

УДК 681.787.7

© Е. Е. Майоров, В. Т. Прокопенко

ВЫВОД АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ РАЗНОСТИ ХОДА ЛУЧЕЙ, ПРОШЕДШИХ ИНТЕРФЕРОМЕТР ЖАМЕНА

Выбран интерферометр Жамена для функционирования системы обработки голографических интерферограмм с применением двухчастотного излучения. Приведены оптическая схема прохождения световых лучей через пластины интерферометра Жамена и схема к расчету разности хода лучей в интерферометре. Получены результаты анализа интерферометра в строгом изложении. Выведено аналитическое выражение для разности фаз лучей, прошедших интерферометр Жамена.

Кл. сл.: голографическая интерферограмма, интерферометр, показатель преломления, фазовый сдвиг, проекция угла

ВВЕДЕНИЕ

Для экспериментальных исследований наиболее универсальными методами являются методы когерентной оптики, а именно методы голографической интерферометрии. Эти методы позволяют решать такую задачу, как исследование напряженно-деформированного состояния объектов с диффузной поверхностью. Голографическая интерферометрия является высокоинформативным и высокоточным инструментом получения данных. Уникальность методов голографической интерферометрии обусловлена ее возможностями. Эти методы позволяют [1–7]:

- проводить исследования статических и динамических процессов;
- не предъявлять требований к качеству поверхности контролируемых объектов;
- производить сравнение волновых полей, существовавших в различные моменты времени;
- получать информацию об исследуемом процессе как в количественном, так и качественном аспектах;
- воспроизводить трехмерную видеокопию изучаемого объекта.

Со времени первых шагов голографической интерферометрии по внедрению в научную и лабораторную практику большие успехи достигнуты в методике регистрации интерферограмм [1]. Современный уровень развития вычислительной техники и компьютеризация научных исследований позволяют успешно решать задачи третьего этапа — проводить качественный анализ и количественную интерпретацию

полученных экспериментальных данных. Однако нет достаточных оснований утверждать, что решены все проблемы в разработке средств и методов оптической обработки голографических интерферограмм.

Изучение существующих подходов к считыванию информации с голографической интерферограммы показал, что наиболее точными и информативными являются фазоизмерительные гетеродинные системы, в которых фазовые характеристики интерференционного поля трансформируются в фазу электрического сигнала. Измерение последней осуществляется с применением электронной аппаратуры. Использование указанного технического решения позволяет в значительной степени снизить погрешность измерений и расширить диапазон определяемых величин [1–7].

АНАЛИЗ ИНТЕРФЕРОМЕТРА СДВИГА

Для анализа функционирования системы обработки голографических интерферограмм с применением двухчастотного излучения необходимо конкретизировать вид используемого интерферометра сдвига и получить аналитическое выражение для разности фаз лучей, прошедших интерферометр. Из соображений виброустойчивости, а также простоты конструкции в работе предлагается использовать интерферометр Жамена, образованный двумя идентичными плоскопараллельными пластинами [8]. В [2–7, 9] приведены результаты анализа этого интерферометра в приближенном варианте. Точность, на которую претендует система, требует анализа интерферометра в строгом изложении.

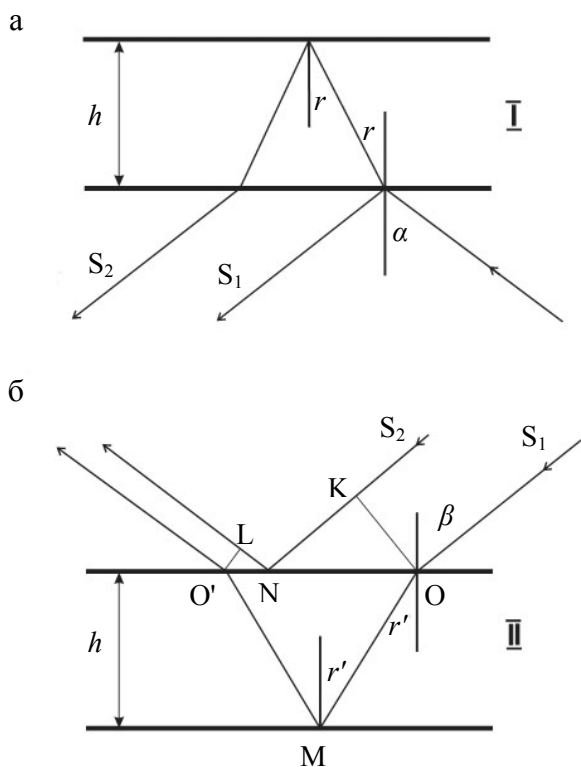


Рис. 1. Прохождение света через первую (а) и вторую (б) пластины интерферометра Жамена

