ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2014, том 24, № 3, с. 80–86

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ

УДК 534.874+534.26

© Б. П. Шарфарец

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МНОЖЕСТВЕННОГО РАССЕЯНИЯ. РЕШЕНИЕ НА ПРИМЕРЕ ИДЕАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

В работе на примере простейшего жидкого слоя с плоскими границами предложен общий достаточно простой приближенный алгоритм расчета поля, образованного рассеянием излученного сторонним источником первичного поля на включении и рассеянием на включении вторичного поля после его однократного отражения от границ волновода. Под вторичным полем понимается поле рассеяния, вызванное падением на включение первичного поля. Задача рассмотрена для включения в виде произвольного сферически симметричного тела, однако это допущение легко обобщается на произвольное включение. Решение этой задачи оказалось возможным благодаря полученному ранее автором алгоритму нахождения суммарной амплитуды рассеяния при падении на включение волны сложной формы. Алгоритм может быть использован в слоисто-неоднородных волноводах при условии однородности слоя, содержащего включение. Задача легко решается и тогда, когда излучатель и включение совмещены.

Кл. сл.: идеальный волновод, слоистый волновод, первичное поле, сферически симметричное включение, поле рассеяния, амплитуда рассеяния, однородное полупространство, плоские границы раздела

ВВЕДЕНИЕ

Задача учета множественного рассеяния в условиях влияния либо границ волновода, либо наличия множества рассеивателей, когда нельзя пренебречь многократным переотражением волн между ними, не является тривиальной. Эта тематика активно рассматривалась в последнее время различными авторами ([1–15] и др.). При этом для решения проблемы приходилось применять довольно громоздкие математические методы.

В настоящей работе предлагается приближенный достаточно простой метод решения задачи множественного рассеяния в плоскослоистом волноводе с границами. Метод основывается на полученном ранее автором результате [16], позволяющем достаточно просто рассчитывать амплитуду рассеяния (АР) произвольного включения при падении на него сложного первичного поля. При этом полагается известной каноническая АР, соответствующая условиям падения на включение плоской волны с текущего направления, имеющей единичную амплитуду и нулевую фазу в центре включения, где обычно помещается начало координат привязанной к включению сферической системы координат.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Алгоритм решения означенной задачи вкратце выглядит так. В волноводе присутствует источник первичного поля с заданными характеристиками и включение, являющееся источником вторичной волны, вызванной рассеянием на нем первичной волны. Если нельзя пренебречь возникновением третичной волны, образованной рассеянием на включении уже многократно переотраженной от границ вторичной волны, то следует говорить о задаче множественного рассеяния (эта задача приблизительно эквивалентна задаче рассеяния первичной волны в свободном пространстве при наличии нескольких включений, когда переотражениями между включениями пренебречь нельзя). В этом случае необходимо рассчитывать как вторичную, так и третичную волны. Если влиянием третичной волны можно пренебречь, то задача сводится к вычислению только вторичной волны. В задаче множественного рассеяния источник первичной волны и включение могут быть как совмещены, так и быть разнесены в пространстве. Учитывая, что при заданных свойствах волновода задачу расчета всех полей можно считать решенной, если известны направленные свойства источника первичной волны и АР включения при излучении вторичного и третичного полей, то задача при известных направленных свойствах первичного поля фактически сводится к вычислению этих АР.

В настоящей работе описанный алгоритм, носящий универсальный характер, для простоты и наглядности применяется к простейшему случаю плоскослоистого волновода — однородному водному слою, ограниченному абсолютно отражающими плоскопараллельными границами с однородными условиями Дирихле и Неймана соответственно на верхней и нижней границах.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАБОТЫ [16]

Вначале кратко изложим основные, используемые ниже, положения работы [16]. Пусть включение находится в свободном пространстве, и начало координат привязано к включению (является либо его геометрическим центром, либо просто находится внутри области, занятой включением). Пусть далее $\tilde{u}_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d})$ — каноническая АР, т. е. АР данного включения в случае, когда на него падает плоская волна, имеющая в начале координат единичную амплитуду и нулевую фазу с волновым вектором $k\mathbf{d}$, где $\mathbf{d}=(\sin\alpha\cos\beta,\sin\alpha\sin\beta,\cos\alpha)$ — единичный вектор, задающий направление распространения плоской волны, k — волновое число. Когда падающая волна $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ в общем случае представляет собой совокупность плоских волн со спектром $g(\mathbf{d})$

$$u_{\text{inc}}(\mathbf{x})=\int\limits_{\Omega'} g(\mathbf{d})e^{ik\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}\mathrm{d}s(\mathbf{d}), \quad (1)$$

