ISSN 0868–5886 *НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2014, том 24, № 2, с. 75–79*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 534.874+534.26

© Б. П. Шарфарец

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МНОЖЕСТВЕННОГО РАССЕЯНИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваются вопросы приближенного учета множественного рассеяния в условиях влияния границ волновода. Задача решается применительно к шарообразному излучателю, находящемуся в полупространстве у плоской границы. Представлены выражения для прямого, а также однократно рассеянного самим излучателем поля, вызванного наличием отраженных от границы волн. Задача решается в нулевом приближении с помощью полученной ранее техники, вытекающей из того факта, что амплитуда рассеяния удовлетворяет уравнению Гельмгольца по переменным местоположения рассеивателя.

Кл. сл.: множественное рассеяние, амплитуда рассеяния, однородное полупространство, плоская граница раздела

ВВЕДЕНИЕ

Задача учета множественного рассеяния в условиях влияния либо границ волновода, либо наличия множества рассеивателей, когда нельзя пренебречь многократным переотражением волн между ними, не является тривиальной. Эта тематика активно рассматривалась в последнее время отечественными и зарубежными авторами [1–11]. При этом для решения проблемы приходилось применять довольно громоздкие математические методы.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В работе [12] построен достаточно простой и эффективный метод расчета амплитуды рассеяния при падении на рассеиватель волны сложной формы на том основании, что такая амплитуда рассеяния удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца. В настоящей работе этот результат используется для простейшего случая множественного рассеяния, когда рассматривается возмущение исходной амплитуды рассеяния только в первом порядке, т. е. рассматривается влияние только однажды переотразившихся волн. Это может быть правомерным в случаях, когда вторичными переотражениями можно пренебречь.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Вначале приведем некоторые результаты работы [12]. Пусть начало координат привязано к включению (является либо его геометрическим центром, либо просто находится внутри области, занятой включением). Пусть далее $\tilde{u}_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d})$ — каноническая амплитуда рассеяния (ар), т. е. ар данного включения в случае, когда на него падает плоская волна, имеющая в начале координат единичную амплитуду и нулевую фазу с волновым вектором $k\mathbf{d}$, где $\mathbf{d}=(\sin\alpha\cos\beta,\sin\alpha\sin\beta,\cos\alpha)$ есть единичный вектор, задающий направление распространения плоской волны, k — волновое число. Когда падающая волна $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ в общем случае представляет собой совокупность плоских волн со спектром $g(\mathbf{d})$

$$u_{\text{inc}}(\mathbf{x})=\int_{\Omega'} g(\mathbf{d})e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}\mathrm{d}s(\mathbf{d}), \tag{1}$$

то результирующая ар $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ вычисляется следующим образом:

$$u_\infty(\hat{\mathbf{x}})=\int_{\Omega'} g(\mathbf{d})\tilde{u}_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d})\mathrm{d}s(\mathbf{d}). \tag{2}$$

Здесь Ω' — область определения спектра падающей волны; $\mathrm{d}s(\mathbf{d})=\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha\cdot\mathrm{d}\beta$ — элемент поверхности единичной сферы; $\hat{\mathbf{x}}=\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ — вектор на единичной сфере, направленный в точку наблюдения; $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ — ар включения, характеризующая угловое распределение поля рассеяния на включении при его облучении полем $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$.

Если функция $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ является решением однородного уравнения Гельмгольца во всем пространстве $\mathbf{x}\in \mathrm{R}^3$ (так называемое целое решение), то в ее представлении по плоским волнам участвуют только однородные плоские волны и интегрирование в (1), (2) осуществляется по поверхности единичной сферы $\Omega^{'}=\Omega$ (область видимости). Если же $u_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x})$ является решением однородного уравнения Гельмгольца только в бесконечной подобласти R^3 и удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности (так называемое излученное решение), то интегрирование в (1), (2) происходит как в области видимости (однородные плоские волны), так и вне ее (неоднородные плоские волны).

Отметим, что в случае, когда область $\Omega^{'}$ совпадает с областью видимости $\alpha\in[0,\pi]$, $\beta\in[0,2\pi]$, функция (1) носит название волновой функции Герглотца (Herglotz wave function) [13]. В этой же работе приведены некоторые свойства функции Герглотца.

