ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2014, том 24, № 2, с. 27–32

УДК 534.131.2

© Б. П. Шарфарец

О РЕШЕНИИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ТЕРМОУПРУГОЙ ТРУБКЕ С ПОМОЩЬЮ НЕСВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

Получены несвязанные уравнения типа Кирхгофа, позволяющие решать связанные линеаризованные уравнения термоупругости для твердых тел и связанные уравнения системы Навье—Стокса для вязкой теплопроводящей жидкости как в стационарном, так и в нестационарном случаях. Уравнения записаны для скалярных потенциалов смещения твердого тела и скорости в жидкости, а также для полей температуры в твердом теле и жидкости. Полученные уравнения предоставляют дополнительные возможности для расчетов указанных полей в упругих областях, контактирующих с жидкостью.

Кл. сл.: вязкая теплопроводная сжимаемая жидкость, термоупругость, уравнение Кирхгофа, связанные уравнения

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] описана математическая модель, позволяющая рассчитывать стационарные температурные поля и поля упругих колебаний в термоупругой трубке и вязкой теплопроводящей сжимаемой жидкости при условии связанности упругих и тепловых процессов. При решении задачи о движении жидкости в трубке использовалась система связанных уравнений Навье—Стокса и теплопереноса. И если в случае, когда жидкость занимает неограниченное пространство, решение связанной системы уравнений получается достаточно просто [2, 3], то в случае, описанном, например, в [1], аналитическое решение такой системы становится крайне проблематичным в силу существенного различия краевых задач для упругих и температурных компонентов поля. Отметим, что в [2, 3] упругие и температурные компоненты поля описывались через единые собственные функции оператора Лапласа. В рассматриваемой в [1] постановке задачи такой подход несправедлив в силу связанности продольных и поперечных компонент упругих полей (на границах сред происходит взаимная трансформация продольных волн в поперечные и обратно).

Существует, однако, возможность перехода от системы связанных уравнений второго порядка для потенциальных составляющих поля и температуры в упругой трубке и в жидкости к одному уравнению — т. н. уравнению Кирхгофа [2]. Это уравнение относительно либо температуры, либо скалярного потенциала скорости жидкости (деформации упругого твердого тела). Уравнение Кирхгофа уже является уравнением четвертого порядка (в полном согласии с принципом сохранения трудностей).

Представляет интерес получение системы несвязанных уравнений типа Кирхгофа в такой мультифизичной задаче, каковой является движение вязкой теплопроводной жидкости в термоупругой трубке.

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Таким образом, необходимо получить уравнение Кирхгофа линеаризованной задачи для случая вязкой теплопроводной жидкости, находящейся в термоупругой трубке.

Напомним постановку краевой задачи о течении вязкой теплопроводной жидкости в термоупругой трубке [1].

Пусть в состоянии равновесия (покоя) жидкость характеризуется параметрами (используем индекс 0): $\mathbf{v}_0$, p_0, ρ_0, T_0 (соответственно скорость, давление, плотность, абсолютная температура). Возмущенное состояние будем характеризовать штрихованными добавками с порядком приближения, равным количеству штрихов, а именно: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + \mathbf{v}'' + \ldots$, $p = p_0 + p' + p'' + \ldots$, $\rho = \rho_0 + \rho' + \rho'' + \ldots$, $T = T_0 + T' + \ldots$. Аналогично и для вводимых ниже параметров $\gamma = \gamma_0 + \gamma' + \ldots$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha' + \ldots$, $\eta = \eta_0 + \eta' + \ldots$, $\varsigma = \varsigma_0 + \varsigma' + \ldots$ и т. д.

