ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2014, том 24, № 2, с. 61–71

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ПРИБОРОВ И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МЕТОДИК

УДК 681.519.2

© Е. Ю. Бутырский

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ОТКАЗАМИ

В статье рассматриваются алгоритмы обработки информации в дискретных динамических системах с отказами. Для различных математических моделей параметра отказа строятся алгоритмы фильтрации, которые затем обобщаются на задачи обнаружения сигналов на фоне помех и белого шума.

Кл. сл.: динамическая система, отказ, состояние системы, функция, оценка, математическая модель, оптимальная фильтрация, обнаружение, алгоритм

ВВЕДЕНИЕ

Развитие средств вычислительной техники, связанное с появлением высокопроизводительных управляемых ЭВМ, способных работать в реальном масштабе времени, создало предпосылки для использования в прикладных задачах теории управления все более сложных технических систем и алгоритмов обработки информации. Но усложнение алгоритмов обработки приводит к тому, что возрастает возможность появления отказов как в самой динамической системе, так и в канале наблюдения, что обусловливается целым рядом причин [1]. Неучет отказов при синтезе алгоритмов приводит к тому, что качество фильтрации значительно снижается, а при решении задачи обнаружения сигналов — к ухудшению вероятностных характеристик обнаружения. Поэтому актуальной является разработка алгоритмов оптимальной фильтрации и обнаружения, которые обеспечивают устойчивость динамических систем (ДС) к различного рода нарушениям функционирования (отказам).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОТКАЗАМИ

Под отказом будем понимать возможные скачкообразные изменения параметров или структуры динамических систем, происходящие в случайные моменты времени.

Под устойчивостью к отказам понимается способность ДС выполнять свои функции и после возникновения неисправностей.

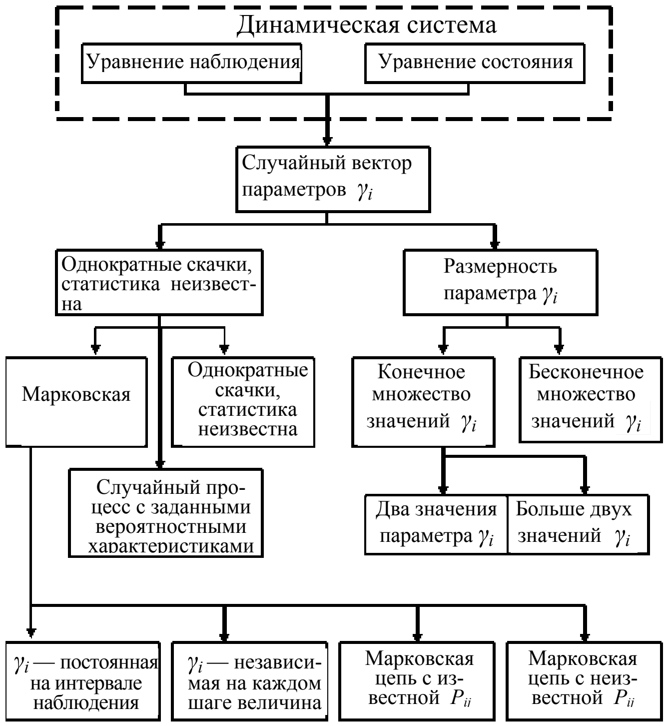
Важнейшим источником нарушений в ДС является канал измерения, основными нарушениями в котором являются [1]:

- случайные пропадания информационных сигналов;
- появление ложных (аномальных) измерений $\mathbf{z}(t)$, не содержащих информации об оптимальном векторе состояния $\mathbf{x}(t)$;
- изменение свойств каналов распространения сигналов;
- резкое возрастание шумов измерений или изменение их характера;
- отказы датчиков и помехи в линиях связи.

Особенностью синтеза алгоритмов обработки информации в ДС с отказами является то, что качественные характеристики эффективности этих алгоритмов трудно получить в замкнутой форме. Это влечет за собой необходимость выполнения в процессе синтеза большого объема вычислений, требуемых для сравнительного анализа эффективности различных алгоритмов. Возрастающие возможности ЭВМ и, как следствие, построение все более сложных алгоритмов обработки информации приводят к росту вероятности тех или иных сбоев в работе алгоритма и ЭВМ. Последнее стимулирует развитие такого направления, как развитие теории отказоустойчивых алгоритмов обработки сигналов и информации, а также теории управления.

Вопросы классификации отказов в динамических системах рассмотрены в [1], и классы показаны на рисунке.

Наличие отказов приводит к тому, что даже для линейных систем с отказами алгоритмы обработки, как правило, являются нелинейными. Тем более это будет иметь место для нелинейных динамических систем. Использование при этих условиях алгоритмов оценивания, не учитывающих возможности появления нарушений в канале измерения, приводит к существенному возрастанию ошибок фильтрации при решении задачи связи, пропуску цели при обнаружении сигналов или



Классификация динамических систем с отказами

срыву слежения в задаче сопровождения. Поэтому важнейшее значение приобретают методы субоптимального оценивания состояния ДС и обработки сигналов, устойчивых к нарушениям в канале измерения. Развитие этих методов является одной из важнейших задач теории оценивания, имеющей большое практическое значение для систем радиолокации, гидроакустики, навигации, связи и управления. Решению этой задачи с учетом ряда ограничений, накладываемых практической реализуемостью алгоритмов, и посвящена предлагаемая статья.

Рассмотрим основные положения теории отказоустойчивых линейных динамических систем. Положим, что ДС описывается уравнениями [1]:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{A}_{i,i+1}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_{i+1,i}\mathbf{u}_i + \mathbf{G}_{i+1,i}\mathbf{n}_{1,i}, \\ \mathbf{z}_i &= \mathbf{H}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{D}_i\mathbf{u}_i + \mathbf{\Psi}_i\mathbf{n}_{0,i}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_i$ — n-мерный вектор состояния системы; $\mathbf{A}_{i+1,i}$ — переходная матрица размера $n \times n$; $\mathbf{u}_i$ — i-й вектор управлений (входа); $\mathbf{B}_{i+1,i}$ — переходная матрица управления размером $n \times p$; $\mathbf{n}_{1,i}$ — случайный r-мерный вектор гауссовских шумов с нулевым средним и корреляционной функцией $\left\langle \left\{ \mathbf{n}_{1,i}\mathbf{n}_{1,i}^{\mathrm{T}} \right\} \right\rangle = \mathbf{N}_1\delta_i$; $\mathbf{G}_{i+1,i}$ — переходная матрица шумов возмущений размера $n \times r$; $\mathbf{z}_i$ — s-мерный вектор наблюдений; $\mathbf{H}_i$ — матрица наблюдений системы размера $s \times n$; $\mathbf{n}_{0,i}$ — случайный i-й вектор гауссовских шумов измерений с нулевым средним и корреляционной матрицей $\left\langle \left\{ \mathbf{n}_{0,i}\mathbf{n}_{0,i}^{\mathrm{T}} \right\} \right\rangle = \mathbf{N}_0\delta_i$; $\mathbf{D}_i, \mathbf{\Psi}_i$ — матрицы системы размера $s \times p$ и $n \times m$ соответственно.