Далее при рассмотрении ар включения будем под ней понимать отклик в функции угла прихода плоской волны единичной амплитуды и нулевой фазы в точке ее геометрического центра. Под диаграммной функцией источника первичного поля принимаем амплитуду излученной им плоской волны с нулевой фазой относительно геометрического центра источника в функции угла. В случае когда $u_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x})$ — излученное решение (здесь (R,θ,φ) — координаты относительно центра источника)

$$u_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x})=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{u}(k_x,k_y)}{k_z}e^{\mathrm{i}k\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y=$$
$$=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\beta\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-i\infty}\hat{u}(\mathbf{d})e^{\mathrm{i}kR(\sin\alpha\sin\theta\cos(\beta-\varphi)+\cos\alpha\cos\theta)}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha, \quad (3)$$

выражение (2) записывается в виде

$$u_{\infty}(\theta,\varphi,R_0,\theta_0,\varphi_0)=$$
$$=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\infty}\hat{u}(\alpha,\beta)\tilde{u}_{\infty}(\theta,\varphi,\alpha,\beta)\times$$
$$\times e^{\mathrm{i}kR_0(\sin\alpha\sin\theta_0\cos(\beta-\varphi_0)+\cos\alpha\cos\theta_0)}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \quad (4)$$

Сравнение (4) с (2) дает

$$g(\mathbf{d})=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\hat{u}(\alpha,\beta)e^{\mathrm{i}kR_0(\sin\alpha\sin\theta_0\cos(\beta-\varphi_0)+\cos\alpha\cos\theta_0)}. \quad (5)$$

Здесь $\hat{u}(k_x,k_y)$, $\hat{u}(\mathbf{d})$, $\hat{u}(\alpha,\beta)$ — спектр плоских волн (диаграммная функция) первичного поля в записи от различных переменных. В (4) рассматривается геометрия, когда включение находится в начале координат, а источник находится в точке $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)=(R_0,\theta_0,\varphi_0)$.

Далее, согласно [12], функция $u_{\infty}(\theta,\varphi,R_0,\theta_0,\varphi_0)$ из (4) является решением уравнения Гельмгольца относительно переменных (R_0,θ_0,φ_0) и может быть представлена в виде ряда

$$u_{\infty}(\theta,\varphi,R_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{e^{\mathrm{i}kR_0}}{R_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)}{(kR_0)^n}, \quad (6)$$

где функции $F_n(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)$ определяются из следующего рекуррентного соотношения:

$$F_n=\frac{1}{2\mathrm{i}n}\left(\frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\theta_0}(\sin\theta_0\frac{\partial}{\partial\theta_0})+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_0{}^2}+n(n-1)\right)F_{n-1}, \quad (7)$$

а F_0 равна

$$F_0(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)=\hat{u}(\theta_0,\varphi_0)u_{\infty}(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0). \quad (8)$$

Рассмотрим далее следующее пространство, состоящее из двух полупространств. Первое $\Lambda_1=\{(x,y,z),x,y\in\mathrm{R}^2,z\geq 0\}$ представляет собой однородное жидкое полупространство плотностью ρ и скоростью звука c. Второе $\Lambda_2=\{(x,y,z),x,y\in\mathrm{R}^2,z<0\}$ представляет собой в общем случае некоторое слоисто-неоднородное по переменной z полупространство и характеризуется коэффициентом отражения $V(\theta)$. Здесь, как обычно, под коэффициентом отражения $V(\theta)$ понимается амплитуда отразившейся под углом θ в полупространство Λ_1 от границы $z=0$ плоской волны, вызванной падением из Λ_1 на границу под углом $\pi-\theta$ исходной плоской волны единичной амплитуды и нулевой фазы в начале координат (обычно в силу симметрии $V(\theta)=V(\pi-\theta)$ в таких случаях говорят о равенстве углов падения и отражения). Пусть для простоты рассмотрения источник акустических колебаний является шарообразным телом радиусом a, обладает сферически симметричной внутренней структурой и излучает первичную сферическую волну давления p

$$p(\mathbf{x})=P_0\frac{e^{\mathrm{i}k|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{x}_0 = (0,0,z_0)$ — координаты центра источника; $\mathbf{x}$ — координаты текущей точки; P_0 — амплитуда сферической волны. Сам излучатель в поле сторонней первичной волны является рассеивателем. Также для простоты примем, что для рассеяния имеет место длинноволновое приближение для канонической ар (существенны только монопольный и дипольный моменты):

$$u_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d}) = A_0 + A_1\cos\gamma =$$
$$= A_0 + A_1(\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta) + \cos\theta\cos\alpha). \tag{10}$$

Здесь γ — угол между векторами $\hat{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{d}$; A_0 и A_1 — постоянные коэффициенты, зависящие от частоты и свойств включения и среды.