то результирующая АР $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ вычисляется следующим образом:

$$u_\infty(\hat{\mathbf{x}})=\int\limits_{\Omega'} g(\mathbf{d})\hat{u}_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d})\,\mathrm{d}s(\mathbf{d}). \quad (2)$$

Здесь Ω' — область определения спектра падающей волны; $\mathrm{d}s(\mathbf{d})=\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$ — элемент поверхности единичной сферы; $\hat{\mathbf{x}}=\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ — вектор на единичной сфере, направленный в точку наблюдения; $u_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ — АР включения, характеризующая угловое распределение поля рассеяния на включении при его облучении полем $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$.

Если функция $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ является решением однородного уравнения Гельмгольца во всем пространстве $\mathbf{x}\in R^3$ (т. н. целое решение), то в ее представлении по плоским волнам (3) участвуют только однородные плоские волны и интегрирование в (1), (2) осуществляется по поверхности единичной сферы $\Omega'=\Omega$ (область видимости). Если же $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ является решением однородного уравнения Гельмгольца только в бесконечной подобласти R^3 и удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности (т. н. излученное решение), то интегрирование в (1), (2) происходит как в области видимости (однородные плоские волны), так и вне ее (неоднородные плоские волны).

Отметим, что в случае, когда область Ω' совпадает с областью видимости $\alpha\in[0,\pi]$, $\beta\in[0,2\pi]$, функция (1) носит название волновой функции Герглотца (Herglotz wave function) [17]. В этой же работе приведены некоторые свойства функции Герглотца.

Далее при рассмотрении АР включения, будем под ней понимать отклик в функции угла прихода плоской волны единичной амплитуды и нулевой фазы в точке геометрического центра включения. Под диаграммной функцией источника первичного поля принимаем амплитуду излученной им плоской волны с нулевой фазой относительно геометрического центра источника в функции угла. В случае когда $u_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ — излученное решение (здесь (R,θ,φ) — координаты относительно центра источника)

$$u_{\text{inc}}(\mathbf{x})=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{u}(k_x,k_y)}{k_z}e^{ik\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y=$$

$$=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\infty}\hat{u}(\mathbf{d})e^{ikR(\sin\alpha\sin\theta\cos(\beta-\varphi)+\cos\alpha\cos\theta)}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha, \quad (3)$$

выражение (2) записывается в виде

$$u_\infty(\theta,\varphi,R_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\infty}\hat{u}(\alpha,\beta)\tilde{u}_\infty(\theta,\varphi,\alpha,\beta)\times$$
$$\times e^{\mathrm{i}kR_0(\sin\alpha\sin\theta_0\cos(\beta-\varphi_0)+\cos\alpha\cos\theta_0)}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \quad (4)$$

Сравнение (4) с (2) дает

$$g(\mathbf{d})=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\hat{u}(\alpha,\beta)e^{\mathrm{i}kR_0(\sin\alpha\sin\theta_0\cos(\beta-\varphi_0)+\cos\alpha\cos\theta_0)}. \quad (5)$$

В (3–5) $\hat{u}(k_x,k_y)$, $\hat{u}(\mathbf{d})$, $\hat{u}(\alpha,\beta)$ — спектр плоских волн (диаграммная функция) первичного поля в записи от различных переменных. В (4) рассматривается геометрия, когда включение находится в начале координат, а источник находится в точке $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)=(R_0,\theta_0,\varphi_0)$.

Далее, согласно [16], функция $u_\infty(\theta,\varphi,R_0,\theta_0,\varphi_0)$ из (4) является решением уравнения Гельмгольца относительно переменных (R_0,θ_0,φ_0) и может быть представлена в виде ряда

$$u_\infty(\theta,\varphi,R_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{e^{\mathrm{i}kR_0}}{R_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)}{(kR_0)^n}, \quad (6)$$

где функции $F_n(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)$ определяются из следующего рекуррентного соотношения:

$$F_n = \frac{1}{2in}\left(\frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\theta_0}\left(\sin\theta_0\frac{\partial}{\partial\theta_0}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_0{}^2}+n(n-1)\right)F_{n-1}, \qquad (7)$$