В работе [3] приведена стандартная линеаризованная система уравнений Навье—Стокса

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{c_0^{\,2}\rho_0}{\gamma_0}\left(\alpha_0 \frac{\partial T'}{\partial t} - \nabla\cdot\mathbf{v}'\right), \qquad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla p' + \eta_0 \Delta \mathbf{v}' + \left(\varsigma_0 + \frac{\eta_0}{3}\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{v}', \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla\cdot\mathbf{v}' = 0 . \qquad (3)$$

В [1] приведено также линеаризованное уравнение теплопереноса, полученное изначально в [3],

$$\Delta T' - \frac{1}{\chi_0}\frac{\partial T'}{\partial t} = -\frac{\alpha_0 T_0}{\kappa_0}\frac{\partial p'}{\partial t},$$

однако здесь представим его несколько в другом виде, следуя методике преобразования общего уравнения теплопереноса, приведенной в работе [2]. Линейная часть общего уравнения теплопереноса [4, с. 272]

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla s\right) = \sigma'\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nabla\cdot\left(\kappa \nabla T\right)$$

в сжимаемой жидкости имеет вид

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = \kappa_0 \Delta T',$$

т. к. все отброшенные члены носят порядок выше первого. Здесь s — энтропия единицы массы жидкости; κ — коэффициент теплопроводности жидкости; $\sigma' = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \varsigma\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$ — вязкий тензор напряжений; η, ς — соответственно коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости; c_0 — равновесная скорость звука в жидкости.

Представим энтропию s в переменных T, V (здесь V — удельный объем, или объем единицы массы $V = \frac{1}{\rho}$): $\mathrm{d}s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$. Тогда

$$\rho T\frac{\partial s}{\partial t} = \rho T\left(\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T \frac{\partial V}{\partial t}\right).$$

Учитывая соотношения [5, с. 185–187] $T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V = c_V$, $\left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \alpha/\beta$, запишем предыдущее выражение в виде

$$\rho T\frac{\partial s}{\partial t} = \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \rho T\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial V}{\partial t} = \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} - T\frac{1}{\rho}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Здесь $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — термодинамический коэффициент расширяемости; $\beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ — термодинамический коэффициент сжимаемости; c_p, c_V — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно.

Из линеаризованного уравнения неразрывности (3) имеем $\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla\cdot\mathbf{v}'$. С учетом этого последнее выражение в линеаризованном виде запишется

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = \rho_0 c_{V0}\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{T_0\alpha_0}{\beta_0}\nabla\cdot\mathbf{v}'.$$

В итоге уравнение теплопереноса в линейном приближении примет вид

$$\Delta T' - \frac{\rho_0 c_{V0}}{\kappa_0}\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{1}{\kappa_0}\frac{T_0\alpha_0}{\beta_0}\nabla\cdot\mathbf{v}'.$$

Это выражение совпадает с уравнением (2.148) работы [2]. Положив $c_V = c_p/\gamma$, а кроме того, используя выражение [2, с 87] $c_p - c_V = c_V\left(\gamma - 1\right) = \frac{T\alpha^2}{\rho\beta}$ и следующее из него равенство $\frac{T\alpha}{\beta} = \rho\frac{c_V\left(\gamma-1\right)}{\alpha}$, перепишем последнее уравнение теплопереноса в виде

$$\Delta T' - \frac{1}{\chi_0\gamma_0}\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\left(\gamma_0 - 1\right)}{\alpha_0\gamma_0\chi_0}\nabla\cdot\mathbf{v}'. \qquad (4)$$

Это выражение уже совпадает с полученным иначе выражением (12) работы [3] с точностью до гармоничности процесса в указанной работе.