Для полного статистического описания поведения динамической системы необходимо задать плотность распределения вероятностей ее начального состояния $p\left(\mathbf{x}_0\right)$. Так как все случайные переменные, входящие в уравнение (1), гауссовские, то начальное состояние ДС полностью описывается вектором средних $\left\langle \mathbf{x}_0 \right\rangle = \overline{\mathbf{x}}_0$ и корреляционной матрицей $\mathbf{P}_0 = \left\langle \left(\mathbf{x}_0 - \overline{\mathbf{x}}_0\right)\left(\mathbf{x}_0 - \overline{\mathbf{x}}_0\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle$.

Оптимальный дискретный алгоритм оценивания, записанный в форме рекуррентных уравнений Калмана, имеет следующий вид [2, 3]:

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{K}_i\left(\mathbf{z}_i - \mathbf{H}_i\mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_i\right),\\
&\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_{0,i}^{-1},\\
&\mathbf{P}_{i+1} = \overline{\mathbf{P}}_{i+1} - \overline{\mathbf{P}}_{i+1}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{H}_i\overline{\mathbf{P}}_{i+1}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}} + \mathbf{N}_{0,i}\right)^{-1}\overline{\mathbf{P}}_{i+1,i},\\
&\overline{\mathbf{P}}_{i+1} = \mathbf{A}_{i+1}\mathbf{P}_i\mathbf{A}_{i+1,i}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}_{i+1,i}\mathbf{N}_{1,i}\mathbf{G}_{i+1,i}^{\mathrm{T}},\\
&\hat{\mathbf{x}}_0 = \overline{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{P}_0 = \overline{\mathbf{P}}_0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Работа фильтра начинается с введения на основе априорной информации начальных значений $\overline{\mathbf{x}}_0, \overline{\mathbf{P}}_0$ и элементов корреляционных матриц шумов возмущения $\mathbf{N}_{1,i}$ и шумов измерения $\mathbf{N}_{0,i}\pi$.

Оценки вектора состояния вычисляются рекуррентно по мере поступления новых измерений. При этом, как видно из (2), для вычисления текущего значения оценки $\hat{\mathbf{x}}_{i+1}$ нет необходимости запоминать все предыдущие значения $\left(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_{i-1}\right)$, т. к. вся информация о них содержится в оценке $\hat{\mathbf{x}}_i$. Фильтр Калмана, как следует из его структуры, представляет собой динамическую систему с переменным матричным коэффициентом усиления, величина которого зависит от точности текущих оценок и уровня шумов измерения. Текущая оценка, в соответствии с формулой (2), является суммой оценки $\overline{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{A}_{i+1}\hat{\mathbf{x}}_i$ экстраполяции и корректирующей поправки $\mathbf{K}_i\left(\mathbf{z}_i - \mathbf{H}_i\mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_i\right)$. Оценка экстраполяции формируется из оценки фильтрации на предыдущем шаге путем умножения ее на матрицу перехода системы. Матрица перехода описывает свободное движение ДС, т. е. изменение вектора состояния при отсутствии внешних воздействий. Величина поправки определяется тем весом, который придается новым измерениям на текущем шаге оценивания. Этот вес зависит от уровня шумов измерений и текущей точности оценивания, уменьшаясь по мере уточнения оценок. Если шумы возмущения малы, то при $i \to \infty$ величина $\mathbf{K}_i \to 0$, что физически означает бесконечное сужение полосы пропускания. В результате этого фильтр теряет чувствительность к новым данным, и в качестве текущей оценки он начинает постоянно выдавать оценку экстраполяции. Если модель системы известна недостаточно точно, то это свойство калмановского фильтра становится одним из его существенных недостатков, приводящим к расходимости оценки вектора состояния по отношению к его истинному значению на входе фильтра. Пути преодоления этого недостатка рассмотрены в [1, 2, 4].

Анализ влияния сбоев на качество работы калмановского фильтра [1, 4] показал, что ухудшение качества фильтрации при наличии отказов в динамической системе происходит по следующим причинам.

1. Сбои приводят к изменению коэффициента усиления и возрастанию ошибок оценивания, вследствие чего фильтр перестает быть оптимальным и не минимизирует средний квадрат ошибки.

2. За счет скачков оценок, возникающих за счет отказов, нарушаются условия применимости нормальности оценок оценивания.

3. Получаемые оценки не являются линейными относительно наблюдаемых данных.

4. Результаты оценивания зависят от наблюдаемых данных, вследствие чего нельзя априори вычислить коэффициент усиления калмановского фильтра.

Вышесказанное означает, что применение фильтра Калмана при модели динамической системы, в которой реально имеются отказы, является неправомочным и требует модернизации алгоритмов оценивания и учета математической модели отказа в динамических системах.

Для адекватного математического описания ДС с отказами введем случайный вектор параметров $\boldsymbol{\gamma}_i$, характеризующий на данный момент структуру или параметры ДС. Появление отказов приводит к скачкообразному изменению этого вектора. Уравнения состояния и наблюдений ДС оказываются в этом случае зависящими от изменяющегося в случайные моменты времени вектора $\boldsymbol{\gamma}_i$ и в самом общем виде могут быть записаны следующим образом [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\gamma}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{n}_{1,i}\right),\\
&\mathbf{z}_i = \mathbf{h}\left(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\gamma}_i, \mathbf{n}_{0,i}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{h}$ — известные функции.

Для получения конструктивных результатов необходимо конкретизировать статистические характеристики случайного вектора $\boldsymbol{\gamma}_i$ и провести классификацию этих характеристик, на основе которой можно определить более конкретные математические модели ДС с отказами.

Наиболее часто рассматриваются два типа моделей:

- марковские модели, когда значения $\boldsymbol{\gamma}_i$ на отдельных шагах образуют марковскую цепь (или последовательность);
- модели в виде однократных скачков, происходящих в случайные моменты времени и функции распределения для которых неизвестны.

Разбиение моделей отказов ДС на два больших класса удобно при синтезе устойчивых к отказам алгоритмов обработки, поскольку для каждой из моделей используется самостоятельный подход [1, 4].

В общем случае для этих моделей уравнения состояния и наблюдения можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{x}_{i+1} &= \left(\mathbf{A}_{i+1,i} + \mathbf{I}_{i,m_1}\Delta\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_i + \mathbf{n}_{1,i} + \mathbf{I}_{i,m_2}\Delta\mathbf{n}_1,\\ \mathbf{z}_i &= \left(\mathbf{H}_i + \mathbf{I}_{i,m_3}\Delta\mathbf{H}\right)\mathbf{x}_i + \mathbf{n}_{0,i} + \mathbf{I}_{i,m_4}\Delta\mathbf{n}_0,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $\Delta\mathbf{A}$, $\Delta\mathbf{n}_1$, $\Delta\mathbf{H}$, $\Delta\mathbf{n}_0$ — приращения матриц и векторов, возникающие за счет отказов; $\mathbf{I}_{i,m}$ — единичная ступенчатая функция; m_i — неизвестный момент возникновения отказа ($i = 1, 2, 3, 4$).

