе из приведенных условий дано также и в [1, с. 292]. Отметим, что второе условие о возможности пренебрежения диссипативным членом входит в некоторое противоречие с требованием о малости разности температур для справедливости приближения о несжимаемости жидкости, приведенным выше. Кроме того, из выражения (10) видно, что помимо прямой зависимости от коэффициента сдвиговой вязкости диссипативная функция зависит не от компонентов скорости жидкости, а от их пространственных производных первого порядка, которые могут быть значительными как при малых, так и при больших скоростях жидкости. Собственно говоря, сама теория пограничного слоя [1, гл. IV], [6, § 28, 29], [8] (см. ниже) предполагает наличие больших пространственных производных скорости жидкости в пограничных слоях при весьма умеренных скоростях ее движения вне этих слоев. Значения некоторых из фигурирующих в (10) производных компонент скорости движения жидкости по пространственным переменным может иметь порядок (см., например, [6, с. 546, 547]) $O(V/\delta_0)$, где δ_0 — толщина динамического пограничного слоя при переносе импульса (т. е. жидкости). Тогда порядок всего выражения (10) будет $O(\delta_0^{-2})$, что с учетом возможных малых значений δ может быть значительной величиной.

В контексте возможности пренебрежения диссипативной функцией сошлемся также на работы [9, с. 220], [10, с. 396], где указывается, что влиянием диссипативной функции обычно пренебрегают всегда, за исключением случая аэродинамики высоких скоростей, особенно сверхзвукового обтекания, когда она становится значимой внутри пограничных слоев в уравнении (8). Отметим, что приведенное условие и условие, указанное выше из [2, с. 192], не противоречат друг другу, т. к. случай сверхзвукового обтекания исключен в [2] требованием малости скорости течения жидкости.

Количественная оценка возможности пренебрежения диссипативной функцией, связанная с критерием подобия Эккерта, дана в [8, с. 266], которая, впрочем, формализует приведенные выше качественные оценки (см. ниже безразмерное выражение (17)).

Таким образом, с учетом сказанного выше, во многих случаях уравнение (8) можно переписать в более простом виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \quad (11)$$

или в координатном представлении в декартовой системе координат

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (11a)$$

а также в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \\ = \chi \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (11b)$$

Отметим далее, что уравнение (11) упрощается до уравнения теплопроводности в случае отсутствия конвективного переноса тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T.$$

И наконец, в стационарном случае последнее уравнение при наличии стационарного источника температуры сводится к уравнению Пуассона

$$\chi \Delta T = -f,$$

где f определяется так [11, с.26]:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{F(\mathbf{x})}{\rho_0 c_p},$$

а $F(\mathbf{x})$ — плотность тепловых источников, равная количеству поглощаемого или выделяемого тепла в единице объема за единицу времени; $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — текущие координаты рассматриваемого объема. Очевидно, что стационарное уравнение Пуассона с учетом соотношения между коэффициентами теплопроводности и температуропроводности можно переписать так:

$$\Delta T = -\frac{F(\mathbf{x})}{\kappa}. \quad (12)$$

Краевые условия при решении задач теплопереноса (8), (11), (12) приведены в [2, с. 192].

Уравнения конвективной диффузии (массопереноса)

Уравнение конвективной диффузии обычно получают из уравнения материального баланса (уравнения непрерывности) α -й компоненты раствора без учета гомогенных химических реакций [12, с. 246]

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{N}_\alpha, \quad (13)$$

где \mathbf{N}_α — вектор плотности потока α -й компоненты раствора (с модулем, численно равным количеству вещества, переносимого за единицу времени через единичную плоскую поверхность, нормальную к этому вектору). Вектор \mathbf{N}_α может иметь достаточно большое количество компонентов [1, § 58, 59], [12, с. 244], определяющих различные потоки:

$$\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{N}_\alpha^{\text{migr}} + \mathbf{N}_\alpha^{\text{conv}} + \mathbf{N}_\alpha^{\text{diff}} + \mathbf{N}_\alpha^{\text{Tdiff}} + \mathbf{N}_\alpha^{\text{Bdiff}}. \quad (14)$$

Здесь $\mathbf{N}_\alpha^{\text{migr}}$ — вектор плотности миграционного потока, вызванного движением заряженных частиц в электрическом поле; $\mathbf{N}_\alpha^{\text{conv}}$ — вектор плотности конвективного потока, вызванного наличием ненулевого вектора скорости жидкости $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (здесь $\mathbf{0}$ — нулевой вектор); $\mathbf{N}_\alpha^{\text{diff}}$ — вектор плотности диффузионного потока, вызванного наличием молекулярной диффузии; $\mathbf{N}_\alpha^{\text{Tdiff}}$ — вектор плотности диффузионного потока, вызванного наличием термодиффузии; $\mathbf{N}_\alpha^{\text{Bdiff}}$ — вектор плотности диффузионного потока, вызванного наличием бародиффузии. В случае, когда в выражении (14) существенными являются только слагаемые $\mathbf{N}_\alpha^{\text{conv}}$ и $\mathbf{N}_\alpha^{\text{diff}}$, а жидкость несжимаема и коэффициент диффузии $D = \text{const}$, уравнение материального баланса (13) сводится к следующему уравнению конвективной диффузии [2, с. 58]:

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) c_\alpha = D \Delta c_\alpha. \quad (15)$$

В координатном представлении в декартовой системе координат (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_\alpha}{\partial t} + v_x \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_\alpha}{\partial y} + v_z \frac{\partial c_\alpha}{\partial z} = \\ = D \left(\frac{\partial^2 c_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_\alpha}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (15a)$$

а в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial c_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial c_\alpha}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial c_\alpha}{\partial z} = \\ = D \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial c_\alpha}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_\alpha}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c_\alpha}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (15b)$$

Краевые условия при решении задач массопереноса (15) приведены в [2, с. 62].

Если рассматривать безразмерные аналоги уравнений (7), (11) и (15) — соответственно уравнения в Приложении 1 (П9а), (П10) и (П14), то очевидна их физическая сходность:

– во все уравнения (П9а), (П10) и (П14) входит число Рейнольдса;

– в каждом из них присутствует "диффузная часть" — вязкостной член в уравнении переноса импульса (П9а), термодиффузный член в уравнении теплопереноса (П10) и массодиффузный член в уравнении переноса массы (П14);

– в каждом из них присутствует конвективная часть, когда соответствующая субстанция переносится посредством движения жидкости.

Поэтому естественны многие аналогии всех упомянутых процессов переноса, подробно представленные, например, в работах [2, 10, 13]. В приложении приведены некоторые из них. Здесь отметим лишь органичность использования во всех упомянутых процессах понятия пограничного слоя, что наглядно демонстрируется похожестью уравнений для пограничного слоя в случаях импульсо-, тепло- и массопереноса (см. ниже).

Замечание. Отметим, что уравнения Навье—Стокса (7), теплопереноса (8) и массопереноса (15), а также производные от них уравнения представляют собой связанную систему дифференциальных уравнений в частных производных, требующих совместного решения. Причем если коэффициенты в этих уравнениях не зависят от температуры, то уравнение (7) является независимым и может решаться самостоятельно, а уравнения (8) и (15) могут решаться после определения поля скоростей. В случае же наличия в указанных уравнениях температурной зависимости уравнения (7) и (8) представляют собой связанную систему уравнений, а уравнение (15) зависит от решений первых двух. Пример такой взаимозависимости приведен в Приложении 3 (см. рисунок).

Отметим также, что уравнение (7) является нелинейным, а (8) и (15) являются линейными уравнениями.