а F_0 равна

$$F_0(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)=\hat{u}(\theta_0,\varphi_0)\tilde{u}_\infty(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0). \qquad (8)$$

О разложении (6) известно, что при $u_\infty(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)\equiv 1$ оно сходится абсолютно и равномерно при $R_0 \ge R'$; его можно дифференцировать по R_0, θ_0, φ_0 почленно любое число раз и полученные после этого ряды также сходятся абсолютно и равномерно [18]. Здесь R' — радиус наименьшего шара, включающего в себя область D источника первичной волны. При функции $u_\infty(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)$, отличной от константы, этот вопрос требует отдельного рассмотрения, и наверняка можно сказать только то, что асимптотический ряд (6) по обратным степеням волнового параметра kR_0 определяется рекурсией (7), (8) единственным образом в силу единственности представления асимптотическими рядами и удовлетворения функции $u_\infty(\theta,\varphi,R_0,\theta_0,\varphi_0)$ однородному уравнению Гельмгольца в указанной области. А следовательно, и в этом случае ряд (6) позволяет вычислить совокупную АР $u_\infty(\theta,\varphi,R_0,\theta_0,\varphi_0)$ с заданной точностью.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим идеальный волновод с абсолютно отражающими границами. Выражение для поля направленного излучателя в таком волноводе можно получить из выражений для общего случая слоистого волновода [19, 20]. Опуская достаточно простые выкладки, выпишем искомое выражение для поля первичных нормальных волн с точностью до отбрасываемых слагаемых порядка малости $O\left((\xi_n r)^{-\frac{3}{2}}\right)$ и выше для рассматриваемого здесь случая идеального волновода

$$p_{\text{inc}} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{H}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\sum_{n=0}^{\infty}D(\xi_n)\sin(\alpha_n z_0)\sin(\alpha_n z)\times$$
$$\times e^{\mathrm{i}\left(\xi_n r-\frac{\pi}{4}\right)}\xi_n^{-1/2}+O\left((\xi_n r)^{-3/2}\right)\sim$$
$$\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{H}\sqrt{\frac{2\pi}{\xi_n r}}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sin(\alpha_n z_0)D(\xi_n)\times$$
$$\times\left(e^{\mathrm{i}(\xi_n r+\alpha_n z)}-e^{\mathrm{i}(\xi_n r-\alpha_n z)}\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(r,z_0)\left(e^{\mathrm{i}(\xi_n r+\alpha_n z)}-e^{\mathrm{i}(\xi_n r-\alpha_n z)}\right), \qquad (9)$$

где H — глубина волновода; $z=z_0$, $r=0$ — точка локализации источника первичной волны; (r,z) — текущая точка; $\alpha_n=\frac{(n+1/2)\pi}{H}$, $n=0,1,2,...$, — собственные числа поперечной краевой задачи; $\xi_n=\sqrt{k^2-\alpha_n{}^2}$, $D(\xi_n)$ — коэффициенты возбуждения нормальных волн, обусловленные направленностью источника первичных волн; $k=\frac{\omega}{c}$ — волновое число;

$$A_n(r,z_0)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{H}\sqrt{\frac{2\pi}{\xi_n r}}\sin(\alpha_n z_0)D(\xi_n). \qquad (10)$$

Как известно, приближение (9) справедливо в волновой зоне на больших по сравнению с длиной волны расстояниях. Тогда можно считать, что на включение, согласно (9), падает счетная система парных плоских волн с углами падения $\theta_n=\operatorname{arctg}\frac{\xi_n}{\alpha_n}$ и $\pi-\theta_n$, $n=0,1,2,...$. Ограничимся только числом N однородных нормальных волн, определяемых условием $N+1/2<\frac{2H}{\lambda}<N+3/2$. Углы θ_n, $n\le N$, при этом остаются действительными. Выражение (9) для однородных нормальных волн перепишется в виде

$$p_{\text{inc}}\sim\sum_{n=0}^{N}A_n(r,z_0)\left(e^{\mathrm{i}(\xi_n r+\alpha_n z)}-e^{\mathrm{i}(\xi_n r-\alpha_n z)}\right). \qquad (9а)$$