Для сокращения выкладок необходимо представить вектор колебательной скорости $\mathbf{v}'$ в виде суммы потенциалов

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_l + \mathbf{v}'_t = \mathrm{grad}\Phi + \mathrm{rot}\boldsymbol{\Psi}. \qquad (5)$$

Здесь $\mathbf{v}'_l$, $\mathbf{v}'_t$ — продольная и поперечная составляющие колебательной скорости соответственно; Φ, $\boldsymbol{\Psi}$ — ее скалярный и векторный потенциалы. Подставляя (5) в (1), (2), получаем:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{c_0^{\,2}\rho_0}{\gamma_0}\left(\alpha_0\frac{\partial T'}{\partial t} - \Delta\Phi\right) \qquad (6)$$

и

$$\rho_0\frac{\partial \nabla\Phi}{\partial t} = -\nabla p' + \eta_0\nabla\Delta\Phi + \left(\varsigma_0 + \frac{\eta_0}{3}\right)\nabla\Delta\Phi,$$

или

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -p' + \left(\varsigma_0 + \frac{4\eta_0}{3} \right) \Delta\Phi . \qquad (7)$$

Из выражения (7) следует полезное выражение для p'

$$p' = \left(\varsigma_0 + \frac{4\eta_0}{3} \right) \Delta\Phi - \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} . \qquad (8)$$

Дифференцируя (7) по t и подставляя в него значение $\frac{\partial p'}{\partial t}$ из (6), получаем

$$\frac{c_0^{\,2}}{\gamma_0} \Delta\Phi + \frac{\left(\varsigma_0 + \frac{4\eta_0}{3} \right)}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{c_0^{\,2}}{\gamma_0} \alpha_0 \frac{\partial T'}{\partial t} .$$

Вводя обозначение $\xi = \left(\varsigma_0 + \frac{4\eta_0}{3} \right) \Big/ \rho_0$, где ξ — совокупный коэффициент вязкости, перепишем последнее уравнение в виде

$$\left(1 + \frac{\gamma_0 \xi}{c_0^{\,2}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta\Phi - \frac{\gamma_0}{c_0^{\,2}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \alpha_0 \frac{\partial T'}{\partial t} . \qquad (9)$$

Наконец, подставляя в (4) выражение (5), получаем

$$\Delta T' - \frac{1}{\chi_0 \gamma_0} \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{(\gamma_0 - 1)}{\alpha_0 \gamma_0 \chi_0} \Delta\Phi . \qquad (10)$$

После применения операции rot к обеим частям (2) получаем стандартное уравнение для векторного потенциала в вязкой жидкости

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} = \eta_0 \Delta \mathbf{\Psi} . \qquad (11)$$

Выражения (9)–(11) полностью описывают в линейном приближении поведение вязкой теплопроводной жидкости. Причем связанными остаются выражения (9) и (10) для скалярного потенциала Φ и температуры T'. Векторный потенциал $\mathbf{\Psi}$ подчиняется автономному параболическому уравнению (11).

Далее получим уравнения Кирхгофа. Вначале рассмотрим более простой гармонический случай. Пусть имеет место гармонический процесс с фактором $e^{-i\omega t}$ (далее фактор $e^{-i\omega t}$ опущен и выписаны выражения для амплитуд соответствующих величин при сохранении обозначений). Выражения (9)–(11) преобразуются к виду

$$\Delta\Phi + \beta_1 \Phi = -\frac{\mathrm{i}\omega\alpha_0}{\beta_3} T' . \qquad (12)$$

Уравнение (10) в гармоническом случае преобразуется к виду

$$\Delta T' + i\omega \frac{1}{\chi_0 \gamma_0} T' = \frac{(\gamma_0 - 1)}{\alpha_0 \gamma_0 \chi_0} \Delta\Phi .$$

Из (12) находим

$$\Delta\Phi = -\beta_1 \Phi - \frac{\mathrm{i}\omega\alpha_0}{\beta_3} T' .$$

После подстановки этого выражения в предыдущее получаем

$$\Delta T' + \beta_2 T' = \frac{(1 - \gamma_0)\beta_1}{\alpha_0 \chi_0 \gamma_0} \Phi . \qquad (13)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\beta_1 = \gamma_0 \omega^2 / \left(c_0^{\,2} \beta_3 \right),$$

$$\beta_2 = \mathrm{i}\omega \frac{\beta_3 + \gamma - 1}{\chi_0 \gamma_0 \beta_3},$$

$$\beta_3 = 1 - \mathrm{i}\omega\gamma_0 \frac{\left(\varsigma_0 + \frac{4\eta_0}{3} \right)}{\rho_0 c_0^{\,2}}.$$