Уравнение переноса вихрей

Приведем здесь интересный факт, касающийся плоского нестационарного течения несжимаемой жидкости [8, с. 78, 79]. Пусть параметры течения зависят только от переменных x и y . Тогда в системе уравнений Навье—Стокса (7а) в силу условия $v_z \equiv 0$ останется только два первых уравнения (принимая объемные силы равными нулю)

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y,$$

а уравнение неразрывности (6) переписывается так:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \nabla \times \mathbf{v}$ — вихрь векторного поля скорости. Тогда по постановке задачи

$\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$, где $\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$; \mathbf{k} — единичный орт

оси аппликат. Величина $\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}$ называется вихревой напряженностью. Для величины $\tilde{\omega}_z = \tilde{\omega}$

в [8, с. 78, 79] получено следующее уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} \right),$$

или в компактном виде

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\omega} = \nu \Delta \tilde{\omega}.$$

Это уравнение, называемое уравнением переноса вихрей, показывает, что субстанциональное изменение вихревой напряженности складывается из локальной и конвективной составляющих, равно диссипации вихревой напряженности вследствие трения. Отметим, что это уравнение переноса вихря рассматривается совместно с уравнением неразрывности, т. к. неизвестными остаются две величины — v_x и v_y . Наконец последние два уравнения можно свести к единственному уравнению с одним неизвестным. Для этого для плоских течений вводится функция тока $\psi(x, y)$, удовлетворяющая соотношениям (см., например, [8, с. 79])

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

При такой замене автоматически удовлетворяется уравнение неразрывности для плоского течения. Кроме того, выполняется функциональная связь

$$\Delta \psi = -2\tilde{\omega}.$$

Сама функция тока ψ удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению четвертого порядка, следующему из уравнения переноса вихрей [8, с. 79]

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \psi.$$

Здесь по-прежнему слева — инерционные члены, справа — члены, зависящие от вязкости.

Уравнения переноса в пограничных слоях

Ниже, если это не оговорено специально, речь идет о ламинарном характере течения жидкости. Уравнения переноса для случая турбулентного течения кратко рассмотрены в Приложении 2.

Для всех рассматриваемых процессов переноса характерно наличие пограничных слоев [14, с. 661]: "Пограничный слой — область течения вязкой жидкости с малой по сравнению с продольными размерами поперечной толщиной, появляющаяся у поверхности обтекаемого твердого тела или у границы раздела двух потоков жидкости с различными скоростями, температурами или химическим составом. Возникновение пограничного слоя связано с явлением переноса в жидкости количества движения, теплоты и массы, характеризуемых коэффициентами вязкости, теплопроводности и диффузии". Поэтому обычно рассматривают динамический (скоростной) пограничный слой (перенос импульса), температурный пограничный слой (теплоперенос) и диффузионный пограничный слой (перенос массы). Впервые теория пограничного слоя была разработана Л. Прандтлем.

Уравнения движения жидкости в пограничном слое допускают существенное упрощение, вызванное тем, что в тонком пограничном слое быстрота изменения всех величин в направлении, перпендикулярном к границе раздела фаз, велика по сравнению со скоростью их изменения в тангенциальном направлении. Кроме того, если размеры тела (границы) велики по сравнению с толщиной пограничного слоя, то на достаточно малом участке границы раздела течение обычно считают плоским [2, с. 23]. В связи с этим при математическом моделировании пограничных слоев рассматривают плоское стационарное течение жидкости в уравнениях (7), (11) и (15) (соответственно в их безразмерных версиях в Приложении 1 (П9), (П10) и (П14)). Вывод уравнений переноса в пограничном слое можно найти, например, в [1, 2, 6, 10] и др. Здесь сошлемся на работы [8, 10, 13, 15], где приведены уравнения переноса для всех погра-

ничных слоев в стационарном случае. Здесь они представлены таблицей, где выписаны в размерном и безразмерном координатном виде [8, с. 265, 267], [10, с. 395, 396, 399], [13, с. 312], [15, с. 558] (см. также в Приложении 1 содержательную сторону вопроса и расшифровку обозначений). Тангенциальное направление к границе раздела определяется переменной x — (\tilde{x}), нормальное — переменной y : (\tilde{y}).

В размерном уравнении энергии (см. таблицу, строка 2) последний член справа учитывает значение диссипативной функции (10) в несжимаемой жидкости в приближении пограничного слоя [8, с. 267], [15, с. 218]

$$\Phi = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2. \quad (16)$$

В безразмерном уравнении энергии

$$\tilde{\Phi} = \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \text{ — безразмерная диссипативная функ-}$$

ция [8, с. 267]; $Ec = \frac{V_0^2}{c_p (\Delta T)_0}$ — число (критерий подобия) Эккерта; $V_0 = \text{const}$ — скорость потока вдали от пограничного слоя; $(\Delta T)_0$ — характеристическая разность температур в жидкости (см. Приложение 1 (П4)). Отметим, что уравнения в строках таблицы 2 и 3 в отличие от уравнений строки 1 — линейные дифференциальные уравнения.

При пренебрежении диссипацией уравнения строки 2 преобразуются к виду

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (17)$$

$$\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (18)$$

Уравнения переноса в пограничном слое

№ п/п	Наименование	Размерное представление	Безразмерное представление
1	Уравнение переноса импульса	$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$	$\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}$
2	Уравнение энергии (теплопереноса)	$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2$	$\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{Ec}{\text{Re}} \tilde{\Phi}$
3	Уравнение массопереноса	$v_x \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} + \tilde{v}_y \frac{\partial c_\alpha}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c_\alpha}{\partial y^2}$	$\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{c}_\alpha}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{c}_\alpha}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Sc}} \frac{\partial^2 \tilde{c}_\alpha}{\partial \tilde{y}^2}$

Отметим также, что безразмерное уравнение Навье—Стокса (7а) решается вместе с уравнением неразрывности, которое в данном случае записывается соответственно так:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} = 0. \quad (19)$$

Как видно из уравнений (см. таблицу, строки 1 и 3), (17), (18), уравнения процессов в пограничных слоях описываются в случае теплопереноса при пренебрежении диссипативной функцией и массопереноса идентичными уравнениями, а различаются только критериями подобия. В случае переноса импульса различия минимальны — добавляется сила, связанная с градиентом давления. Кроме того, во всех трех безразмерных уравнениях присутствует число Рейнольдса Re .

Выше приводилось уравнение четвертого порядка для функции тока ψ , соответствующее обычному уравнению Навье—Стокса для плоскогo течения. В приближении пограничного слоя справедливо следующее уравнение переноса уже третьего порядка для функции тока [8, с. 131]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}.$$

Краевые условия для последнего уравнения приведены в [8, с. 131].

Толщина пограничного слоя

Под толщиной какого-либо пограничного слоя понимается такое расстояние от стенки обтекаемого тела, на котором скорость течения, температура или концентрация практически не отличаются (обычно 99 % [2, с. 29], [10, с. 379]) от скорости, температуры или концентрации во внешнем течении, примыкающем к слою. Различают ламинарный и турбулентный пограничные слои в зависимости от характера присутствующего в них течения. Под ламинарным течением обычно понимают упорядоченный режим течения вязкой жидкости, характеризующийся отсутствием перемешивания между соседними слоями жидкости [16, с. 567] (такое течение, при котором жидкость перемещается слоями без перемешивания и пульсаций, т. е. беспорядочных быстрых изменений скорости и давления). Условия, при которых может происходить устойчивое, не нарушающееся от случайных возмущений ламинарное течение, зависят от значения числа Рейнольдса Re . Для каждого вида течения существует такое число $Re_{1кр}$, называемое нижним критическим числом Рейнольдса, что при любом $Re < Re_{1кр}$, ламинарное течение является

устойчивым. При $Re > Re_{1кр}$ (в т. н. области перехода) можно также получить ламинарное течение, но оно не будет устойчивым и, когда возникнут возмущения, перейдет в неупорядоченное турбулентное течение [16, с. 567]. Наконец, после $Re > Re_{2кр}$, где $Re_{2кр} > Re_{1кр}$ — верхнее критическое число Рейнольдса, ламинарное течение уже невозможно.