Пусть далее излучатель как рассеиватель приобрел ар $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$. Тогда вклад от перерассеянных волн будет определяться источником

$$p'(\mathbf{x}) = u_\infty(\hat{\mathbf{x}})\frac{e^{\mathrm{i}k|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}. \tag{11}$$

Результирующее поле с учетом границы раздела, таким образом, будет суммой полей, созданных исходным источником сферической волны (9) и источником, вызванным полем рассеяния (11), и может быть записано в следующем виде (вывод выражения, сходного с (11), для случая источника вида (9), но направленного и без учета рассеяния, дан в работе [15]):

$$p \approx P_0\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r} + P_0V(\theta_1)\frac{e^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1} + u_\infty(\theta,\varphi)\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r} +$$
$$+ u_\infty(\pi-\theta_1,\varphi)V(\theta_1)\frac{e^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1}. \tag{12}$$

Здесь r — длина прямого луча; r_1 — длина луча от мнимого источника; θ, θ_1 — углы падения от реального и мнимого источников соответственно в текущую точку $\mathbf{x}$.

Таким образом, источник (он же рассеиватель) находится в точке $\mathbf{x}_0 = (0,0,z_0)$, мнимый источник находится в точке $\mathbf{x}_1 = (0,0,-z_0)$. Источником первичного поля, вызывающего рассеяние, является мнимый источник. Его поле, очевидно, равно с учетом однократного отражения от границы

$$u_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x}) = P_0\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\infty} e^{\mathrm{i}k(\sin\alpha\cos\beta x + \sin\alpha\sin\beta y + (z+z_0)\cos\alpha)} \times$$
$$\times V(\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \tag{13}$$

Отсюда находим $g(\mathbf{d})$ для поля $u_{\mathrm{inc}}(0,0,z_0)$

$$g(\mathbf{d}) = P_0\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}e^{\mathrm{i}2kz_0\cos\alpha}V(\alpha),$$

а следовательно, как видно из (5),

$$\hat{u}(\alpha,\beta) = P_0V(\alpha),$$

или

$$\hat{u}(\theta_0,\varphi_0) = \hat{u}(\theta_0) = P_0V(\theta_0). \tag{14}$$

Далее, учитывая (10), получаем

$$u_\infty(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0) =$$
$$= A_0 + A_1(\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0) + \cos\theta\cos\theta_0).$$

Учитывая, что $\theta_0 = 0$, получаем

$$u_\infty(\theta,\varphi,\theta_0=0,\varphi_0) = A_0 + A_1\cos\theta. \tag{15}$$

Тогда из (8) с учетом (14) и (15) имеем:

$$F_0(\theta,\varphi,\theta_0=0,\varphi_0) =$$
$$= F_0(\theta) = P_0V(0)(A_0 + A_1\cos\theta). \tag{16}$$

Из (6) в нулевом приближении имеем с учетом (16):

$$u_\infty(\theta,R_0) \sim P_0\frac{e^{\mathrm{i}kR_0}}{R_0}V(0)(A_0 + A_1\cos\theta) =$$
$$= P_0\frac{e^{\mathrm{i}2kz_0}}{2z_0}V(0)(A_0 + A_1\cos\theta). \tag{17}$$

Здесь учтено, что $R_0 = 2z_0$. Подставляя (17) в (12), для суммарного поля получаем следующее выражение:

$$p = p_1 + p_2 \approx P_0\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r} + P_0V(\theta_1)\frac{e^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1} +$$
$$+ P_0\frac{e^{\mathrm{i}2kz_0}}{2z_0}V(0)(A_0 + A_1\cos\theta)\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r} +$$
$$+ P_0\frac{e^{\mathrm{i}2kz_0}}{2z_0}V(0)(A_0 - A_1\cos\theta_1)V(\theta_1)\frac{e^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1}. \tag{18}$$

Здесь p_1 — поле исходного излучателя; p_2 — поле рассеяния этого излучателя в поле вторичных волн, вычисленное в нулевом приближении:

$$p_1 \sim P_0\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r} + P_0V(\theta_1)\frac{e^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1},$$

$$p_2 \sim P_0 \frac{e^{\mathrm{i}2kz_0}}{2z_0} V(0)\left(A_0 + A_1 \cos\theta\right)\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r} +$$
$$+ P_0 \frac{e^{\mathrm{i}2kz_0}}{2z_0} V(0)\left(A_0 - A_1 \cos\theta_1\right)V(\theta_1)\frac{e^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1};$$

$\left(r,\theta\right)$ — координаты точки наблюдения относительно центра реального источника; $\left(r_1,\theta_1\right)$ — координаты точки наблюдения относительно центра мнимого источника.