Уравнения (4) являются частным случаем уравнений (3), в которых случайный параметр $\boldsymbol{\gamma}_i$ принимает только два значения из области задания. Эти уравнения описывают разнообразные явления, возникающие в процессе обработки информации: как внезапные отказы в объекте или канале измерения, маневры сопровождаемых целей при радиолокационном и гидроакустическом наблюдении, появление мешающих сигналов в связи.

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ОТКАЗАМИ

Предположим, что уравнение динамики системы и уравнения наблюдения описываются выражениями (3). Будем полагать, что значения вектора $\boldsymbol{\gamma}_i$ принадлежат конечному множеству $\mathbf{R}_N$, содержащему N элементов, а последовательность $\boldsymbol{\gamma}_i$ образует во времени марковскую цепь с известной матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{P}_{kj} = \mathbf{P}\left[\boldsymbol{\gamma}_{k,i+1} / \boldsymbol{\gamma}_{j,i}\right], \tag{5}$$

из состояния $\boldsymbol{\gamma}_j$ в момент i в состояние $\boldsymbol{\gamma}_k$ в $(i+1)$-й момент времени.

Задача фильтрации заключается в получении оптимальной оценки вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_i$ по наблюдениям $\mathbf{Z}^i = \{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i-1}, ..., \mathbf{z}_1\}$, которая удовлетворяет критерию минимума среднеквадратичного значения ошибки и приводит к оценкам условного среднего

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \left\langle \mathbf{x}_i / \mathbf{Z}^i \right\rangle. \tag{6}$$

Качество оценок определяется условной корреляционной матрицей ошибок оценивания:

$$\mathbf{P}_i = \left\langle \left(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i\right)\left(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i\right)^{\mathrm{T}} / \mathbf{Z}^i \right\rangle. \tag{7}$$

В связи с необходимостью оценки вектора параметров $\boldsymbol{\gamma}_i$ сформулированная задача является задачей нелинейной фильтрации даже в тех случаях, когда уравнения состояния и наблюдений ДС линейны. Оценивание $\boldsymbol{\gamma}_i$ означает идентификацию типа структуры ДС в текущий момент времени.

В целях упрощения записей примем следующие сокращения.

Обозначим событие, что на i-м шаге вектор параметров $\boldsymbol{\gamma}$ принимает значения $\boldsymbol{\gamma}_i$ через Γ_i^k, $k = \overline{1, N}$. В этих обозначениях выражение (5) для матрицы переходных вероятностей однородной марковской цепи записывается следующим образом: $\mathbf{P}_{kl} = \mathbf{P}\left[\Gamma_l^k / \Gamma_{l-1}^k\right]$.

Конкретную реализацию последовательности значений γ_i, начиная с первого шага, обозначим как $\bar{\Gamma}_i^k$. С учетом этого можно записать следующее соотношение: $\bar{\Gamma}_i^k = \left\{\Gamma_i^k, \bar{\Gamma}_{i-1}^k\right\}$.

Для определения всех возможных реализаций вектора параметров $\boldsymbol{\gamma}_i$ от начала наблюдения на текущий момент включительно необходимо задать Γ_i^k для всех наборов последовательности индексов — $\left(k_i, k_{i-1}, ..., k_1\right)$, причем общее число таких реализаций равно величине N^i. Обозначим пространство этих реализаций, содержащее N^i, через Ω_i.

Синтезируем теперь алгоритм оптимальной фильтрации для вычисления оценки $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} = \left\langle \mathbf{x}_i / \mathbf{Z}^i \right\rangle$. Используя сглаживающие свойства условного среднего, можно записать выражение для апостериорной плотности вероятностей оцениваемого вектора состояния динамической системы следующим образом:

$$\begin{aligned} f\left(\mathbf{x}_i / \mathbf{Z}_k^i\right) &= \left\langle f\left(\mathbf{x}_i / \mathbf{Z}_k^i, \bar{\Gamma}_i^k / \mathbf{Z}_i^k\right)\right\rangle = \\ &= \sum_{\bar{\Gamma}\in\Omega_i} f\left(\mathbf{x}_i / \mathbf{Z}_k^i, \bar{\Gamma}_i^k\right) P\left(\bar{\Gamma}_i^k / \mathbf{Z}_k^i\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где $f\left(\mathbf{x}_\mathbf{i} / \mathbf{Z}_k^i, \bar{\Gamma}_i^k\right)$ — условная плотность распределения вероятностей вектора $\mathbf{x}_i$ для фиксированных реализаций $\mathbf{Z}_k^i$ и $\bar{\Gamma}_i^k$, а $P\left(\bar{\Gamma}_i^k / \mathbf{Z}_k^i\right)$ — апостериорная вероятность реализации $\bar{\Gamma}_i^k$.

Искомая оценка $\hat{\mathbf{x}}_i$ с учетом (8) определяется выражением [1]

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \sum_{l\in N^i} \hat{\mathbf{x}}_i^{(l)} P\left(\bar{\Gamma}_i^k / \mathbf{Z}_k^i\right), \tag{9}$$

где $\hat{\mathbf{x}}_i^{(l)} = \left\langle \mathbf{x}_i / \mathbf{Z}_l^i, \bar{\Gamma}_i^k \right\rangle$ — оптимальная оценка, полученная для конкретной реализации последовательности $\bar{\Gamma}_i^k$ и удовлетворяющая критерию минимума СКО; $P\left(\bar{\Gamma}_i^k / \mathbf{Z}_k^i\right)$ — условная вероятность этой реализации.

Оценку $\hat{\mathbf{x}}_i^{(l)}$ — называют частной оценкой вектора состояния $\mathbf{x}_i$. Из выражения (9) следует, что оптимальная оценка вектора состояния ДС образуется как взвешенная сумма частных оценок, полученных для каждой реализации последовательности значений вектора параметров $\boldsymbol{\gamma}_k$. Весовые коэффициенты являются апостериорными вероятностями этих реализаций. Так как число реализаций $\bar{\Gamma}_i^k$ с течением времени возрастает экспоненциально, то оптимальный фильтр требует бесконечно растущего объема памяти и поэтому нереализуем.