Отметим, что характер течения может меняться в условиях одной физической задачи. Так, например, в [10, с. 389], [15, с. 184] показана картина изменения характера течения в пограничном слое при обтекании тонкой достаточно длинной пластинки плоским потоком. По мере отдаления от ребра пластинки, на которую набегающий поток, характер течения внутри пограничного слоя вначале носит ламинарный характер, затем наступает область перехода и наконец наступает зона развитого турбулентного течения.

Ниже приводятся некоторые характеристики пограничных слоев для всех перечисленных выше явлений переноса в случае плоскогo течения, обтекающего тонкую плоскую конечную или полубесконечную пластину. Качественно формулы, полученные для пластинки, применимы к произвольному телу, имеющему малую кривизну [2, с. 29].

В случае динамического пограничного слоя при скорости набегающего потока \mathbf{v}_0 ставится условие прилипания на пластине (скорость течения на поверхности пластины равна нулю)

$$\mathbf{v}|_{x \in S} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}|_{\infty} = \mathbf{v}_0,$$

где S — поверхность пластинки; нижний индекс ∞ здесь и для других пограничных слоев характеризует значение индексируемой величины на значительном удалении от пластины.

В случае термического пограничного слоя принимаются условия

$$T|_{x \in S} = T_s, \quad T|_{\infty} = T_0,$$

где T_s — температура, поддерживаемая на поверхности пластины; T_0 — температура набегающего потока.

В случае диффузионного пограничного слоя принимаются условия

$$c|_{x \in S} = c_s, \quad c|_{\infty} = c_{\infty},$$

где c_s — концентрация некоторого вещества, поддерживаемая на поверхности пластины; c_{∞} — концентрация этого вещества в набегающем потоке.

Динамический пограничный слой

Пусть рассматривается двумерное ламинарное обтекание жидкостью плоского участка поверхности тела. Характерный размер поверхности L_0 , кинематическая вязкость жидкости ν , характерная величина скорости течения V_0 . Предполагается, что $\sqrt{\text{Re}} = \sqrt{\frac{V_0 L_0}{\nu}} \gg 1$. Тогда толщина динамического ламинарного пограничного слоя δ_0 определяется выражением [1, с. 226], [2, с. 26]

$$\delta_0 \sim l / \sqrt{\text{Re}}. \quad (20)$$

Применение уравнений пограничного слоя к обтеканию плоской полубесконечной пластинки плоским потоком жидкости приводит к выражению для толщины пограничного слоя в зависимости от удаления $x \geq 0$ от ребра пластинки $x = 0$ [1, с. 227]

$$\delta_0(x) \sim \sqrt{x\nu / V_0}. \quad (21)$$

В [2, с. 29] последняя формула уточнена

$$\delta_0(x) = 5.2 \sqrt{x\nu / V_0}. \quad (21a)$$

В [15, с. 179] формула (21a) дана с несколько отличным, но близким коэффициентом

$$\frac{\delta_0(x)}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{V_0 x / \nu}} = \frac{4.64}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

Здесь $\text{Re}_x = \frac{V_0 x}{\nu}$ — текущее число Рейнольдса.

Пластинка лежит в плоскости $z = 0$ и совпадает с полуплоскостью $x \geq 0$, а вектор скорости (с модулем $|\mathbf{v}| = V_0$) набегающего потока совпадает с положительным направлением оси Ox .

Заметим, что уравнения для динамического пограничного слоя в случае полубесконечной плоской пластины и однородного стационарного обтекающего потока могут быть решены точно [2, с. 26–29].

Тепловой пограничный слой

В жидкостях коэффициент температуропроводности сравним по порядку величины с вязкостью жидкости [2, с. 194]. Следовательно, число Прандтля (см. Приложение 1 (П13)) имеет порядок

единицы $\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi} \sim O(1)$. В этом случае, поскольку

уравнения для динамического (см. таблицу, п. № 1) и теплового (см. таблицу, п. № 2) пограничных слоев практически близки, то выражения для со-

ответствующей толщины теплового пограничного слоя δ_T повторяют выражения (21) и (21a), т. е. будут обратно пропорциональны $\sqrt{\text{Re}}$ [1, с. 297].

В случае произвольных значений числа Прандтля Pr в работе [15, с. 223] получено выражение, связывающее толщину динамического и теплового пограничных слоев

$$\frac{\delta_T}{\delta_0} = \frac{1}{1.026 \cdot \text{Pr}^{1/3}}. \quad (22)$$

Учитывая (21a), можно записать

$$\delta_T(x) = \delta_0(x) \frac{1}{1.026 \cdot \text{Pr}^{1/3}} = \frac{4.522 \cdot x}{\text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}. \quad (23)$$

Диффузионный пограничный слой

Толщина диффузионного пограничного слоя δ_c определяется, например, таким выражением [2, с. 68]

$$\delta_c \sim \left(\frac{D}{\nu}\right)^{1/3} \delta_0 = \frac{\delta_0}{\text{Sc}^{1/3}}. \quad (24)$$

Для жидкостей порядок числа Шмидта (см. Приложение 1 (П17)) $\text{Sc} = \frac{\nu}{D}$ составляет $O(10^3)$ (к примеру, вязкость подвижных жидкостей типа воды составляет около $\nu \approx 10^{-2}$ см²/с, а коэффициенты диффузии молекул и ионов в водных растворах равны по порядку величины $D \approx 10^{-5}$ см²/с; у макромолекул $D \approx 10^{-6}$ см²/с [2, с. 61]). Поэтому при таких значениях Sc справедливы следующие оценки толщины диффузионного пограничного слоя [2, с. 68]

$$\delta_c \sim \frac{\delta_0}{10}.$$

Учитывая подобие процессов тепло- и массопереноса [15, с. 573], можно сразу записать выражение для толщины пограничного слоя для массопереноса, используя выражение (23) для пограничного слоя при теплопереносе, заменив число Прандтля числом Шмидта

$$\delta_c(x) = \delta_0(x) \frac{1}{1.026 \cdot \text{Sc}^{1/3}} = \frac{4.522 \cdot x}{\text{Re}_x^{1/2} \text{Sc}^{1/3}}. \quad (23a)$$

Отметим, что при вариации коэффициента диффузии D для различных веществ, меняется и толщина диффузионного пограничного слоя.

В работе [10, с. 407, 408] приведена следующая подборка соотношений между величинами δ_0 , δ_T и δ_c при условии ламинарности течения:

– соотношение между толщиной динамического и теплового пограничных слоев

$$\frac{\delta_0}{\delta_T} \approx \text{Pr}^n, \quad (25)$$

где n — положительное число. Для жидких металлов $\delta_T \gg \delta_0$, для вязких жидкостей $\delta_0 \gg \delta_T$;

– соотношение между толщиной динамического и диффузионного пограничных слоев

$$\frac{\delta_0}{\delta_C} \approx \text{Sc}^n; \quad (25a)$$

– соотношение между толщиной теплового и диффузионного пограничных слоев

$$\frac{\delta_T}{\delta_C} = \text{Le}^n. \quad (25b)$$

Здесь $\text{Le} = \frac{\chi}{D} = \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}}$ — число Льюиса, означает отношение коэффициента тепловой диффузии χ к коэффициенту молекулярной диффузии D .

Согласно [10, с. 408]: "для большинства применений целесообразно считать значение $n = 1/3$ ". В этом случае оценки (25) и (25a) совпадают соответственно с оценками (22) и (23a), приведенными выше.