Рассмотрим для простоты в качестве включения произвольное сферически симметричное тело (это допущение не является принципиальным и при необходимости легко распространяется на общий случай канонической АР). Каноническая АР сферически симметричного включения $\tilde{u}_\infty(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{d})$ представляется в виде

$$\tilde{u}_\infty(\Theta)=\sum_{m=0}^{M}b_m P_m(\cos\Theta). \qquad (11)$$

Здесь Θ — угол между единичными векторами $\mathbf{d}=(\sin\theta\cos\varphi_1,\sin\theta\sin\varphi_1,\cos\theta)$ (направление движения плоской падающей волны) и $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = (\sin\gamma\cos\varphi_2, \sin\gamma\sin\varphi_2, \cos\gamma)$ (направление из центра включения в точку наблюдения); b_m — известные коэффициенты; P_m — полиномы Лежандра; M — число, зависящее от волнового параметра ka и, как правило, выбираемое конечным; a — характерный размер включения.

Как известно, косинус угла Θ между двумя единичными векторами $\hat{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{d}$ равен

$$\cos\Theta = \cos\gamma\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta\cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (12)$$

Полагая, что азимут из точки источника первичного поля на точку включения $\varphi_1 = 0$, окончательно получаем

$$\cos\Theta = \cos\gamma\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta\cos\varphi_2. \quad (13)$$

Первичная падающая волна приближенно определяется рядом (9а), (10), т. е. представляет собой сумму взвешенных плоских волн (в данном случае функция $g(\mathbf{d})$ из (1) представляет собой набор взвешенных дельта-функций). Тогда, если на включение падают плоские волны из набора (9а) с векторами нормали $\mathbf{d}^{\pm} = (\sin\theta_n, 0, \pm\cos\theta_n)$ (знак $(+)$ для углов падения θ_n и знак $(-)$ для $\pi - \theta_n$), то соответствующая ей результирующая АР с учетом (2), (9а) и (11) будет иметь вид

$$u_{\infty n}(\gamma,\varphi_2) = A_n(r',z_0)\sum_{m=0}^{M}\Big(b_m \times \\ \times\Big(e^{\mathrm{i}(\xi_n r' + \alpha_n z')}P_m(\cos\Theta_n^+) - e^{\mathrm{i}(\xi_n r' - \alpha_n z')}P_m(\cos\Theta_n^-)\Big)\Big).$$

Здесь (r',z') — точка локализации включения; $\cos\Theta_n^+ = \cos\gamma\cos\theta_n + \sin\gamma\sin\theta_n\cos\varphi_2$; $\cos\Theta_n^- = -\cos\gamma\cos\theta_n + \sin\gamma\sin\theta_n\cos\varphi_2$; $A_n(r',z_0)$ определяется из (10), а также принято во внимание, что $\varphi_1 = 0$.

Теперь, используя последнее выражение, легко получить результирующую АР включения $u_\infty^{(1)}(\gamma,\varphi_2)$, вызванную первичным полем стороннего источника (9а)

$$u_\infty^{(1)}(\gamma,\varphi_2) = \sum_{n=0}^{N} u_{\infty n}(\gamma,\varphi_2) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}\Big(A_n(r',z_0)b_m \times \\ \times\Big(e^{\mathrm{i}(\xi_n r' + \alpha_n z')}P_m(\cos\Theta_n^+) - e^{\mathrm{i}(\xi_n r' - \alpha_n z')}P_m(\cos\Theta_n^-)\Big)\Big). \quad (14)$$

Включение с АР (14), рассеивая первичные волны, является в свою очередь источником вторичного поля, которое также может рассеиваться как на источнике первичного поля, так и на самом включении, переотражаясь многократно от плоских границ волновода, создавая тем самым третичное и последующие поля. Все это приводит к крайне сложной проблеме учета множественного рассеяния.

Для облегчения задачи решим проблему создания третичного поля только самим включением за счет однократного рассеяния вторичного поля от границ волновода, пренебрегая при этом рассеянием на источнике. Таким образом, речь идет о нахождении добавки $u_\infty^{(2)}(\gamma,\varphi_2)$ к ар $u_\infty^{(1)}(\gamma,\varphi_2)$, вызванной рассеянием на включении однократно отразившегося от границ вторичного поля.

Итак, поиск АР $u_\infty^{(2)}(\gamma,\varphi_2)$ формально сводится к следующей задаче: задан источник вторичного поля с АР $u_\infty^{(1)}(\gamma,\varphi_2)$, совмещенный с включением, задана каноническая АР включения $\tilde{u}_\infty(\Theta)$ из (11). Необходимо найти добавку $u_\infty^{(2)}(\gamma,\varphi_2)$, состоящую из двух слагаемых, каждое из которых выражает вклад верхней и нижней границы волновода по отдельности при условии однократного отражения от каждой из границ вторичного поля с АР $u_\infty^{(1)}(\gamma,\varphi_2)$.