Апостериорная вероятность того, что случайный параметр $\boldsymbol{\gamma}_k$ принимает значение $\bar{\Gamma}_i^k$, рассчитывается в соответствии с выражениями [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{x}}_i=\sum\hat{\mathbf{x}}_i^{(l)}\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_i^k/\mathbf{Z}_k^i\right),\\
&\mathbf{P}_{kj}=\mathbf{P}\left[\Gamma_i^k/\Gamma_{i-1}^j\right],\\
&\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_i^k/\mathbf{Z}_k^i\right)=\\
&=\frac{f\left[\mathbf{z}_i/\bar{\Gamma}_i^k,\mathbf{Z}_k^{i-1}\right]\mathbf{P}_{kj}}{\sum\limits_{\mathbf{n}\in\Omega_\mathbf{i}}f\left[\mathbf{z}_i/\bar{\Gamma}_i^k,\mathbf{Z}_k^{i-1}\right]\mathbf{P}\left[\bar{\Gamma}_i^k/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right]}\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_{i-1}^j,\mathbf{Z}_k^{i-1}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

В выражении (10) $\hat{\mathbf{x}}_i^{(l)}=\left\langle\mathbf{x}_i/\mathbf{Z}_l^i,\,\bar{\Gamma}_i^k\right\rangle$ — оптимальная оценка, полученная для конкретной реализации последовательности $\bar{\Gamma}_i^k$ и удовлетворяющая критерию минимума среднеквадратичного значения ошибки, а $\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_i^k/\mathbf{Z}_k^i\right)$ — условная вероятность этой реализации. Система уравнений (10) связывает значения апостериорных вероятностей $\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_i^k/\mathbf{Z}_k^i\right)$ на данном шаге с их значениями $\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_{i-1}^j/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right)$ на предыдущем шаге и результатами текущих измерений. Зависимость величины $\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_i^k/\mathbf{Z}_k^i\right)$ от вектора отказов $\boldsymbol{\gamma}_k$ делает во всех случаях фильтр, определяемый выражением (10), нелинейным.

Корреляционная матрица ошибок оптимального оценивания в общем случае определяется выражением

$$\mathbf{P}_i=\sum_{n\in\Omega_i}\mathbf{P}\left[\bar{\Gamma}_i^n/\mathbf{Z}_k^i\right]\Big\{\mathbf{P}_i\left[i,\bar{\Gamma}_i^n\right]+
+\left(\hat{\mathbf{x}}_i^{(n)}-\hat{\mathbf{x}}_i\right)\left(\hat{\mathbf{x}}_i^{(n)}-\hat{\mathbf{x}}_i\right)^{\mathrm{T}}\Big\}.\qquad(11)$$

Объединяя воедино выражения (10) и (11), получаем систему уравнений, определяющую алгоритм оптимальной фильтрации в ДС с отказами (1):

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{x}}_i=\sum\hat{\mathbf{x}}_i^{(l)}\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_k^i/\mathbf{Z}_k^i\right),\\
&\mathbf{x}_i^{(l)}=\left\langle\mathbf{x}_i/\mathbf{Z}_l^i,\bar{\Gamma}_k^i\right\rangle,\\
&\mathbf{P}_{kj}=\mathbf{P}\left[\Gamma_i^k/\Gamma_{i-1}^j\right],\\
&\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_k^i/\mathbf{Z}_k^i\right)=\\
&=\frac{f\left[\mathbf{z}_i/\bar{\Gamma}_k^i,\mathbf{Z}_k^{i-1}\right]\mathbf{P}_{kj}}{\sum\limits_{\mathbf{n}\in\Omega_i}f\left[\mathbf{z}_i/\bar{\Gamma}_k^i,\mathbf{Z}_k^{i-1}\right]\mathbf{P}\left[\bar{\Gamma}_k^i/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right]}\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_j^{i-1},\mathbf{Z}_k^{i-1}\right),\\
&\mathbf{P}_i=\sum_{n\in\Omega_i}\mathbf{P}\left[\bar{\Gamma}_i^n/\mathbf{Z}_k^i\right]\Big\{\mathbf{P}_i\left[i,\bar{\Gamma}_i^n\right]+\\
&\qquad+\left(\hat{\mathbf{x}}_i^{(n)}-\hat{\mathbf{x}}_i\right)\left(\hat{\mathbf{x}}_i^{(n)}-\hat{\mathbf{x}}_i\right)^{\mathrm{T}}\Big\}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Из выражения (12) следует, что алгоритм оптимальной фильтрации в случае, когда значения вектора параметров $\boldsymbol{\gamma}_k$ образуют марковскую цепь, сводится к следующей последовательности вычислений.

1. На основании принятой реализации измерений $\mathbf{z}_i$ рассчитываются частные оценки вектора $\mathbf{x}_i^{(l)}$, которые строятся с учетом математической модели ДС и согласуются с конкретной реализацией последовательности нарушений $\bar{\Gamma}_k^i$.

2. На основании четвертого уравнения (12) находятся значения весовых коэффициентов (апостериорные плотности вероятности) $\mathbf{P}\left(\bar{\Gamma}_k^i/\mathbf{Z}_k^i\right)$.

3. В соответствии с первым уравнением системы (12) вычисляется результирующая оценка вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_i$.

4. Рассчитывается корреляционная матрица оценивания $\mathbf{P}_i$, после чего все вычисления повторяются.

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ-ОБНАРУЖЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ОТКАЗАМИ

Рассмотрим задачу фильтрации-обнаружения. Предположим, что имеет место следующая модель динамической системы и наблюдения:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{x}_{i+1}&=\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_i,\gamma_i,\mathbf{n}_{1,i}\right),\\
\mathbf{z}_i&=\mathbf{h}\left(\theta\mathbf{s}_i,\mathbf{x}_i,\gamma_i,\mathbf{n}_{0,i}\right),
\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

где $\mathbf{s}_i$ — некоторый сигнал (для определенности положим — детерминированный); θ — детерминированная и неизвестная величина, принимающая значение 1 или 0; $\mathbf{x}_i$ — помеха. Требуется, исходя из математических моделей формирующего шума $\mathbf{n}_{1,i}$ и шума наблюдения $\mathbf{n}_{0,i}\,\mathbf{n}_{1,i}$, синтезировать оптимальный алгоритм обнаружения сигнала $\mathbf{s}$.

Оптимальный приемник обнаружения сигнала на фоне марковской помехи и белого шума структурно состоит из 2 каналов фильтрации марковской помехи соответственно при гипотезах наличия и отсутствия сигнала, а также — индикатора обнаружения, который вычисляет отношение правдоподобия (или оценивание параметра θ), и блока принятия решения [5–8].

Таким образом, если экстраполировать этот результат на ДС с отказами, то для определения отношения правдоподобия требуется вычислять оценку помехи, соответствующую значению параметрической переменной $\gamma = 1$ при гипотезах наличия и отсутствия сигнала в реализации $\hat{\mathbf{x}}_1^{(l)}$ и $\hat{\mathbf{x}}_0^{(l)}$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{1,i}^{(l)} &= \left\langle \mathbf{x}_i / \mathbf{Z}_l^i, \mathbf{s}_i, \overline{\Gamma}_i^k, \theta = 1 \right\rangle,\\ \hat{\mathbf{x}}_{0,i}^{(l)} &= \left\langle \mathbf{x}_i / \mathbf{Z}_k^i, \overline{\Gamma}_i^k, \theta = 0 \right\rangle.\end{aligned} \tag{14}$$

Добавив к этим выражениям уравнение для вычисления отношения правдоподобия $\mathbf{L}_i$, получаем систему уравнений для решения задачи фильтрации-обнаружения:

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{x}}_{1,i} = \sum_{k\in N^i} \hat{\mathbf{x}}_{1,i}^{(l)} \mathbf{P}\left(\overline{\Gamma}_i^k / \mathbf{Z}_1^i\right),\\
&\hat{\mathbf{x}}_{0,i} = \sum_{k\in N^i} \hat{\mathbf{x}}_{0,i}^{(l)} \mathbf{P}\left(\overline{\Gamma}_i^k / \mathbf{Z}_1^i\right),\\
&\mathbf{x}_{1,i}^{(l)} = \left\langle \mathbf{x}_i / \mathbf{Z}_l^i, \mathbf{s}_i, \overline{\Gamma}_i^l, \theta = 1 \right\rangle,\\
&\mathbf{x}_{0,i}^{(l)} = \left\langle \mathbf{x}_i / \mathbf{Z}_l^i, \overline{\Gamma}_i^l, \theta = 0 \right\rangle,\\
&\mathbf{P}\left(\overline{\Gamma}_i^k / \mathbf{Z}_1^i\right) = \frac{f\left[\mathbf{z}_i / \overline{\Gamma}_i^k, \mathbf{Z}_1^{i-1}\right]\mathbf{P}_{ij}}{\sum\limits_{\mathbf{n}\in\Omega_i} f\left[\mathbf{z}_i / \overline{\Gamma}_i^k, \mathbf{Z}_1^{i-1}\right]\mathbf{P}\left[\overline{\Gamma}_i^k / \mathbf{Z}_1^{i-1}\right]} \mathbf{P}\left(\overline{\Gamma}_{i-1}^j, \mathbf{Z}_1^{i-1}\right),\\
&\mathbf{P}_i = \sum_{n\in\Omega_i} \mathbf{P}\left[\overline{\Gamma}_i^n / \mathbf{Z}_1^i\right]\left\{\mathbf{P}_i\left[i, \overline{\Gamma}_i^n\right] + \left(\hat{\mathbf{x}}_i^{(n)} - \hat{\mathbf{x}}_i\right)\left(\hat{\mathbf{x}}_i^{(n)} - \hat{\mathbf{x}}_i\right)^{\mathrm{T}}\right\},\\
&\mathbf{P}_{kl} = \mathbf{P}\left[\Gamma_i^k / \Gamma_{i-1}^l\right],\\
&\mathbf{L}_{i+1} = \mathbf{L}_i + \left(2\mathbf{z}_i - \mathbf{s}_i - \hat{\mathbf{x}}_{1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{0,i}\right)\mathbf{N}_{0,i}^{-1}\left(\mathbf{s}_i + \hat{\mathbf{x}}_{1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{0,i}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Алгоритм оптимальной фильтрации-обнаружения в динамической системе с отказами сводится к выполнению следующей последовательности операций.

1. На основании принятой реализации наблюдений рассчитываются частные оценки вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_{1,i}^{(l)}, \hat{\mathbf{x}}_{0,i}^{(l)}$ динамической системы при гипотезах наличия и отсутствия сигнала в принятой реализации.

2. На основании пятого уравнения системы (15) находятся значения весовых коэффициентов $\mathbf{P}\left(\overline{\Gamma}_k^i / \mathbf{Z}_k^i\right)$.

3. Из 1-го и 2-го уравнений системы (15) вычисляются $\hat{\mathbf{x}}_{1,i}$ и $\hat{\mathbf{x}}_{0,i}$, соответствующие гипотезам наличия и отсутствия сигнала в наблюдении.

4. По 6-й формуле системы (15) рассчитывается корреляционная матрица ошибок оценивания.

5. Вычисляется отношение правдоподобия, после чего все вычисления повторяются.

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ В ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ОТКАЗАМИ

Рассмотрим линейную динамическую систему с отказами в канале измерения. Исследование такого типа отказов имеет большое практическое значение как при решении задач оценивания состояния ДС, так и обработки информации в локации, навигации и связи.

Пусть динамическая система описывается уравнением вида

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{A}_{i+1,i}\mathbf{x}_i + \mathbf{n}_{1,i}, \\ \mathbf{z}_i &= \mathbf{H}_i\mathbf{x}_i + \gamma_i\mathbf{G}_i\mathbf{n}_{0,i}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{режим нормальной работы,} \\ \sigma \gg 1, & \text{аномальное измерение.} \end{cases} \tag{17}$$

Для заданной модели ДС найдем практически реализуемые субоптимальные алгоритмы оценивания вектора состояния при различных моделях параметрической переменной γ_k. Рассмотрим алгоритм оценивания состояния ДС при $\gamma_k = \mathrm{const}$ на интервале наблюдения.

В этом случае параметр γ_k определяется выражением

$$\gamma_k = \gamma = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } q, \\ \sigma, & \text{с вероятностью } 1-q. \end{cases} \tag{18}$$

Так как общее число возможных реализаций последовательностей значений величины γ_k в этом случае равно 2 (либо все значения $\gamma_k = 1$, либо $\gamma_k = \sigma$), то, воспользовавшись общей формулой (10), получим следующее выражение для оптимального алгоритма фильтрации:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i^{(1)}\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^i\right) + \hat{\mathbf{x}}_i^{(\sigma)}\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^i\right). \tag{19}$$

Здесь $\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)}$, $\hat{\mathbf{x}}_i^{(\sigma)}$ — частные оценки, полученные при условии, что в уравнении наблюдений (16) величина γ_k равна 1 и σ соответственно. Эти оценки вычисляют по рекуррентным формулам фильтра Калмана:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^{(1)} = \mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)} + \mathbf{P}_i^{(1)}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_{0,i}^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(1)}, \tag{20}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^{(\sigma)} = \mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_i^{(\sigma)} + \mathbf{P}_i^{(\sigma)}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\left[\sigma^2\mathbf{N}_{0,i}\right]^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)}, \tag{21}$$

где $\tilde{\mathbf{z}}_i^{(k)} = \mathbf{z}_i - \mathbf{H}_i\hat{\mathbf{x}}_i^{(k)}$ — "обновляющий процесс"; $\mathbf{P}_i^{(k)}$ — корреляционная матрица ошибок фильтрации, которая вычисляется в соответствии с выражением [1]

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_i^{(k)} = \overline{\mathbf{P}}_i - \overline{\mathbf{P}}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{H}_i\overline{\mathbf{P}}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}} + k^2\mathbf{N}_{0,i}\right)^{-1}\mathbf{H}_i\overline{\mathbf{P}}_i, \\ &k = 1,\ \sigma; \end{aligned} \tag{22}$$

$\overline{\mathbf{P}}_i$ — корреляционная матрица ошибок экстраполяции

$$\overline{\mathbf{P}}_i = \mathbf{A}_{i-1,i}\mathbf{P}_{i-1}^{(k)}\mathbf{A}_{i-1,i}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}_{i-1,i}\mathbf{N}_{1,i}\mathbf{G}_{i-1,i}^{\mathrm{T}}.$$

Для вычисления $\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^i\right)$ и $\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^i\right)$, которые представляют апостериорные вероятности соответствующих значений переменной γ, можно воспользоваться 2-м выражением системы (10). В результате получим формулу

$$\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right) = \Lambda_i\frac{\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right)}{\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right)}\left[1 + \frac{\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right)}{\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right)}\Lambda_i\right]^{-1} \tag{23}$$

с начальным условием $\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^i\right) = q$ и отношением правдоподобия Λ_i.