Безразмерные потоки

Если рассматривать размерные варианты уравнений, приведенных в таблице, то справа в уравнении для динамического пограничного слоя возникает член $\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$, в уравнении для теплового

пограничного слоя — член $\frac{\partial}{\partial y} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial y} \right)$ и для диффузионного пограничного слоя — член $\frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial c_\alpha}{\partial y} \right)$. В этих выражениях в скобках стоят величины, совпадающие с плотностью потоков:

– потока импульса для динамического случая $\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$;

– молекулярного теплового потока для случая теплопереноса $\chi \frac{\partial T}{\partial y}$;

– молекулярного диффузионного потока для случая массопереноса $D \frac{\partial c_\alpha}{\partial y}$.

При наличии границы раздела фаз, а следовательно, при наличии пограничных слоев в перечисленных явлениях переноса вводятся следующие безразмерные критерии подобия [9].

• **Для динамического пограничного слоя** — коэффициент трения (friction coefficient) C_f [10, с. 400]

$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho(V_0^2/2)} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0}, \quad (26)$$

где $\tau_s = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \left(\frac{\eta V_0}{L_0} \right) \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0}$ — поток импульса

через границу обтекания $y=0$ (оно же касательное напряжение на этой границе). Величина $\rho(V_0^2/2)$ — динамическое давление, входящее в уравнение Бернулли [8, с. 23]. Коэффициент C_f безразмерный (см. также [2, с. 28]). Размерности числителя и знаменателя в размерной части выражения (26) совпадают и равны $\left[\frac{\text{H}}{\text{M}^2} \right]$.

• **Для теплового пограничного слоя** — число Нуссельта Nu [10, с. 401], [14, с. 369], [15, с. 224], безразмерный коэффициент стационарного теплообмена между поверхностью тела и потоком жидкости при наличии конвекции. Предполагается, что передача теплоты осуществляется теплопроводностью в тепловом пограничном слое на границе. Число Нуссельта определяется так [1, с. 294], [14, с. 369], [15, с. 224]:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha_T L_0}{\kappa}. \quad (27)$$

Здесь α_T — коэффициент теплоотдачи от поверхности тела к жидкости или наоборот; L_0 — характерный размер тела; κ — коэффициент теплопроводности. Коэффициент теплоотдачи, согласно определению [17, с. 79], равен отношению плотности теплового потока, отдаваемого поверхностью к разности температур между поверхностью и прилегающей средой. Согласно [10, с. 401], применительно к обсуждающейся здесь теории плоского пограничного слоя

$$\alpha_T = \frac{\kappa(T_\infty - T_s)}{L_0(T_s - T_\infty)} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0}.$$

Подставляя значение коэффициента теплоотдачи в (27), окончательно имеем [10, с. 401]

$$\text{Nu} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0}. \quad (28)$$

Таким образом, число Нуссельта из (28) представляет собой безразмерный тепловой поток. Согласно [2, с. 192], в условиях вынужденной конвекции (т. е. при наличии обтекания тела потоком) число Нуссельта в каждой точке раздела фаз является функцией двух безразмерных критериев — числа Рейнольдса Re и числа Прандтля Pr

$$\text{Nu} = \varphi(S, \text{Re}, \text{Pr}), \quad (29)$$

S — точка границы обтекаемого тела; при естественной конвекции число Нуссельта определяется критериями Грасгофа Gr и Прандтля Pr (см. также [1, с. 294], [10, с. 401]). Например, для плоской пластины, нагретой до постоянной температуры, когда текущее число Нуссельта в точке x Nu_x определяется выражением (27), где вместо общей длины пластины L_0 фигурирует текущее расстояние от фронтального ребра x

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha_T x}{\kappa}, \quad (27a)$$

имеет место соотношение [15, с. 224]

$$\text{Nu}_x = 0.332 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2},$$

где $\text{Re}_x = \frac{V_0 x}{\nu}$ — текущее число Рейнольдса. Здесь

число Нуссельта Nu_x является функцией текущего значения x . Согласно [15, с. 225] для плоской пластины соотношение (27a) можно записать в виде

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha_T x}{\kappa} = \frac{x}{\delta'_T(x)}, \quad (27b)$$

где $\delta'_T(x)$ — условная толщина теплового пограничного слоя, близкая к фактической толщине теплового пограничного слоя (подробнее см. в [15, с. 224]). Поскольку $\delta'_T(x)$ есть величина переменная (в случае обтекания плоской пластины $\delta_T(x)$ это монотонно возрастающая функция (см., например [10, с. 380])), текущее число Нуссельта есть функция координаты поверхности пластины $\text{Nu}_x = \text{Nu}_x(x)$. Так как толщина пограничного слоя всегда мала по сравнению с длиной x , то значение критерия Нуссельта бывает большим. Кроме того, толщина теплового пограничного слоя уменьшается с возрастанием значений критериев Рейнольдса и Прандтля, поэтому обе эти величины увеличивают значение критерия Нуссель-

та [15, с. 225]. Число Нуссельта Nu символизирует отношение между интенсивностью теплообмена за счет конвекции и интенсивностью теплообмена за счет теплопроводности [10, с. 409].

Приведем здесь цитату, поясняющую физический смысл теплообмена при наличии конвекции [15, с. 155]: "Основная область сопротивления теплообмену концентрируется в тонком слое, непосредственно примыкающем к поверхности стенки. Теплообмен обуславливается взаимодействием теплопроводности и переноса энергии движущейся среды внутри этого слоя. Тепло, проникающее в этот слой, отводится потоком жидкости. Следовательно, коэффициент теплоотдачи определяется главным образом толщиной и свойствами этого пограничного слоя, которые в свою очередь зависят от всех параметров, определяющих поток, движущийся вдоль поверхности стенки".

• Для пограничного слоя при массопереносе — число Шервуда Sh [10, с. 401] (его еще называют диффузионным числом Нуссельта [14, с. 369]), безразмерный коэффициент стационарного массообмена между поверхностью тела и потоком жидкости при наличии конвекции. Предполагается, что массопередача осуществляется диффузно в тепловом пограничном слое на границе. Число Шервуда определяется так [14, с. 369] (см. также определение в [2, с. 116]):

$$\text{Sh} = \frac{\alpha_D L_0}{D}. \quad (30)$$

Здесь α_D — коэффициент массоотдачи от поверхности тела к жидкости или наоборот; L_0 — характерный размер тела; D — коэффициент диффузии. Согласно [10, с. 401] применительно к обсуждающейся здесь теории плоского пограничного слоя, коэффициент массоотдачи равен

$$\alpha_D = \frac{D(c_{\alpha\infty} - c_{\alpha S})}{L_0(c_{\alpha S} - c_{\alpha\infty})} \frac{\partial \tilde{c}_\alpha}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0}.$$

Подставляя значение коэффициента массоотдачи в (30), окончательно имеем [10, с. 402]

$$\text{Sh} = \frac{\partial \tilde{c}_\alpha}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0}. \quad (31)$$

Таким образом, число Шервуда из (31) представляет собой безразмерный поток массы (α -го компонента раствора). Согласно [2, с. 116], критерий Шервуда при данных геометрических условиях является функцией определяющих критериев Pr и Sc (см. также [10, с. 402])

$$\text{Sh} = \varphi(S, \text{Re}, \text{Sc}). \quad (32)$$

Здесь S — точка границы обтекаемого тела.

Критерий Шервуда связан с наглядной величиной — толщиной диффузионного пограничного слоя соотношением [2, с. 116] (см. аналогичную связь для числа Нуссельта в (27б))

$$\text{Sh} = \frac{L_0}{\delta_c}.$$

Число Шервуда Sh по аналогии с теплопереносом рассматривается как отношение конвективного массопереноса к диффузионному.