Эта задача редуцируется к решению двух самостоятельных задач. В одной из них необходимо решить задачу однократного рассеяния в жидком полупространстве $z \ge 0$ (ось аппликат направлена вниз) поля источника с АР $u_\infty^{(1)}(\gamma,\varphi_2)$ на включении, совмещенном с источником. Коэффициент отражения от границы $z = 0$ обозначим для общности через V_1 (в настоящей работе принято $V_1 = -1$). Акустические свойства жидкого полупространства совпадают со свойствами жидкого слоя. Во второй задаче необходимо решить то же только в полупространстве $z \le H$ с коэффициентом отражения V_2 на границе $z = H$ (в настоящей работе принято $V_2 = 1$). Включение с источником совмещены в пространстве и локализованы в точке $(r = 0, z')$. Эти задачи легко решаются с применением техники, изложенной в работе [16] и коротко приведенной в начале настоящей работы. Пример подобного решения, только для случая, когда $u_\infty^{(1)}(\gamma,\varphi_2)$ соответствует сферической волне, приведен в [21]. Здесь приведем коротко решение для случая полупространства $z \le H$, а для полупространства $z \ge 0$ выпишем конечный результат.

Итак, источник, он же рассеиватель, локализован в точке $(r = 0, z')$. Граница проходит по плоскости $z = H$. Задача эквивалентна следующей.

Оставляя источник поля с АР $u_\infty^{(1)}(\gamma,\varphi_2)$ в исходной точке $(r=0,z')$, мысленно перемещаем рассеиватель зеркально относительно границы $z=H$ в точку $(r=0,2H-z')$. Таким образом, расстояние между источником и рассеивателем равно $R_{02}=2(H-z')$. Угол падения с источника на рассеиватель $\theta_{02}=\pi$. Для слагаемого результирующей АР, учитывающего влияние только нижней границы, $u_\infty^{(2)}{}_2(\gamma,\varphi_2)$, при использовании выражениями (6)–(8) учтем только нулевое приближение:

$$u_\infty^{(2)}{}_2(\gamma,\varphi_2)\approx\frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}}F_0(\gamma,\varphi_2,\theta_0,\varphi_1)=$$
$$=\frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}}\hat{u}(\theta_0,\varphi_0)\tilde{u}_\infty(\gamma,\varphi_2,\theta_0,\varphi_1). \qquad (15)$$

Здесь $\hat{u}(\theta_0=\pi,\varphi_0)$ определяется через $u_\infty^{(1)}(\gamma,\varphi_2)$ из (14) и коэффициент отражения V_2 (см. [21]) следующим образом:

$$\hat{u}(\theta_0=\pi,\varphi_0)=u_\infty^{(1)}(\gamma=\pi,\varphi_2)V_2(\pi)=$$
$$=u_\infty^{(1)}(\gamma=\pi)V(0). \qquad (16)$$

В (16), как видно из (12), (13), $\cos\Theta$ перестает зависеть от φ_2, а функция $V(\pi)=V(0)$. Далее из (11)–(13) имеем $\cos\Theta\big|_{\theta_0=\pi}=-\cos\gamma$, а значит, из (11) имеем

$$\tilde{u}_\infty(\Theta)\big|_{\theta_0=\pi}=\tilde{u}_\infty(\gamma,\varphi_2,\theta_0,\varphi_1)\big|_{\theta_0=\pi}=$$
$$=\sum_{m=0}^{M}b_mP_m(-\cos\gamma). \qquad (17)$$

Учитывая (16) и (17), получаем для $u_\infty^{(2)}{}_2(\gamma,\varphi_2)$:

$$u_\infty^{(2)}{}_2(\gamma,\varphi_2)\approx\frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}}u_\infty^{1}(\gamma=\pi)V_2(0)\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{M}b_mP_m(-\cos\gamma)=u_\infty^{(2)}{}_2(\gamma). \qquad (18)$$

Из (18) видно, что $u_\infty^{(2)}{}_2(\gamma,\varphi_2)$ зависит только от угла падения γ.