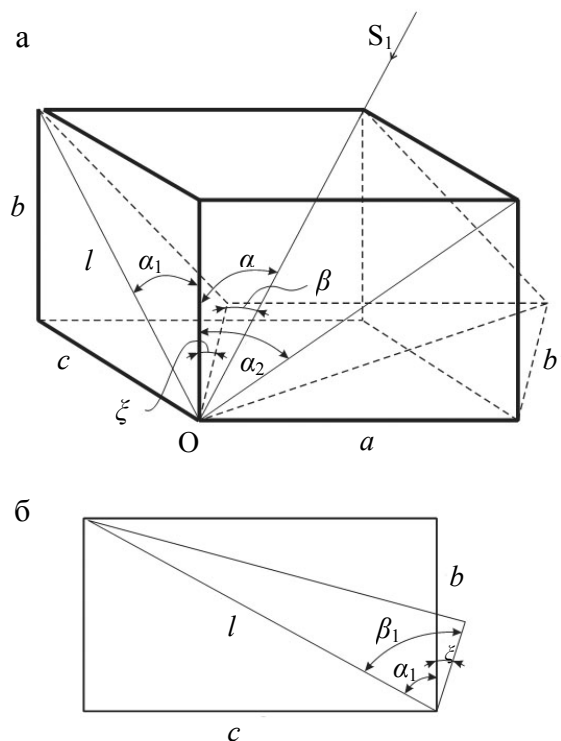


Рис. 2. К расчету разности хода лучей в интерферометре Жамена

Разность хода лучей при прохождении интерферометра (рис. 1) определяется следующим выражением:

$$\Delta = \Delta_I(\alpha_1, \alpha_2) + \Delta_{II}(\alpha_1, \alpha_2, \xi), \quad (1)$$

где $\Delta_I(\alpha_1, \alpha_2)$ — разность хода лучей после первой пластины интерферометра; $\Delta_{II}(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$ — разность хода лучей после прохождения второй пластины интерферометра; α — угол падения луча на первую пластину; α_1 и α_2 — проекции угла α (рис. 2); ξ — угол наклона второй пластины относительно первой.

Воспользовавшись рис. 1, запишем выражение для Δ_I и Δ_{II} . Из рис. 1 следует

$$\Delta_I = 2hn/\cos r - 2h \operatorname{tg} r \sin \alpha = 2hn \cos r, \quad (2)$$

где h — толщина пластины интерферометра; n — показатель преломления материала пластины интерферометра; r — угол преломления луча на первой пластине.

Из рис. 1, б, следует

$$\Delta_{II} = KN + NL - 2n OM, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} KN + NL &= ON \sin \beta + O'N \sin \beta = \\ &= O'O \sin \beta = 2h \operatorname{tg} r' \sin \beta, \\ OM &= h/\cos r'. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta_{II} &= 2h \operatorname{tg} r' \sin \beta - 2 \frac{hn}{\cos r'} = \\ &= \frac{2h}{\cos r'} (\sin r' \sin \beta - n). \end{aligned}$$

Так как $\sin \beta = n \sin r'$, то

$$\Delta_{II} = -2hn \cos r'.$$

В этих выражениях β — угол падения луча на вторую пластину; r' — угол преломления луча во второй пластине.

Запишем выражение для суммарной разности хода:

$$\Delta = \Delta_I + \Delta_{II} = 2hn (\cos r - \cos r'). \quad (4)$$

Для нахождения неизвестной величины $\cos r'$ произведем дополнительные геометрические построения (рис. 2).

Построим проекции угла падения α на две взаимноперпендикулярные плоскости, а также проекции угла падения на вторую пластину интерферометра на те же плоскости и найдем связь между этими проекциями, возникающую при повороте второй пластины интерферометра относительно первой на угол ξ , как показано на рис. 2.

Из рис. 2, а, найдем

$$(b \operatorname{tg} \alpha_1)^2 + (b \operatorname{tg} \alpha_2)^2 = (b \operatorname{tg} \alpha)^2. \quad (5)$$

Поделив все члены выражения (5) на b , получим

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2. \quad (6)$$

Учитывая также, что

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1},$$

запишем выражения для $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 + 1}}, \quad (7)$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 + 1}}. \quad (8)$$

Используя выражения (7) и (8) запишем

$$\begin{aligned} \cos r &= \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}{n^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 + 1)}}. \end{aligned}$$

Аналогично можно записать выражение для $\cos r'$:

$$\begin{aligned} \cos r' &= \sqrt{1 - \sin^2 r'} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta}{n^2}} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{n^2 (\operatorname{tg}^2 \beta + 1)}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся рис. 2 и найдем $\operatorname{tg} \beta$.