Подобие процессов теплообмена и массообмена

Известно [15, с. 576], что любое из уравнений (и заключений), относящихся к теплопереносу без диссипации в ламинарном потоке дает при наличии геометрического подобия соответствующее решение задач массопереноса, если критерий Нуссельта Nu заменить критерием Шервуда Sh , а критерий Прандтля Pr — критерием Шмидта Sc . Разумеется, при идентичном числе Рейнольдса Re процесса обтекания. Этот же закон был также подтвержден для турбулентного потока значительным количеством экспериментов по переносу массы для потока в трубе и потока на плоской плите, а также для потоков вокруг цилиндров, сфер и через уплотненные слои [15, с. 576]. Отсюда же следует, например, что функции φ в выражениях (29) и (32) тождественно совпадают.

Числа Рейнольдса, Нуссельта и Шервуда играют сходную роль в теории переноса импульса, теплопереноса и массопереноса соответственно. Числа Нуссельта и Шервуда характеризуют отношения конвективной составляющей к диффузионной составляющей соответствующих характеристик описываемых процессов переноса.

ОСОБЕННОСТИ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА В ТРУБАХ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Перенос импульса

При рассмотрении ламинарного течения в конечной круглой трубе, куда жидкость поступает с равномерной скоростью, скорость поступающего потока постоянна по всему входному сечению трубы. При поступлении в трубу жидкость начинает входить в контакт с внутренней поверхностью трубы. Вследствие наличия вязкости начинает развиваться пограничный слой, толщина которого монотонно возрастает по мере продвижения жидкости внутрь трубы, образуя входной конус с осью, совпадающей с осью трубы. Внутри конуса скорость движения жидкости остается однородной, не зависящей от радиуса трубы, но несколько

возрастающей из-за уменьшения внутреннего диаметра течения [1, с. 229] (см. также рис. 8.1, с. 518 работы [10]). Объем от входа в трубу до вершины конуса называется входной гидродинамической областью (hydrodynamic entrance region). После окончания этой области течение в трубе уже принимает классический профиль течения Пуазейля, а сама область называется полностью развитой областью (fully developed region). Для ламинарного течения отношение высоты входного конуса h_v к диаметру трубы определяется по формуле [10, с. 519]

$$\frac{h_v}{d} \approx 0.05 \cdot \text{Re},$$

где d — диаметр трубы; $\text{Re} = \frac{V_m d}{\nu}$ — число Рейнольдса в развитой области; V_m — средняя скорость потока в развитой области, равная половине максимальной осевой скорости в течении Пуазейля. В работе [15, с. 196] предыдущая оценка несколько отличается в постоянном коэффициенте

$$\frac{h_v}{d} \approx 0.0288 \cdot \text{Re}.$$

Граница ламинарности потока в круглой трубе определяется неравенством [10, с. 519]

$$\text{Re} \leq \text{Re}_{\text{кр}} = 2300.$$

Для турбулентного течения отношение высоты входного конуса h_v к диаметру трубы не зависит от числа Рейнольдса и находится в интервале, определяемом неравенством [10, с. 519]

$$10 \leq \frac{h_v}{d} \leq 60.$$

Полезным безразмерным параметром при рассмотрении течения в трубах является безразмерный коэффициент потерь на трение по длине f (англ. — Darcy friction factor). Согласно [10, с. 553], в развитом ламинарном течении по круглой трубе имеет место равенство

$$f = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Этот коэффициент позволяет, например, вычислять потери давления за счет трения по длине трубы.

Теплоперенос

В случае теплопереноса возникают качественно схожие с переносом импульса процессы. Так, если в конечную трубу круглого сечения поступает

жидкость фиксированной температуры T_0 , а температура стенок трубы $T_1 > T_0$, то вновь, теперь уже из-за формирования температурного пограничного слоя, на входе трубы (температурный входной регион) возникает конус с основанием на входном сечении трубы и вершиной на оси трубы [10, с. 524, рис. 8.4]. Внутри конуса температура однородна и не зависит от радиуса трубы. Отношение высоты конуса h_T к диаметру трубы определяется для ламинарного потока выражением [10, с. 524]

$$\frac{h_T}{d} \approx 0.05 \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}.$$

Отметим, что для жидкостей, где коэффициент температуропроводности и кинематическая вязкость имеют одинаковый порядок величины и, следовательно, число Прандтля имеет порядок единицы $\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi} \sim O(1)$, в работе [2, с. 194] дана следующая оценка

$$h_T \sim R \cdot \text{Re},$$

где R — радиус трубы.

Число Нуссельта в круглой трубе в зоне развитого ламинарного течения при постоянстве поддерживаемой на границе температуры является константой (см., например, [10, с. 553])

$$\text{Nu} = 3.66;$$

при постоянной плотности потока тепла через границу раздела труба—жидкость число Нуссельта также является константой

$$\text{Nu} = 4.36.$$

Массоперенос

Исходя из изложенного выше свойства подобия процессов тепло- и массопереноса, можно переписать характеристики, изложенные выше для теплопереноса в трубах круглого сечения применительно к явлению массопереноса. При этом число Прандтля Pr замещается числом Шмидта Sc , а число Нуссельта Nu — числом Шервуда Sh .

Например, отношение высоты входного конуса h_c (см. аналогичный параметр h_T в случае теплопереноса) к диаметру трубы при массопереносе должно определяться для ламинарного потока выражением

$$\frac{h_c}{d} \approx 0.05 \cdot \text{Re} \cdot \text{Sc},$$

а число Шервуда в круглой трубе в зоне развитого ламинарного течения должно являться константой

и при постоянстве поддерживаемой на границе концентрации

$$\text{Sh} = 3.66,$$

и при постоянной плотности потока концентрации через границу раздела труба—жидкость

$$\text{Sh} = 4.36.$$

О справедливости приведенных результатов для тонких капилляров

Согласно [10, с. 558–560], во-первых, достижение критического значения числа Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}} \approx 2300$ в заполненных жидкостью трубках малого диаметра весьма нереалистично. Поэтому в реальных ситуациях течение в такой трубке является ламинарным. Во-вторых, описанные выше общие закономерности для ламинарных течений, будучи проверенными экспериментально, остаются справедливыми для капилляров диаметром не менее 17 микрон. А теоретический прогноз для большинства жидкостей распространяется на трубки с гидравлическим диаметром, вплоть до 1 микрона и даже меньше. Сама задача изучения явлений переноса в микроканалах является в настоящее время актуальным предметом научных исследований.

ВЫВОДЫ

В обзоре рассмотрен формализм поверхностных явлений как в идеальных, так и в вязких жидкостях, как в статике, так и в случае движения жидкости. Акцент при этом делается на рассмотрении возникающего при искривлении границы раздела фаз поверхностного давления.

Основное внимание в обзоре уделено явлению переноса импульса при ламинарном течении жидкости и тесно с ним связанным явлениям тепло- и массопереноса. Все упомянутые явления переноса рассматриваются с единых позиций теории подобия, что позволяет легко экстраполировать результаты, полученные для одного из них, на другие. Большое внимание уделено критериям подобия, фигурирующим в этих процессах и позволяющим характеризовать многообразие. При этом широко используется формализм теории пограничного слоя, справедливый для всех указанных явлений переноса.

В приложениях рассмотрены методы теории подобия применительно к рассматриваемым явлениям переноса, кратко описаны некоторые аспекты турбулентного течения.

Изложенные материалы могут быть с пользой приложены в практике научного приборостроения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Критерии подобия

Для процессов, происходящих в жидкости, широко используются критерии подобия — безразмерные величины, составленные из размерных физических параметров, определяющих рассматриваемое физическое явление (см., например, [14, с. 668]). Всякая новая комбинация из критериев подобия также является критерием подобия, что дает возможность в каждом конкретном случае выбирать наиболее удобные и характерные критерии.