Отсюда же очевидно также, что при отражении от границы $z=0$ функция $u_\infty^{(2)}{}_1(\gamma,\varphi_2)$ должна выглядеть следующим образом:

$$u_\infty^{(2)}{}_1(\gamma,\varphi_2)\approx\frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}}u_\infty^{(1)}(\gamma=\pi)V_1(0)\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{M}b_mP_m(\cos\gamma)=u_\infty^{(2)}{}_1(\gamma). \qquad (19)$$

Здесь $R_{01}=2z'$.

Теперь можно выписать окончательное выражение для АР с учетом первичного и вторичного полей:

$$u_\infty(\gamma,\varphi_2)=u_\infty^{(1)}(\gamma,\varphi_2)+u_\infty^{(2)}{}_1(\gamma)+u_\infty^{(2)}{}_2(\gamma), \qquad (20)$$

где соответствующие функции определяются выражениями (14), (18) и (19).

Теперь, когда известна приближенная результирующая АР включения, может быть решена задача о суммарном поле в волноводе. Источник первичного поля, находящийся в точке $(r=0,z_0)$, в рассматриваемом волноводе создает поле (9). Включение, имеющее результирующую АР (20) и находящееся в точке $(r',\varphi=0,z_0)$, создает поле рассеяния p_s, которое может быть рассчитано по известной АР обычным порядком [19, 20, 22]. Суммарное поле $p=p_{inc}+p_s$ в произвольной точке волновода нужно рассчитывать с учетом отсутствия цилиндрической симметрии геометрии задачи.

Несмотря на упрощения рассмотренного частного случая волновода, предложенный подход может быть легко использован в слоисто-неоднородном волноводе при условии, что слой жидкости, содержащий включение, является однородным. В этом случае первичное поле также будет представлять совокупность парных плоских волн, а коэффициенты отражения на границах слоя могут быть легко определены [23]. Кроме того, задача легко решается и тогда, когда излучатель и включение совмещены [21]. При отсутствии сферической симметрии включения никаких сложностей не возникает. В этом случае каноническая АР будет зависеть не от одного угла, как в (11), а от четырех в общем виде $\tilde{u}_\infty(\gamma,\varphi_2,\theta_0,\varphi_1)$ (см., например, (15).

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе на примере идеального плоскослоистого волновода с границами предложен общий, достаточно простой приближенный алгоритм расчета поля рассеяния, вызванного рассеянием первичного поля на включении и рассеянием на включении вторичного поля после его однократного отражения от границ волновода. Такое решение оказалось возможным благодаря полученному ранее автором алгоритму нахождения суммарной амплитуды рассеяния при падении на включение волны сложной формы. Проблема решается для сферически симметричного включения, но легко обобщается на общий вид включения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравцов Ю.А., Кузькин В.М., Петников В.Г.* Дифракция волн на регулярных рассеивателях в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 3. С. 339–343.
2. *Hackman R.H., Sammelmann G.S.* Acoustic scattering in an inhomogeneous waveguide: Theory // J. Acoust. Soc. Am. 1986. Vol. 80, N 5. P. 1447–1458.
3. *Sammelmann G.S., Hackman R.H.* Acoustic scattering in a homogeneous waveguide: Theory // J. Acoust. Soc. Am. 1987. Vol. 82, N 1. P. 324–336.
4. *Hackman R.H., Sammelmann G.S.* Multiple-scattering analysis for a target in an oceanic waveguide // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Vol. 84, N 5. P. 1813–1825.
5. *Белов В.Е., Горский С.М., Зиновьев А.Ю., Хилько А.И.* Применение метода интегральных уравнений к задаче о дифракции акустических волн на упругих телах в слое жидкости // Акуст. журн. 1994. Т. 40, № 4. С. 548–560.
6. *Gaunaurd J.C., Huang H.* Acoustic scattering by a Spherical body a plane boundary // J. Acoust. Soc. Am. 1994. Vol. 96, N 4. P. 2526–2536.
7. *Gaunaurd J.C., Huang H., Strifors H.C.* Acoustic scattering by a pair of spheres // J. Acoust. Soc. Am. 1995. Vol. 96, N 1. P. 495–507.
8. *Лебедев А.В., Хилько А.И.* Рассеяние плоской волны на двух упругих шарах и сферических оболочках // Акуст. журн. 1997. Т. 43, № 4. С. 521–530.
9. *Кузькин В.М.* Об излучении и рассеянии звуковых волн в океанических волноводах // Акуст. журн. 2001. Т. 47, № 5. С. 678–684.
10. *Зацерковный А.В., Сергеев В.С., Шарфарец Б.П.* Использование амплитуды рассеяния для решения задач дифракции волн в полупространстве // Акуст. журн. 2001. Т. 47, № 5. С. 650–656.
11. *Кузькин В.М.* Рассеяние звуковых волн на теле в плоскослоистом волноводе // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 1. С. 77–84.
12. *Шарфарец Б.П.* Метод расчета поля непрозрачного источника и поля рассеяния неоднородного включения в плоскослоистой среде // Акуст. журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 123–128.
13. *Шарфарец Б.П.* Метод решения задачи множественного рассеяния электромагнитных волн в однородной безграничной среде // Научное приборостроение. 2004. Т. 14, №. 4. С. 57–69.
14. *Шарфарец Б.П.* Метод решения задач множественного рассеяния на нескольких телах в однородной безграничной среде // Акуст. журн. 2005. Т. 51, № 5. С. 672–681.
15. *Григорьева Н.С., Фридман Г.М.* Рассеяние звука сферической упругой оболочкой, помещенной в волновод с жидким дном // Акуст. журн. 2013. Т. 59, № 4. С. 424–432.
16. *Шарфарец Б.П.* О возможности эффективного вычисления амплитуды рассеяния на включении в сложном поле // Акуст. журн. 2010. Т. 56, № 2. С. 166–171.
17. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Springer, 1998. 334 p.
18. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с. (Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. New-York, Wiley&Sons, 1983).
19. *Шарфарец Б.П.* Поле направленного излучателя в слоисто-неоднородном волноводе // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 1. С. 119–125.
20. *Шарфарец Б.П.* Поле протяженного источника в регулярном океаническом волноводе // Акуст. журн. 1991. Т. 37, № 4. С. 794–799.
21. *Шарфарец Б.П.* Приближенный метод решения задач множественного рассеяния // Пятая Всероссийская научно-техническая конференция "Технические проблемы освоения мирового океана". Владивосток, 30 сентября–4 октября 2013 г. С. 461–465.
22. *Шарфарец Б.П.* Поле протяженного направленного излучателя в регулярном океаническом волноводе // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 1. С. 132–137.
23. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973. 343 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 21.05.2014