Составляющие угла β можно определить, воспользовавшись рис. 2, б:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta_1 + \operatorname{tg}^2 \beta_2}, \quad (9)$$

где $\beta_1 = \alpha_1 + \xi$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} (\alpha_1 + \xi).$$

Для того чтобы определить $\operatorname{tg} \beta_2$, воспользуемся тригонометрическими формулами:

$$\operatorname{ctg} \beta_2 = \frac{b'}{a},$$

где $a = \frac{b}{\operatorname{ctg} \alpha_2}$, $d = \frac{b}{\cos \alpha_1}$. Отсюда

$$b' = \frac{b \cos (\alpha + \xi)}{\cos \alpha_1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \beta_2 &= \frac{\cos (\alpha_1 + \xi)}{\cos \alpha_1} \operatorname{ctg} \alpha_2, \\ \operatorname{tg} \beta_2 &= \frac{\cos \alpha_1}{\cos (\alpha_1 + \xi)} \operatorname{tg} \alpha_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\operatorname{tg}^2 (\alpha_1 + \xi) + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 (\alpha_1 + \xi)}}.$$

Зная $\operatorname{tg} \beta$, можно записать выражение $\cos r'$:

$$\begin{aligned} \cos r' &= \\ &= \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 (\alpha_1 + \xi) + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 (\alpha_1 + \xi)}}{n^2 \left[\operatorname{tg}^2 (\alpha_1 + \xi) + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 (\alpha_1 + \xi)} + 1 \right]}}. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя полученные выражения в (4), определим разность хода лучей, выраженную через проекции на две взаимноперпендикулярные плоскости:

$$\Delta = 2nh \left\{ \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}{n^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 + 1)}} - \right.$$

$$- \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \xi) + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2(\alpha_1 + \xi)}}{n^2 \left[\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \xi) + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2(\alpha_1 + \xi)} + 1 \right]}} \quad (11)$$

Из (9) и (10) следует, что при $\varepsilon = 0$, $\beta_1 = \alpha_1$ и $\beta_2 = \alpha_2$. Поэтому

$$\Delta_1(\alpha_1, \alpha_2) = \Delta_{II}(\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon = 0).$$

Пусть $\Delta_{II} = 2hn \Delta'_{II}$, где

$$\Delta'_{II} = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \xi) + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2(\alpha_1 + \xi)}}{n^2 \left[\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \xi) + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2(\alpha_1 + \xi)} + 1 \right]}} \quad (12)$$

При разложении в ряд Маклорена для малых значений аргумента

$$\cos^2 \alpha_1 \approx 1 - \alpha_1^2,$$

$$\operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \xi) \approx (\alpha_1 - \xi)^2.$$

При $\alpha_2 \approx 45^\circ$ $\operatorname{tg} \alpha_2 \approx 1$. Следовательно, можно записать

$$\Delta'_{II} = \sqrt{1 - \frac{(\alpha_1 + \xi)^2 + \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - (\alpha_1 + \xi)^2}}{n^2 \left[(\alpha_1 + \xi)^2 + \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - (\alpha_1 + \xi)^2} + 1 \right]}}.$$

Проведем преобразования полученного выражения:

$$\begin{aligned} \Delta'_{II} &= \\ &= 1 - \frac{(\alpha_1 + \xi)^2 - (\alpha_1 + \xi)^4 + 1 - \alpha_1^2}{n^2 \left[(\alpha_1 + \xi)^2 - (\alpha_1 + \xi)^4 + 1 - \alpha_1^2 + 1 - (\alpha_1 + \xi)^2 \right]} = \\ &= 1 - \frac{2\alpha_1\xi + \xi^2 + 1}{n^2(2 - \alpha_1^2)}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{2 - \alpha_1^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1^2}{2}} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha_1^2}{2} \right)$, то последнее выражение запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta'_{II} &= \frac{(2\alpha_1\xi + \xi^2 + 1) \left(1 + \frac{\alpha_1^2}{2} \right)}{2n^2} = \\ &= 1 - \frac{2\alpha_1\xi + \xi^2 + 1 + \frac{\alpha_1^2}{2}}{2n^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta'_{II} = \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}} \sqrt{1 - \frac{2\alpha_1\xi + \xi^2 + 1 + \frac{\alpha_1^2}{2}}{2n^2}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2n^2}}.$$