Если известны уравнения, описывающие рассматриваемое физическое явление, то критерии подобия для этого явления можно получить, приводя уравнения к безразмерному виду. Тогда критерии подобия определяются как безразмерные коэффициенты, появляющиеся перед некоторыми из членов новой, безразмерной системы уравнений. Когда уравнения, описывающие физическое явление, неизвестны, критерии подобия отыскиваются при помощи анализа размерностей, определяющих физические параметры. При изучении гидродинамических процессов, а также тепло- и массопередачи обычно рассматривают критерии подобия, характеризующие вещество (числа Прандтля Pr, Шмидта Sc и др.), связанные с переносом импульса (числа Рейнольдса Re, Фруда Fr, Вебера We, Маха M, Кнудсена Kn, Струхалья Sh и др.), теплоты (числа Нуссельта Nu, Стентона St, Грасгофа Gr, Пекле Pe, Рэлея Ra и др.). Аналогичные критерии подобия характеризуют и перенос материи в бинарной смеси (число Шервуда Sh, диффузионные числа Стентона St_D, Грасгофа Gr_D, Пекле Pe_D и др.).

Приведение уравнений к безразмерному виду

Следуя обычной методике теории подобия, приведем все три уравнения (7), (11) и (15) к безразмерному виду. Для этого примем для всех этих уравнений единый масштаб. Масштабированные (безразмерные) переменные и функции сопроводим значком "тильда". Начнем с координат и вектора скорости [18, 19]

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = L_0 \tilde{\mathbf{r}} = L_0 (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{\mathbf{r}}, \quad (\text{П1})$$

$$\mathbf{v} = V_0 \tilde{\mathbf{v}}. \quad (\text{П2})$$

Здесь масштабные коэффициенты длины L_0 и скорости V_0 имеют соответствующие размерности

$$[L_0] = \text{м}, \quad [V_0] = \text{м/с}.$$

Для времени выбор масштабного множителя очевиден

$$t = \frac{L_0}{V_0} \tilde{t} = t_0 \tilde{t}, \quad t_0 = \frac{L_0}{V_0}, \quad [t_0] = \text{с}. \quad (\text{П3})$$

Для температуры можно принять такое соотношение [8, с. 260–261]

$$\tilde{T} = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}. \quad (\text{П4})$$

Здесь T_s — температура на твердой границе; $T_\infty = \text{const}$ — температура жидкости вдали от внешней границы пограничного слоя; $(\Delta T)_0 = T_s - T_\infty$ — характеристическая разность температур.

Для концентрации аналогично

$$\tilde{c}_\alpha = \frac{c_\alpha - c_{\alpha\infty}}{c_{\alpha s} - c_{\alpha\infty}} c_\alpha = C_\alpha^0 c_\alpha, \quad (\text{П5})$$

где $c_{\alpha\infty} = \text{const}$ — концентрация компонента α вдали от границы раздела; $c_{\alpha s}$ — то же на границе раздела; c_α — текущая концентрация α компоненты раствора.

Для давления представление неоднозначно [18]. Либо так:

$$p = \frac{\eta V_0}{L_0} \tilde{p} = P_0 \tilde{p}, \quad [P_0] = \left[\frac{\eta V_0}{L_0} \right] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \quad (\text{П6})$$

Либо так:

$$p = \rho V_0^2 \tilde{p} = P_0 \tilde{p}, \quad [P_0] = [\rho V_0^2] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \quad (\text{П7})$$

Наконец, отметим, что имеют места равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{V}{L_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \quad \nabla = \frac{1}{L_0} \tilde{\nabla}, \quad \Delta = \frac{1}{L_0^2} \tilde{\Delta}.$$

После подстановки (П1)–(П3) и (П6) в уравнение Навье—Стокса (7), получаем для случая равенства объемной силы нулю $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ (см. [18, с. 25, 26], [11])

$$\text{Re} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} \right) = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}},$$

Здесь Re — число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho V_0 L_0}{\eta} = \frac{V_0 L_0}{\nu}, \quad (\text{П8})$$

$\nu = \eta / \rho$ — кинематическая вязкость.

После подстановки (П1)–(П3) и (П7) в уравнение Навье—Стокса (7), получаем (см. [19])

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}. \quad (\text{П9})$$

При $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, как легко показать, при модели (П6)

$P_0 = \frac{\eta V_0}{L_0}$ уравнение (7) приводится к виду

$$\text{Re} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} \right) = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{f}}_1,$$

где безразмерный вектор $\tilde{\mathbf{f}}_1$ определяется так:

$$\mathbf{f} = F_1 \tilde{\mathbf{f}}_1, \quad F_1 = \frac{\eta V_0}{L_0^2},$$

а при модели (П7) $P_0 = \rho V_0^2$ уравнение (7) приводится к виду

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{f}}_2,$$

где безразмерный вектор $\tilde{\mathbf{f}}_2$ определяется так:

$$\mathbf{f} = F_2 \tilde{\mathbf{f}}_2, \quad F_2 = \frac{\rho V_0^2}{L_0},$$

а скаляры $F_1 = \frac{\eta V_0}{L_0^2}$ и $F_2 = \frac{\rho V_0^2}{L_0}$, разумеется, имеют

размерность объемной силы $[F_1] = [F_2] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$.

После подстановки (П1)–(П3) и (П4) в уравнение конвективной термодиффузии (11) получаем

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} = \frac{1}{\text{Pe}} \Delta \tilde{T}, \quad (\text{П10})$$

где критерий подобия Pe — число Пекле

$$\text{Pe} = \frac{V_0 L_0}{\chi} = \frac{\rho c_p V_0 L_0}{\kappa}, \quad (\text{П11})$$

для которого справедливо равенство [1, 8]

$$\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr}, \quad (\text{П12})$$

где критерий подобия Pr — число Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}. \quad (\text{П13})$$

После подстановки (П1)–(П3) и (П5) в уравнение конвективной диффузии (15), получаем (стандартный вариант см. в [2, с. 60])

$$\frac{\partial \tilde{c}_\alpha}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{c}_\alpha = \frac{1}{\text{Pe}_D} \Delta \tilde{c}_\alpha. \quad (\text{П14})$$

Безразмерный параметр (критерий подобия) Pe_D ,

$$\text{Pe}_D = \frac{V_0 L_0}{D}, \quad (\text{П15})$$

носит название числа Пекле для массопередачи [2, с. 60]. Имеет место соотношение

$$\text{Pe}_D = \text{Re} \cdot \text{Sc}, \quad (\text{П16})$$

где Sc — число Шмидта

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{D}. \quad (\text{П17})$$

Замечание. Иногда число Шмидта именуют числом Прандтля для диффузионных процессов [2, с. 61].

Внешний вид размерных уравнений (7), (11) и (15) весьма сходен. Их трактуют как уравнения конвективной диффузии соответственно при переносе импульса, тепла и массы. Стоящие в них при вторых пространственных производных коэффициенты обычно трактуют:

ν — как коэффициент диффузии импульса;

χ — как коэффициент диффузии тепла;

D — как обычный коэффициент диффузии при массопереносе.

Поэтому числа Прандтля (П13) и Шмидта (П17) есть не что иное, как отношения коэффициента диффузии импульса ν соответственно к коэффициенту диффузии при теплопереносе χ и коэффициенту диффузии при массопереносе D .