Это отношение можно рассчитать рекуррентным способом, учитывая, что плотности вероятностей вида $f\left(\mathbf{z}_i/k,\ \mathbf{Z}_k^{i-1}\right)$, $k = 1,\ \sigma$, входящие в 3-ю формулу системы (10), — гауссовские с параметрами, определяемыми соотношением [1]

$$f\left(\mathbf{z}_i, \mathbf{Z}_k^{i-1}\right) = N\left\{\mathbf{H}_i\hat{\mathbf{x}}_i,\ \mathbf{H}_i\mathbf{P}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}} + \mathbf{N}_{0,i}\right\}.$$

С учетом последнего отношение правдоподобия Λ_i представим в следующем виде:

$$\Lambda_i = \\ = \left[\frac{\det\tilde{\mathbf{P}}_i^{(\sigma)}}{\det\tilde{\mathbf{P}}_i^{(1)}}\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1,\sigma}\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}\left[\tilde{\mathbf{P}}_i^{(k)}\right]^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(k)}\right\}. \tag{24}$$

$\tilde{\mathbf{P}}_i^{(k)}$ — корреляционная матрица обновляющего процесса ($k = 1,\ \sigma$), которая вычисляется фильтром Калмана в соответствии с выражением

$$\tilde{\mathbf{P}}_i^{(k)} = \mathbf{H}_i\overline{\mathbf{P}}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}} + k^2\mathbf{N}_{0,i},\quad k = 1,\ \sigma.$$

Матрицы $\mathbf{P}_i^{(k)}$ вычисляются с помощью фильтра Калмана. Окончательно структурная схема представляется в виде двух параллельно работающих фильтров Калмана, которые вычисляют оценки в соответствии с алгоритмами (20) и (21). Обновляющие процессы $\tilde{\mathbf{z}}_i^{(k)}$ используются для расчета весовых коэффициентов $\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^i\right)$ и $\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^i\right)$ по формулам (15)–(17). Результирующая оценка $\hat{\mathbf{x}}_i$ получается как взвешенная сумма (12).

В условиях нормального функционирования канала измерения $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^i\right)\to 1$, а $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^i\right)\to 0$, поэтому 2-й канал со временем отключается и рассматриваемый фильтр превращается в одноканальный фильтр Калмана, настроенный на режим нормальной работы ($\gamma = 1$). Если же канал измерения находится в состоянии отказа ($\gamma = \sigma$), то $\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^i\right) \to 0$, а результирующая оценка формируется только за счет величины $\hat{\mathbf{x}}_i^{(\sigma)}$. При $\sigma >> 1$ коэффициент усиления 2-го фильтра $\mathbf{K}_i^{(\sigma)} \to 0$, и, следовательно, результирующая оценка получается путем экстраполяции соответствующих оценок, запоминаемых в этом фильтре.

Данную структуру можно рассматривать также как адаптивную систему совместного обнаружения-оценивания сигнала $\mathbf{x}_i$, для которой необходимо иметь априорную информацию путем задания исходной вероятности исправного состояния канала q.

Сводка формул, описывающая алгоритм фильтрации при постоянных значениях параметрической переменной $\gamma = \text{const}$ на интервале наблюдения для ДС (16), имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i^{(1)}\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^i\right) + \hat{\mathbf{x}}_i^{(\sigma)}\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^i\right),\\
&\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^{(1)} = \mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_i^{(1)} + \mathbf{P}_i^{(1)}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_{0,i}^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(1)},\\
&\hat{\mathbf{x}}_{i+1}^{(\sigma)} = \mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_i^{(\sigma)} + \mathbf{P}_i^{(\sigma)}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\left[\sigma^2\mathbf{N}_{0,i}\right]^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(\sigma)},\\
&\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right) = \Lambda_i\frac{\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right)}{\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right)}\left[1 + \frac{\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right)}{\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^{i-1}\right)}\Lambda_i\right]^{-1},\\
&\mathbf{P}_i^{(k)} = \bar{\mathbf{P}}_i - \bar{\mathbf{P}}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{H}_i\bar{\mathbf{P}}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}} + k^2\mathbf{N}_{0,i}\right)^{-1}\mathbf{H}_i\bar{\mathbf{P}}_i,\\
&\bar{\mathbf{P}}_i = \mathbf{A}_{i-1,i}\mathbf{P}_{i-1}^{(k)}\mathbf{A}_{i-1,i}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}_{i-1,i}\mathbf{N}_{1,i}\mathbf{G}_{i-1,i}^{\mathrm{T}},\\
&\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{H}_i\bar{\mathbf{P}}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}} + k^2\mathbf{N}_{0,i},\\
&\Lambda_i = \left[\frac{\det\mathbf{P}_i^{(\sigma)}}{\det\mathbf{P}_i^{(1)}}\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1,\sigma}\left(\tilde{\mathbf{z}}_i^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{P}_i^{(k)}\right]^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(k)}\right\},\\
&k = 1,\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Рассмотрим динамическую систему с отказами следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_{i+1,i}\mathbf{x}_i + \mathbf{n}_{1,i},\\
&\mathbf{z}_i = \theta\mathbf{s}_i + \mathbf{H}_i\mathbf{x}_i + \gamma_i\mathbf{G}_i\mathbf{n}_{0,i}.
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Решим задачу обнаружения детерминированного сигнала на фоне помехи $\mathbf{x}_i$ и белого гауссовского шума, спектральная плотность которого меняется в соответствии с изменениями параметра γ_i, принимающего два значения 1 или σ на интервале наблюдения. Алгоритм обнаружения детерминированного сигнала при условии наличия отказов в канале измерения представляется четырехканальной схемой и блоками вычисления отношения правдоподобия и принятия решения. Причем первые два канала реализуют вычисление помехи при гипотезе наличия сигнала, а вторые — гипотезе его отсутствия. Два канала необходимо, чтобы реализовать вычисление оценки помехи как результат взвешенного суммирования частных оценок. Система из 15 описывающих уравнений чисто технически разбита на два массива $\aleph$ (уравнения 1–6) и $\prod$ (уравнения 7–15) (27):

$$\left.\begin{aligned}
&\aleph,\\
&\Pi,
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