Выражения (12), (13) представляют собой связанную систему уравнений относительно температуры T' и скалярного потенциала Φ в гармоническом случае и совпадают с выражениями [3, (14, 15)]. Получим из них уравнения Кирхгофа для обеих переменных. Для скалярного потенциала Φ

$$\left[(\Delta + \beta_2)(\Delta + \beta_1) + \frac{\mathrm{i}\omega\alpha_0}{\beta_3} \frac{(1 - \gamma_0)\beta_1}{\alpha_0 \chi_0 \gamma_0} \right] \Phi = 0 \qquad (14)$$

и для температуры

$$\left[(\Delta + \beta_1)(\Delta + \beta_2) + \frac{\mathrm{i}\omega\alpha_0}{\beta_3} \frac{(1 - \gamma_0)\beta_1}{\alpha_0 \chi_0 \gamma_0} \right] T' = 0 \qquad (15)$$

получаем в силу коммутации операторов $(\Delta + \beta_1)$ и $(\Delta + \beta_2)$ совершенно идентичные уравнения Кирхгофа для гармонического случая.

Для (11) в гармоническом случае получаем уравнение [1, 2]

$$\left(\Delta + k_3^{\,2} \right) \mathbf{\Psi} = 0 , \qquad k_3 = \frac{1 + \mathrm{i}}{\delta_v} . \qquad (16)$$

Здесь $\delta_v = \sqrt{2\nu_0 / \omega}$ — глубина проникновения вязкой волны.

Для связанных уравнений термоупругости в упругой теплопроводящей трубке имеем [1, 6]

$$\Delta T' + \mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{\Lambda} + \Theta\right)T' = \mathrm{i}\omega\Theta\left(k'_1\right)^2\varphi\,, \qquad (17)$$

$$\Delta\varphi + \left(k'_1\right)^2\varphi = \frac{\Gamma}{\lambda_1 + 2\mu_1}T'\,. \qquad (18)$$

Здесь введены обозначения: φ, $\boldsymbol{\psi}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения в трубке; λ_1, μ_1 — упругие модули Ламе для трубки; ρ_1 — ее плотность; $\Gamma = (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_t$ — термомеханическая постоянная; α_t — коэффициент линейного термического расширения; $\Lambda = \dfrac{\kappa_1}{c_\varepsilon}$ — коэффициент температуропроводности; κ_1 — коэффициент теплопроводности трубки; c_ε — удельная теплоемкость при постоянной деформации; $\Theta = \dfrac{\Gamma T_0}{\kappa_1}$; T_0 — равновесная температура тела; $\left(k'_1\right)^2 = \dfrac{\omega^2}{\left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)/\rho_1}$.

Вводя обозначение

$$\beta_4 = \mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{\Lambda} + \Theta\right),$$

перепишем (17) в виде

$$\Delta T' + \beta_4 T' = \mathrm{i}\omega\Theta\left(k'_1\right)^2\varphi\,. \qquad (17а)$$

На основании выражений (17а) и (18) получаем для упругой трубки уравнения типа Кирхгофа:

$$\left[\left(\Delta + \left(k'_1\right)^2\right)\left(\Delta + \beta_4\right) - \mathrm{i}\omega\Theta\left(k'_1\right)^2\frac{\Gamma}{\lambda_1 + 2\mu_1}\right]T' = 0, \qquad (19)$$

$$\left[\left(\Delta + \beta_4\right)\left(\Delta + \left(k'_1\right)^2\right) - \frac{\Gamma}{\lambda_1 + 2\mu_1}\mathrm{i}\omega\Theta\left(k'_1\right)^2\right]\varphi = 0. \qquad (20)$$

Для векторного потенциала $\boldsymbol{\psi}$ легко получить [1]

$$\left(\Delta + {k'_3}^2\right)\boldsymbol{\psi} = 0\,, \qquad {k'_3}^2 = \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2. \qquad (21)$$

Здесь $c_t = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\rho_1}}$ — скорость поперечных колебаний в упругом теле.