Левая часть уравнения конвективной диффузии (П14) характеризует конвективный перенос вещества вместе с жидкостью, правая часть — молекулярную диффузию. Число Пекле для массопередачи играет для процесса конвективной диффузии ту же роль, что число Рейнольдса для течения жидкости. Если Pe_D мало, то в процессе распределения концентрации преобладает молекулярная диффузия. Как видно из (П15), такая ситуация реализуется при малых скоростях и в областях малого масштаба. В противном случае, когда Pe_D велико, — доминирует конвективный перенос вещества, и молекулярной диффузией можно пренебречь. Впрочем, это может быть несправедливым в концентрационных пограничных слоях, когда большие значения вторых пространственных производных в диффузионном члене могут компенсировать влияние большой величины числа Pe_D [2, с. 61].

В случае, когда кинематическая вязкость равна коэффициенту диффузии ($\nu = D$), число Шмидта равно единице и, следовательно, число Пекле для массопередачи равно числу Рейнольдса, имеет место подобие между переносом импульса (выражение (П9)) и вещества (выражение (П14)) [2, с. 61]: "В той области жидкости, где преобладает молекулярный механизм переноса импульса, будет доминировать также и молекулярный механизм переноса вещества". Отметим, что за молекулярный механизм переноса импульса (т. е. диффузию импульса) отвечает вязкость.

Большое значение числа Шмидта в жидкостях обуславливает тот факт, что уже при числах Рейнольдса $Re \sim 10^{-2}$, число Пекле для массопередачи Pe_D становится большим единицы и при тех числах Рейнольдса, которые встречаются обычно на практике, числа Pe_D весьма велики. Это означает, что уже при сравнительно малых числах Рейнольдса конвективный перенос вещества в жидкости преобладает над молекулярным [2, с. 66].

Граничные условия для уравнения конвективной диффузии приведены, например, в [2, с. 62–65].

Сравнение уравнения (П10) с уравнением конвективной диффузии (П14) показывает их большое сходство, наряду с которым имеются и существенные различия [2, с. 191–192]:

– уравнение (П10) следует из уравнения (8), в котором присутствует диссипативный член (отброшенный при получении уравнения (11));

– температуропроводность жидкости χ изменяется в более широких пределах, чем коэффициент диффузии D ; вследствие этого число Прандтля Pr (П13) также изменяется в более широком диапазоне, чем число Шмидта Sc (П17);

– уравнение теплопереноса (11), а следовательно, и уравнение (П10) получены в предположении о независимости коэффициентов уравнения от температуры; это предположение является гораздо более жестким, чем предположение о том, что коэффициент диффузии не зависит от концентрации.

Набор используемых краевых условий для решения задачи (11) приведен в [2, с. 192]

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Уравнения переноса в пограничном слое при турбулентном течении

Турбулентные течения являются существенно нестационарными. Поэтому в этом случае приходится решать некие осредненные по времени уравнения переноса в пограничных слоях. Пусть рассматривается некоторое поле (скоростей, температур, концентраций или каких-либо других величин). Обозначим такое поле через P . Тогда

можно записать

$$P(\mathbf{x}, t) = \bar{P}(\mathbf{x}) + P'(\mathbf{x}, t).$$

Здесь \bar{P} — усредненное во времени поле P ; P' — зависящая от времени добавочная составляющая поля P ; \mathbf{x} , t — соответственно пространственная и временная переменные. Тогда осредненная во времени система уравнений пограничных слоев для несжимаемой жидкости записывается следующим образом:

– уравнение неразрывности [10, с. 1032], [15, с. 275]

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0;$$

– уравнение переноса импульса (там же)

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_\infty}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \overline{\rho v'_x v'_y} \right);$$

– уравнение теплопереноса (без учета диссипации) [10, с. 1032], [15, с. 276]

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho c_p \overline{v'_y T'} \right);$$

– уравнение массопереноса [10, с. 1032]

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D_\alpha \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial y} - \overline{v'_y C'_\alpha} \right).$$

Как видно, последняя система уравнений пограничных слоев отличается от соответствующей системы стационарных уравнений ламинарных пограничных слоев наличием осредненных по времени членов вида $\overline{a'b'}$, которые в общем случае отличаются от нуля.

Толщина турбулентного динамического пограничного слоя при набегании потока на плоскую пластину определяется выражением [15, с. 184]

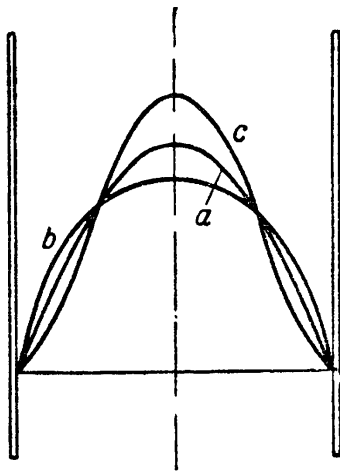
$$\frac{\delta_0(x)}{x} = \frac{0.376}{(V_0 x / \nu)^{1/5}} = \frac{0.376}{(Re_x)^{1/5}},$$

$Re_x = V_0 x / \nu$ — текущее число Рейнольдса (x — текущее расстояние от переднего края пластины $x = 0$).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Некоторые физические параметры

В работе [15] представлены некоторые физические параметры, важные в контексте изложенного в обзоре материала. Так, в [15, с. 611] представлена температурная зависимость следующих пара-



Искажение кривой распределения скорости в нагреваемой или охлаждаемой трубе при зависимости вязкости от температуры

метров воды: ρ — плотность; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; $\nu = \eta / \rho$ — кинематическая вязкость; κ — коэффициент теплопроводности; χ — коэффициент температуропроводности; Re — число Пекле; β — коэффициент расширяемости.

Здесь следует отметить существенный разброс (примерно в 3.7 раза) кинематической вязкости в диапазоне температур от 10 до 80 °С (см. соответствующую таблицу в [18, с. 23], где указано значение вязкости при 10 °С). Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры значительно слабее и ее практически можно не учитывать.

В связи со значительной зависимостью вязкости от температуры сошлемся на факт того, как меняется картина течения в трубе в зависимости от температуры [15, с. 247]. На рисунке представлено три кривых радиального распределения скорости потока в круглой трубе. Кривая a соответствует изотермическому потоку и представляет собой стандартную параболу течения Пуазейля. Если в трубе происходит теплоотдача от стенки к жидкости, то кривая распределения скорости (кривая b) более пологая, чем параболы a , т. к. слои жидкости у стенок теплее и поэтому обладают меньшей вязкостью, чем жидкость вблизи оси трубы. Если теплоотдача происходит от жидкости к стенке, слои у стенок обладают большей вязкостью, чем в окрестностях оси трубы, поэтому поле скорости описывается кривой c .

Из таблиц с данными по коэффициенту поверхностного натяжения в [15, с. 639] и [15, с. 638] следует, что коэффициент поверхностного натяжения монотонно уменьшается с ростом температуры, однако скорость спада не столь существенна, как в случае зависимости вязкости от температуры.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Еще раз об уравнении энергии

В работе [20, с. 8] приведено уравнение энергии для однофазной химически однородной сжимаемой жидкости с произвольной зависимостью физических свойств от температуры и давления, но при отсутствии в потоке переноса тепла излучением (выражение дано в актуальных здесь обозначениях без учета внутренних источников тепла)

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dt} + \Phi. \quad (\text{П18})$$

Здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ — субстанциональная производная.

Покажем эквивалентность выражения (П18) и уравнения энергии для сжимаемой вязкой жидкости [1, с. 272], уже приведенного выше:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (\text{П19})$$

Для этого распишем выражение в скобках в левой части этого уравнения, сославшись, например, на работы [21; 22]. А именно имеют место равенства

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{П20})$$

$$\nabla s = \frac{c_p}{T} \nabla T - \frac{\alpha}{\rho} \nabla p.$$

Здесь $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ — изобарный коэффициент расширения. Кроме того, стоящий справа в (П19) последний член представляет собой диссипативную функцию [1, с.273]

$$\Phi = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (\text{П21})$$

Подставляя (П20) и (П21) в (П19) и выражение для α , получаем в точности выражение (П18).