где

$$\aleph = \begin{cases}
\hat{\mathbf{x}}_{1,i} = \hat{\mathbf{x}}_{1,i}^{(1)}\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^i,\mathbf{s}_i,\theta=1\right) + \hat{\mathbf{x}}_{1,i}^{(\sigma)}\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^i,\mathbf{s}_i,\theta=1\right), & 1.\\
\hat{\mathbf{x}}_{0,i} = \hat{\mathbf{x}}_{0,i}^{(1)}\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^i,\theta=0\right) + \hat{\mathbf{x}}_{0,i}^{(\sigma)}\mathbf{P}\left(\gamma=\sigma/\mathbf{Z}_k^i,\theta=0\right), & 2.\\
\hat{\mathbf{x}}_{1,i+1}^{(1)} = \mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_{1,i}^{(1)} + \mathbf{P}_i^{(1)}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_{0,i}^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_{1,i}^{(1)}, & 3.\\
\hat{\mathbf{x}}_{0,i+1}^{(1)} = \mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_{0,i}^{(1)} + \mathbf{P}_i^{(1)}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_{0,i}^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_{0,i}^{(1)}, & 4.\\
\hat{\mathbf{x}}_{1,i+1}^{(\sigma)} = \mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_{1,i}^{(\sigma)} + \mathbf{P}_i^{(\sigma)}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\left[\sigma^2\mathbf{N}_{0,i}\right]^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_{1,i}^{(\sigma)}, & 5.\\
\hat{\mathbf{x}}_{0,i+1}^{(\sigma)} = \mathbf{A}_{i+1,i}\hat{\mathbf{x}}_{0,i}^{(\sigma)} + \mathbf{P}_i^{(\sigma)}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\left[\sigma^2\mathbf{N}_{0,i}\right]^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_{0,i}^{(\sigma)}, & 6.
\end{cases}$$

$$
\Pi = \begin{cases}
\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1},\mathbf{s}_i,\theta=1\right) = \Lambda_{1,i}\dfrac{\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1},\mathbf{s}_i,\theta=1\right)}{\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^{i-1},\mathbf{s}_i,\theta=1\right)}\left[1+\dfrac{\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1},\mathbf{s}_i,\theta=1\right)}{\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^{i-1},\mathbf{s}_i,\theta=1\right)}\Lambda_i\right]^{-1}, & 7. \\
\mathbf{P}\left(\gamma=1/\mathbf{Z}_k^{i-1},\theta=0\right) = \Lambda_{i,0}\dfrac{\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1},\theta=0\right)}{\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^{i-1},\theta=0\right)}\left[1+\dfrac{\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^{i-1},\theta=0\right)}{\mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^{i-1},\theta=0\right)}\Lambda_i\right]^{-1}, & 8. \\
\mathbf{P}_i^{(k)} = \overline{\mathbf{P}}_i - \overline{\mathbf{P}}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{H}_i\overline{\mathbf{P}}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}} + k^2\mathbf{N}_{0,i}\right)^{-1}\mathbf{H}_i\overline{\mathbf{P}}_i, & 9. \\
\overline{\mathbf{P}}_i = \mathbf{A}_{i-1,i}\mathbf{P}_{i-1}^{(k)}\mathbf{A}_{i-1,i}^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}_{i-1,i}\mathbf{N}_{1,i}\mathbf{G}_{i-1,i}^{\mathrm{T}}, & 10. \\
\tilde{\mathbf{P}}_i^{(k)} = \mathbf{H}_i\overline{\mathbf{P}}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}} + k^2\mathbf{N}_{0,i}, & 11. \\
\Lambda_{1,i} = \left[\dfrac{\det\mathbf{P}_i^{(\sigma)}}{\det\mathbf{P}_i^{(1)}}\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\sum_{k=1,\sigma}\left(\tilde{\mathbf{z}}_{1,i}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{P}_i^{(k)}\right]^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_{1,i}^{(k)}\right\}, & 12. \\
\Lambda_{0,i} = \left[\dfrac{\det\mathbf{P}_i^{(\sigma)}}{\det\mathbf{P}_i^{(1)}}\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\sum_{k=1,\sigma}\left(\tilde{\mathbf{z}}_{0,i}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{P}_i^{(k)}\right]^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_{0,i}^{(k)}\right\}, & 13. \\
k=1,\ \sigma, & 14. \\
\mathbf{L}_{i+1} = \mathbf{L}_i + \left(2\mathbf{z}_i - \mathbf{s}_i - \hat{\mathbf{x}}_{1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{0,i}\right)\mathbf{N}_{0,i}^{-1}\left(\mathbf{s}_i + \hat{\mathbf{x}}_{1,i} - \hat{\mathbf{x}}_{0,i}\right). & 15.
\end{cases}
$$

Таким образом, алгоритм фильтрации-обнаружения в динамической системе с отказами сводится к выполнению следующих операций.

1. На основании принятой реализации $\mathbf{z}_i$ и предыдущих оценок помехи и матрицы ошибок фильтрации $\mathbf{P}_i^{(k)}$ рассчитываются частные оценки $\hat{\mathbf{x}}_{1,i}^{(k)}$ и $\hat{\mathbf{x}}_{0,i}^{(k)}$ вектора помехи (уравнения 3 и 4 системы (27)).

2. По уравнениям (10) и системы (27) вычисляется корреляционная матрица ошибок экстраполяции $\overline{\mathbf{P}}_i$.

3. По уравнениям (9) и системы (27) вычисляется корреляционная матрица ошибки фильтрации $\mathbf{P}_i^{(k)}$.

4. Вычисляется корреляционная матрица $\tilde{\mathbf{P}}_i^{(k)}$ обновляющих процессов $\tilde{\mathbf{z}}_i^{(k)}$ (уравнение 11 системы (27)).

5. Вычисляются отношения правдоподобия $\Lambda_{1,i}$ и $\Lambda_{0,i}$ (уравнения 12 и 13 системы (27)).

6. По уравнениям 7 и 8 системы (27) с учетом значений, полученных на предыдущем шаге, вычисляются значения весовых коэффициентов:

$$\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^i,\mathbf{s}_i,\theta=1\right),\ \mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^i,\mathbf{s}_i,\theta=1\right),$$
$$\mathbf{P}\left(1/\mathbf{Z}_k^i,\theta=0\right) \text{ и } \mathbf{P}\left(\sigma/\mathbf{Z}_k^i,\theta=0\right).$$

7. Вычисляются результирующие оценки $\hat{\mathbf{x}}_{1,i}$, $\hat{\mathbf{x}}_{0,i}$ марковской помехи при гипотезах наличия и отсутствия сигнала $\mathbf{s}_i$ в принятой реализации (уравнения 1 и 2 системы (27)).

8. Вычисляется отношение правдоподобия (последнее уравнение системы (27)), после чего все вычисления повторяются.

9. Из анализа системы уравнений (27) видно, что оптимальный алгоритм обнаружения в целом и его каналы фильтрации в частности являются существенно нелинейными, т. к. при вычислении корреляционных матриц фильтрации и экстраполяции используются наблюдаемые данные. Поэтому нельзя использовать процедуру предварительного вычисления корреляционной матрицы ошибок (следовательно, и коэффициента усиления фильтра).

ПРИМЕР МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОТКАЗАМИ

Для иллюстрации полученных теоретических результатов приведем пример моделирования скалярной динамической системы следующего вида:

$$\begin{cases} x_{i+1} = \alpha x_i + n_{1,i}, \\ z_i = x_i + \gamma_i n_{0,i}, \end{cases} \quad \gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{с} \quad q_i = 0.2, \\ 10, & \text{с} \quad p_i = 0.8, \end{cases}$$

где γ_i — независимая на каждом шаге случайная последовательность, $\alpha = 0.9$, $Q_i = 4 \cdot 10^{-4}$, $R_i = 25 \cdot 10^{-4}$.