UDK 534.874+534.26

TO THE QUESTION OF THE APPROXIMATE METHOD OF THE DECISION PROBLEMS OF MULTIPLE DISPERSION. THE DECISION ON THE EXAMPLE OF THE IDEAL WAVE GUIDE

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, RF

In work on the example of the elementary liquid layer with flat borders the general rather simple approximate algorithm of calculation of the field formed by dispersion of primary field radiated by a third-party source on inclusion and dispersion on inclusion of a secondary field after its single reflection from borders of a wave guide is offered. The secondary field is understood as the field of dispersion caused by falling on inclusion of primary field. The task is considered for inclusion in the form of any spherically a symmetric body, however this assumption is easily generalized on any inclusion. The solution of this task was possible thanks to the algorithm of stay of total amplitude of dispersion received earlier by the author when falling on inclusion of a wave of a difficult form. The algorithm can be used in layered and non-uniform wave guides on condition of uniformity of the layer containing inclusion. The problem is easily solved and when the radiator and inclusion are combined.

Keywords: ideal wave guide, layered wave guide, primary field, spherically symmetric inclusion, dispersion field, dispersion amplitude, uniform half-space, flat limits of the section

REFERENCES

1. Hackman R.H., Sammelmann G.S. Acoustic scattering in an inhomogeneous waveguide: Theory. J. *Acoust. Soc. Am.*, 1986, vol. 80, no. 5, pp. 1447–1458.
2. Sammelmann G.S., Hackman R.H. Acoustic scattering in a homogeneous waveguide: Theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1987, vol. 82, no. 1, pp. 324–336.
3. Hackman R.H., Sammelmann G.S. Multiple-scattering analysis for a target in an oceanic waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, vol. 84, no. 5, pp. 1813–1825.
4. Gaunaurd J.C., Huang H. Acoustic scattering by a Spherical body a plane boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994, vol. 96, no. 4, pp. 2526–2536.
5. Gaunaurd J.C., Huang H., Strifors H.C. Acoustic scattering by a pair of spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, vol. 96, no. 1, pp. 495–507.
6. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. *Springer*, 1998, 334 p.

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article arrived in edition: 21.05.2014