Таким образом, уравнение энергии для сжимаемой жидкости (П18) отличается от уравнения энергии для несжимаемой жидкости (8) дополни-

тельным членом $-\frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dt}$, исчезающим

из уравнения энергии в случае несжимаемости жидкости, и выражением для диссипативной функции (см. соответственно выражения (9) и (10)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959. 700 с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука. 1975, 565 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. Механика, колебания и волны, молекулярная физика. М.: Наука, 1970. 508 с.
5. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
7. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука, 1968. 940 с.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
9. Welty J.R., Wicks C.E., Wilson R.E., Rorrer G.L. Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer. 5th ed. Wiley&Sons, 2008. 711 p.
10. Incropera F.P., DeWitt D.P., Bergman T.L., Lavine A.S. Principles of heat and mass transfer. 7th ed. Wiley&Sons, 2013. 1048 p.
11. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1979. 712 с.
12. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 464 с.
13. Incropera F.P., DeWitt D.P. Fundamentals of heat and mass transfer. 5th ed. Wiley&Sons, 1996. 886 p.
14. Физическая энциклопедия. Т. 3 / Ред. Прохоров А.М. М.: БРЭ, 1992. 672 с.
15. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. М.: ГЭИ, 1961. 680 с.
16. Физическая энциклопедия. Т. 2 / Ред. Прохоров А.М. М.: БРЭ. 1990. 703 с.
17. Физическая энциклопедия. Т. 5 / Ред. Прохоров А.М. М.: БРЭ. 1998. 760 с.
18. Bruus H. Theoretical microfluidics. Oxford: University Press, 2008. 346 p.
19. Шарфарец Б.П., Шарфарец Е.Б. Некоторые особенности моделирования микрофлюидных процессов // Научное приборостроение. 2013. Т. 23, № 4. С. 91–94.
20. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.
21. Шарфарец Б.П., Князьков Н.Н., Пашовкин Т.Н. О математической постановке задачи движения вязких сжимаемых теплопроводящих жидкостей в термоупругой трубке // Научное приборостроение. 2013. Т. 23, №. 4. С. 85–90.
22. Шарфарец Б.П. О решении линеаризованной задачи движения вязкой теплопроводной жидкости в термоупругой трубке с помощью несвязанных уравнений Кирхгофа // Научное приборостроение. 2014. Т. 24, № 2. С. 27–32.

**Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург**

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию: 28.06.2015

AN OVERVIEW OF THE THEORY OF TRANSPORT PHENOMENA AND SURFACE PHENOMENA IN RELATION TO THE SOLUTION OF SOME PROBLEMS OF ANALYTICAL INSTRUMENTATION

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, RF

The review is devoted to the consideration of surface phenomena and transport phenomena, occurring in fluid flow. Surface phenomena are considered to occur when the curvature of the phase boundary surface pressure and shear stress caused by the gradient of surface tension. The focus of the review is given to the phenomenon of momentum transfer in laminar those chenie fluids and is closely associated with it the phenomena of heat and mass transfer. All phenomena are re-of the nose are considered from a unified theory of similarity that makes it easy extrapola-VAT results from one to the other. Great attention is paid to the criteria of similarity, Fiquiraudon in these processes and allows to transparently observe all of them huge lot of peculiarity. This is widely used formalism of the theory of the boundary layer that is fair to all these transfer phenomena. In applications of the methods of similarity theory with respect to the transfer phenomena, we summarize some aspects of the turbulent flow, the actual reference data. Materials can be usefully used in the practice of scientific instrumentation.

Keywords: capillary pressure, transport phenomena, momentum transfer, energy transfer, mass transfer, boundary layer, the thickness of the boundary layer, transport phenomena in circular tubes, similarity criterion

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshiz E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p. (In Russ.).
2. Levich V.G. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* [Physical and chemical hydrodynamics]. Moscow, GIFML Publ., 1959. 700 p. (In Russ.).
3. Sivuchin D.V. *Obschiy kurs fiziki. T. 2. Termodinamika i molekulyarnaya fizika* [General course of physics. Vol. 2. Thermodynamics and molecular physics]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 565 p. (In Russ.).
4. Savel'ev I.V. *Kurs obschey fiziki. T. 1. Mekhanika, kolebaniya i volny, molekulyarnaya fizika* [Course of the general physics. Vol. 1. Mechanics, fluctuations and waves, molecular physics]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 508 p. (In Russ.).
5. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarlakovskiy D.V. *Volny v sploshnykh sredach* [Waves in continuous environments]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2004. 472 p. (In Russ.).
6. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika. Ch. 2* [Theoretical hydromechanics. Part 2]. Moscow, FIZMATGIZ Publ., 1963. 728 p. (In Russ.).
7. Yavorskiy B.M., Detlaf A.A. *Spravochnik po fizike* [Reference book on physics]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 940 p. (In Russ.).
8. Shlichting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Boundary layer theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 712 p. (In Russ.).
9. Welty J.R., Wicks C.E., Wilson R.E., Rorrer G.L. *Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer*. 5th ed. Wiley&Sons, 2008. 711 p.
10. Incropera F.P., DeWitt D.P., Bergman T.L., Lavine A.S. *Principles of heat and mass transfer*. 7th ed. Wiley&Sons, 2013. 1048 p.
11. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki* [The equations in private derivatives of mathematical physics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979. 712 p. (In Russ.).
12. N'yumen Dzh. *Elektrokhimicheskie sistemy* [Electrochemical systems]. Moscow, MIR Publ., 1977. 464 p. (In Russ.).
13. Incropera F.P., DeWitt D.P. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 5th ed. Wiley&Sons, 1996. 886 p.
14. Prochorov A.M., Red. *Fizicheskaya ensiklopediya. T. 3* [Physical encyclopedia. Vol. 3]. Moscow, BRE Publ., 1992. 672 p. (In Russ.).
15. Ekkert E.R., Dreyk R.M. *Teoriya teplo- i massoobmena* [Theory warm and mass exchange]. Moscow, GEI Publ. 1961. 680 p. (In Russ.).
16. Prochorov A.M., Red. *Fizicheskaya ensiklopediya. T. 2* [Physical encyclopedia. Vol. 2]. Moscow, BRE Publ., 1990. 703 p. (In Russ.).
17. Prochorov A.M., Red. *Fizicheskaya ensiklopediya. T. 5* [Physical encyclopedia. Vol. 5]. Moscow, BRE Publ., 1998. 760 p. (In Russ.).
18. Bruus H. *Theoretical microfluidics*. Oxford, University Press, 2008. 346 p.
19. Sharfarets B.P., Sharfarets E.B. [Some features of modeling of microfluid processes]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Science Instrumentation], 2013, vol. 23, no. 4, pp. 91–94.
20. Petuchov B.S. *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubach* [Heat exchange and resistance at a laminar current of liquid in pipes]. Moscow, Energiya Publ., 1967. 412 p. (In Russ.).
21. Sharfarets B.P., Knyaz'kov N.N., Pashovkin T.N. [About a mathematical problem definition of the movement of the viscous compressed heat-conducting liquids in a thermoe-

lastic tube]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Science Instrumentation], 2013, vol. 23, no. 4, pp. 85–90. (In Russ.).

22. Sharfarets B.P. [About the solution of the linearized problem of movement of viscous heat-conducting liquid in the thermoelastic tube by means of Kirchhoff's

untied equations]. *Nauchnoe Priborostroenie* [Science Instrumentation], 2014, vol. 24, no. 2, pp. 27–32. (In Russ.).

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article received in edition: 28.06.2015