Задача фильтрации

Используя систему уравнений (27), получим следующие соотношения для субоптимальной фильтрации:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + p_i^{(1)} K_i^{(1)} \tilde{z}_i, \\ &K_i^{(k)} = p_i^{(1)} \frac{\overline{P}_i}{\overline{P}_i + R_i k^2}, \quad k = 1,\ \sigma, \\ &p_i^{(1)} = \frac{f_i^{(1)} q_i}{f_i^{(1)} q_i + f_i^{(\sigma)} (1 - q_i)}, \\ &P_{i+1} = \overline{P}_i - K_i^{(1)} \overline{P}_i + \frac{1 - p_i^{(1)}}{p_i^{(1)}} \left(K_i^{(1)}\right)^2 S_i, \\ &\overline{P}_i = \alpha^2 P_i + Q_i, \\ &S_i = (z_i - \alpha \hat{x}_i)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Учитывая, что плотности вероятности, входящие в формулу для определения $p_i^{(1)}$, являются гауссовскими, то ее после несложных преобразований можно записать в виде

$$\begin{cases} p_i^{(1)} = q_i T_i^{(1)} \left(q_i T_i^{(1)} + \sqrt{\dfrac{K_i^{(1)}}{K_i^{(\sigma)}}} (1 - q_i) T_i^{(\sigma)} \right)^{-1}, \\ T_i^{(1)} = \exp\left\{ -\dfrac{1}{2} \dfrac{(z_i - \alpha \hat{x}_i)^2}{\overline{P}_i + R_i k} \right\}, \quad k = 1,\ \sigma. \end{cases}$$

Задача обнаружения

При тех же самых условиях рассмотрим математическую модель задачи обнаружения сигнала s (фильтрация параметра θ):

$$\begin{cases} x_{i+1} = \alpha x_i + n_{1,i}, \\ z_i = \theta s_i + x_i + \gamma_i n_{0,i}, \end{cases} \qquad \gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{с} \quad q_i = 0.2, \\ 10, & \text{с} \quad p_i = 0.8. \end{cases}$$

Параметр обнаружения $\theta = 1$ при наличии сигнала в принятой реализации и $\theta = 0$ — в альтернативном случае.

Учитывая, что при решении задачи фильтрации-обнаружения оптимальный алгоритм представляется в виде двухканальной структуры, первый канал которой оценивает помеху при наличии сигнала в принятой реализации, а второй при ее отсутствии, получаем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{x}_{1,i+1} = \hat{x}_{1,i} + p_i^{(1)} K_i^{(1)} \left(2 z_i - s_i - \hat{x}_{1,i}\right), \\ &\hat{x}_{0,i+1} = \hat{x}_{0,i} + p_i^{(1)} K_i^{(1)} \left(z_i - \hat{x}_{0,i}\right), \\ &K_i^{(k)} = p_i^{(1)} \frac{\overline{P}_i}{\overline{P}_i + R_i k^2}, \quad k = 1,\ \sigma, \\ &p_i^{(1)} = q_i T_i^{(1)} \left(q_i T_i^{(1)} + \sqrt{\frac{K_i^{(1)}}{K_i^{(\sigma)}}} (1 - q_i) T_i^{(\sigma)} \right)^{-1}, \\ &T_i^{(k)} = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(z_i - \alpha \hat{x}_i)^2}{\overline{P}_i + R_i k^2} \right\}, \\ &P_{i+1} = \overline{P}_i - K_i^{(1)} \overline{P}_i + \frac{1 - p_i^{(1)}}{p_i^{(1)}} \left(K_i^{(1)}\right)^2 (z_i - \alpha \hat{x}_i)^2, \\ &\overline{P}_i = \alpha^2 P_i + Q, \\ &L_{i+1} = \left(2 z_i - s_i - \hat{x}_{0,i} - \hat{x}_{1,i}\right) R^{-1} \left(s_i + \hat{x}_{1,i} - \hat{x}_{0,i}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Задачи: резюме

На основании соотношений (28) было проведено математическое моделирование. Отказы канала измерения проявляются в виде значительного увеличения амплитуды и в данном случае являются аномальными измерениями.

Анализ результатов моделирования показывает.

1. Субоптимальный фильтр дает очень хорошее приближение получаемой оценки к истинному значению.

2. Оценка, получаемая калмановским фильтром, за счет аномальных измерений значительно отличается от истинного значения, что объясняется тем, что фильтр за счет аномальных измерений не успевает войти в стационарный режим работы.

3. Обе зависимости рассчитаны по 100 реализациям оценок фильтрации, при фиксированной последовательности γ_i.

4. Сравнение точностных характеристик показывает, что при появлении отказов в канале измерений субоптимальный фильтр имеет существенное преимущество перед фильтром Калмана.

5. В момент появления отказа величина $p_i^{(1)}$ резко падает, что влечет за собой пропорциональное уменьшение коэффициента фильтра. Поэтому фильтр резко теряет чувствительность к вновь поступающим данным и в качестве текущей оценки выдает оценку экстраполяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гришин Ю.П., Казаринов Ю.М.* Динамические системы, устойчивые к отказам. М.: Радио и связь, 1985. 174 с.
2. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана—Бьюси. М.: Наука, 1982. 200 с.
3. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
4. *Красовский А.А. и др.* Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. 711 с.
5. *Сосулин Ю.Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978. 320 с.
6. *Сосулин Ю.Г., Паршин Ю.Н.* Оценочно-корреляционно-компенсационные алгоритмы обнаружения многомерных сигналов // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, №8. С. 1635–1643.
7. *Бутырский Е.Ю.* Обнаружение широкополосного гидроакустического сигнала на фоне реверберационной помехи // Материалы межвузовской НТК "Военная радиоэлектроника". Петродворец, ВВМУРЭ им. А.С. Попова, 1996.
8. *Бутырский Е.Ю.* Обнаружение сигнала на фоне реверберационной помехи // Сб. трудов НИИ "Нептун". СПб.: НИИ "Нептун", 2001. С. 10.

Санкт-Петербургский государственный университет

Контакты: *Бутырский Евгений Юрьевич*, evgenira88@mail.ru

Материал поступил в редакцию 29.08.2013

DYNAMIC SYSTEM WITH REFUSAL

Eu. Yu. Butyrsky

Sankt-Petersburg State University

Algorithms information handling are considered In article in discrete dynamic system with from-казами. For different mathematical models of the parameter of the refusal are built algorithms to filtering, which for-that are generalised on problems of the finding signal on background of the hindrances and white noise.

Keywords: dynamic system, refusal, condition of the system, function, estimation, mathematical model, optimum filtering, finding, algorithm

Contacts: *Butyrsky Eugeny Yurievich*, evgenira88@mail.ru

Article arrived in edition: 29.08.2013