Таким образом, несвязанные уравнения (14)–(16) определяют оба потенциала колебательной скорости и температуру в жидкости, а (19)–(21) определяют оба потенциала смещения и температуру в твердом теле. К уравнениям (14)–(16), характеризующим поля в жидкости, необходимо добавить выражение, определяющее давление. Для этого преобразуем уравнение (8) применительно к гармоническому случаю:

$$p' = \left(\varsigma_0 + \frac{4\eta_0}{3}\right)\Delta\Phi + \mathrm{i}\omega\rho_0\Phi\,. \qquad (22)$$

При решении несвязанных уравнений (14)–(16), (22), а также (19)–(21) необходимо учитывать механические и тепловые краевые условия задачи, подробно описанные в [1].

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ВРЕМЕННО́Й ЗАВИСИМОСТИ ПРОЦЕССА

Исходными для дальнейших преобразований примем уравнения (9) и (10).

Введем следующие дифференциальные операторы:

$$L_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t) = \left(1 + \frac{\gamma_0\xi}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta - \frac{\gamma_0}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,,$$

$$L_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t) = \Delta - \frac{1}{\chi_0\gamma_0}\frac{\partial}{\partial t}\,,$$

$$L_3(\partial_t) = \alpha_0\frac{\partial}{\partial t}\,,$$

$$L_4(\partial_{\mathbf{x}}) = \frac{\left(\gamma_0 - 1\right)}{\alpha_0\gamma_0\chi_0}\Delta\,.$$

Тогда уравнения (9) и (10) перепишутся в операторном виде так:

$$L_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)\Phi = L_3(\partial_t)T'\,, \qquad (23)$$

$$L_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)T' = L_4(\partial_{\mathbf{x}})\Phi\,. \qquad (24)$$

После умножения уравнения (23) на оператор $L_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)$ слева получаем (очевидно, что операторы коммутируют вследствие постоянства коэффициентов)

$$L_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)L_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)\Phi = L_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)L_3(\partial_t)T' = L_3(\partial_t)L_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)T' = L_3(\partial_t)L_4(\partial_{\mathbf{x}})\Phi.$$

Тогда окончательное уравнение типа Кирхгофа для скалярного потенциала имеет вид

$$\left[L_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t)L_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_t) - L_3(\partial_t)L_4(\partial_{\mathbf{x}})\right]\Phi = 0\,. \qquad (25)$$

Аналогичным путем получаем уравнение типа Кирхгофа для температуры T':

$$L_1(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t)L_2(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t)T' = L_1(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t)L_4(\partial_{\mathbf{x}})\Phi =$$
$$= L_4(\partial_{\mathbf{x}})L_1(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t)\Phi = L_4(\partial_{\mathbf{x}})L_3(\partial_t)T',$$

или в компактном виде

$$\left[L_1(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t)L_2(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t) - L_4(\partial_{\mathbf{x}})L_3(\partial_t)\right]T' = 0 . \qquad (26)$$

Дифференциальные операторы в (25) и (26) полностью совпадают, вследствие того что составляющие их операторы являются коммутирующими. Отметим, что уравнения (25), (26) так же, как и в стационарном случае, имеют четвертый порядок по пространственной координате.

Таким образом, поле в жидкости полностью задается скалярным потенциалом, определяемым из (25), векторным потенциалом, определяемым уравнением (11), температурным полем, определяемым уравнением (26), и полем давления (8).