ВЫВОДЫ

Таким образом, получено итоговое выражение (18), позволяющее рассчитывать суммарное поле исходного сферического источника и его поле рассеяния в длинноволновом приближении, вызванное границей раздела. Выражение получено в приближении однократного рассеяния и в нулевом приближении геометрооптических рядов. Отметим, однако, что все упомянутые ограничения могут быть сняты при необходимости повышения точности решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравцов Ю.А., Кузькин В.М., Петников В.Г.* Дифракция волн на регулярных рассеивателях в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 3. С. 339–343.
2. *Белов В.Е., Горский С.М., Зиновьев А.Ю., Хилько А.И.* Применение метода интегральных уравнений к задаче о дифракции акустических волн на упругих телах в слое жидкости // Акуст. журн. 1994. Т. 40, № 4. С. 548–560.
3. *Gaunaurd J.C., Huang H.* Acoustic scattering by a spherical body a plane boundary // J. Acoust. Soc. Am. 1994. Vol. 96, no. 4. P. 2526–2536.
4. *Gaunaurd J.C., Huang H., Strifors H.C.* Acoustic scattering by a pair of spheres // J. Acoust. Soc. Am. 1995. Vol. 96, N 1. P. 495–507.
5. *Лебедев А.В., Хилько А.И.* Рассеяние плоской волны на двух упругих шарах и сферических оболочках // Акуст. журн. 1997. Т. 43, № 4. С. 521–530.
6. *Кузькин В.М.* Об излучении и рассеянии звуковых волн в океанических волноводах // Акуст. журн. 2001. Т. 47, № 5. С. 678–684.
7. *Зацерковный А.В., Сергеев В.С., Шарфарец Б.П.* Использование амплитуды рассеяния для решения задач дифракции волн в полупространстве // Акуст. журн. 2001. Т. 47, № 5. С.650–656.
8. *Кузькин В.М.* Рассеяние звуковых волн на теле в плоскослоистом волноводе // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 1. С. 77–84.
9. *Шарфарец Б.П.* Метод расчета поля непрозрачного источника и поля рассеяния неоднородного включения в плоскослоистой среде // Акуст. журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 123–128.
10. *Шарфарец Б.П.* Метод решения задачи множественного рассеяния электромагнитных волн в однородной безграничной среде // Научное приборостроение. 2004. Т. 14, №. 4. С. 57–69.
11. *Шарфарец Б.П.* Метод решения задач множественного рассеяния на нескольких телах в однородной безграничной среде // Акуст. журн. 2005. Т. 51, № 5. С. 672–681.
12. *Шарфарец Б.П.* О возможности эффективного вычисления амплитуды рассеяния на включении в сложном поле // Акуст. журн. 2010. Т. 56, № 2. С. 166–171.
13. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Springer, 1998. 334 p.
14. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 860 с.
15. *Шарфарец Б.П.* О поле направленных излучателей в однородном полупространстве // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 5. С. 954–956.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 2.12.2013

UDK 534.874+534.26

APPROXIMATE METHOD OF THE SOLUTION OF TASKS MULTIPLE DISPERSION IN THE HALF-SPACE

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, RF

Questions of the approximate accounting of multiple dispersion in the conditions of influence of borders of a wave guide are considered. The problem is solved in relation to the spherical radiator which is in a half-space at flat border. Expressions for direct, and also the field once disseminated by a radiator caused by existence of waves reflected from border are presented. The problem is solved in zero approach by means of received before the equipment following from that fact that amplitude of dispersion satisfies to Helmholtz's equation on variables of location of the lens.

Keywords: multiple dispersion, the dispersion amplitude, uniform half-space, the flat border undressed

REFERENCES

1. Gaunaurd J.C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body a plane boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994, vol. 96, no. 4, pp. 2526–2536.
2. Gaunaurd J.C., Huang H., Strifors H.C. Acoustic scattering by a pair of spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, vol. 96, no. 1, pp. 495–507.
3. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Springer, 1998. 334 p.

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*, sharb@mail.ru

Article arrived in edition: 2.12.2013