Рассмотрим уравнения типа Кирхгофа в нестационарном случае для упругого твердого тела. Общие уравнения термоупругости для твердого тела при отсутствии источников записываются так [6, с. 1, 24]:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu_1 \Delta \mathbf{u} + (\lambda_1 + \mu_1)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \mathit{\Gamma}\nabla T',$$

$$\Delta T' - \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial T'}{\partial t} = \Theta\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Последние уравнения запишем через потенциалы φ и $\boldsymbol{\psi}$ (см. [1]):

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \mathit{\Gamma} T', \qquad c_l^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1},$$

$$\Delta\boldsymbol{\psi} - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = 0, \qquad c_t^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1},$$

$$\Delta T' - \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial T'}{\partial t} = \Theta\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Поступая так же, как для случая нестационарного процесса в жидкости, имеем

$$\left[L_6(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t)L_5(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t) - L_7 L_8(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t)\right]\varphi = 0, \qquad (27)$$

$$\left[L_5(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t)L_6(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t) - L_8(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t)L_7\right]T' = 0. \qquad (28)$$

Здесь операторы имеют следующий вид:

$$L_5(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t) = \Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_6(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t) = \Delta - \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial}{\partial t},$$

$$L_7 = \mathit{\Gamma}, \qquad L_8(\partial_{\mathbf{x}},\partial_t) = \Theta\Delta\frac{\partial}{\partial t}.$$

Таким образом, взамен связанных уравнений термоупругости выписаны несвязанные уравнения типа уравнения Кирхгофа для твердого термоупругого тела, позволяющие получить в нем все характеристики полей.

ВЫВОДЫ

Таким образом, получены несвязанные уравнения типа Кирхгофа, позволяющие решать связанные линеаризованные уравнения термоупругости для твердых тел и связанные уравнения системы Навье—Стокса для вязкой теплопроводящей сжимаемой жидкости как в стационарном, так и в нестационарном случаях. Уравнения записаны для скалярных потенциалов смещения твердого тела и скорости в жидкости, а также для полей температуры в твердом теле и жидкости. Полученные уравнения позволяют рассчитывать все нужные компоненты волновых полей в термоупругой твердой среде и в вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости. Это предоставляет дополнительные возможности для расчетов указанных полей в упругих областях, контактирующих с жидкостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарфарец Б.П., Князьков Н.Н., Пашовкин Т.Н.* О математической постановке задачи движения вязких сжимаемых теплопроводящих жидкостей в термоупругой трубке // Научное приборостроение. 2013. Т. 23, № 4. С. 85–90.
2. *Акуличев В.А., Алексеев В.Н., Буланов В.А.* Периодические фазовые превращения в жидкостях. М.: Наука, 1986. 280 с.
3. *Doinikov A.A.* Acoustic radiation force on a spherical particle in a viscous heat-conducting fluid. I. General formula // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 101, nu. 2. P. 713–721.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
5. *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. М.: Наука, 1971. 939 с.
6. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 15.10.2013

ABOUT THE SOLUTION OF THE LINEARIZED PROBLEM OF MOVEMENT OF VISCOUS HEAT-CONDUCTING LIQUID IN THE THERMOELASTIC TUBE BY MEANS OF KIRCHHOFF'S UNTIED EQUATIONS

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg, RF

The untied equations like Kirchhoff, allowing to solve the connected linearized equations of thermoelasticity for solid bodies and the connected equations of system of Navier—Stokes for viscous heat-conducting liquid both in stationary, and in non-stationary cases are received. The equations are written down for scalar potentials of shift of a solid body and speed in liquid, and also for temperature fields in a solid body and liquid. The received equations give additional opportunities for calculations of the specified fields in the elastic areas contacting to liquid.

Keywords: viscous heat conducting compressible fluid, thermoelasticity, Kirchhoff's equation, coupled equations

REFERENCES

1. Doinikov A.A. Acoustic radiation force on a spherical particle in a viscous heat-conducting fluid. I. General formula. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997, vol. 101, nu. 2, pp. 713–721.

Contacts: *Sharfarets Boris Pinkusovich*,
sharb@mail.ru

Article arrived in edition: 15.10.2013