Учитывая малость α_1 и ξ , разложим полученное выражение в ряд по степеням этих величин:

$$\begin{aligned} \Delta'_{II} &= \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}} - \frac{\alpha_1^2}{8n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}} - \\ &- \frac{\alpha_1\xi}{2n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}} - \frac{\xi^2}{4n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $\Delta'_1(\alpha_1, \alpha_2) = \Delta'_{II}(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$, то

$$\Delta'_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}} - \frac{\alpha_1^2}{8n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}}. \quad (14)$$

На основе предыдущих выражений запишем

$$\Delta' = \Delta'_1 - \Delta'_{II} = \frac{\alpha_1\xi}{2n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}} - \frac{\xi^2}{4n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}}. \quad (15)$$

Окончательно для разности фаз лучей, прошедших интерферометр сдвига, получим

$$\begin{aligned} \varphi_{II} &= \frac{2\pi}{\lambda} 2hn\Delta' = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2hn\alpha_1\xi}{2n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}} + \\ &+ \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2hn\xi^2}{4n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}} = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha_1 d_{II} + \varphi_{II0}, \end{aligned} \quad (16)$$

где d_{II} и φ_{II0} — соответственно смещение

и постоянный фазовый сдвиг, вносимые интерферометром:

$$d_{\text{и}} = \frac{h\xi}{n\sqrt{1-\frac{1}{2n^2}}}, \quad (17)$$

$$\varphi_{\text{и0}} = \frac{\pi h\xi^2}{\lambda n\sqrt{1-\frac{1}{2n^2}}}. \quad (18)$$

Полученные выражения позволят провести анализ сигнала на выходе интерферометра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены основные математические соотношения для параметров выходного сигнала

Выведено аналитическое выражение для разности фаз световых лучей, прошедших интерферометр. Это позволит вычислять основные параметры интерферометра Жамена, которые влияют на точностные характеристики и диапазон измерений системы, и соответственно смещение и постоянный фазовый сдвиг, вносимые интерферометром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логинов А.В., Солодкин Ю.Н., Чудновский А.И.* Возможности и перспективы использования когерентно-оптических методов при анализе длительной прочности // Голографические измерительные системы: Сборник научных трудов / Ред. А.Г. Козачек. Новосибирск, 1978. 160 с.
2. *Большаков О.П., Котов И.Р., Хопов В.В., Майоров Е.Е.* Обработка голографических интерферограмм и спеклограмм с использованием двухчастотного лазера // Научно-технический вестник: Актуальные проблемы анализа и синтеза сложных технических систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2003. Вып. 11. С. 21–24.
3. *Майоров Е.Е., Вязанкина М.К., Чистякова Н.Я.* Способ оптической обработки двухэкспозиционных голограмм деформированных объектов // Сборник статей 12-й Международной научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности". СПб.:

СПбГПУ, 2011. Т. 3, ч. 1. С. 251–254.

4. *Майоров Е.Е., Вязанкина М.К., Чистякова Н.Я.* Исследование голографической интерферометрии для измерения поверхности диффузно отражающих объектов // Сборник статей 12-й Международной научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности". СПб.: СПбГПУ, 2011. Т. 3, ч. 1. С. 248–251.
5. *Майоров Е.Е., Машек А.Ч., Прокопенко В.Т., Хайдаров Г.Г.* Применение поперечно-сдвиговой интерферометрии в голографической интерферометрии для контроля диффузно отражающих объектов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 4: Физика, химия. 2012. Вып. 4. С. 31–35.
6. *Майоров Е.Е., Прокопенко В.Т.* Применение двухчастотного излучения для реализации принципов гетеродинной голографической интерферометрии с одним опорным пучком // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2012. Т. 55, № 12. С. 43–45.
7. *Майоров Е.Е., Прокопенко В.Т., Шерстобитова А.С.* Исследование оптико-электронной системы расшифровки голографических интерферограмм // Оптический журнал. 2013. Т. 80, № 3. С. 47–51.
8. *Захарьевский А.Н.* Интерферометры. М.: Оборонгиз, 1952. 296 с.
9. *Котов И.Р.* Разработка и исследование когерентных методов и систем обработки спеклограмм. Канд. дис., 1990. 204 с.

Северо-Западный государственный медицинский университет им. И.И. Мечникова, г. Санкт-Петербург (Майоров Е.Е.)

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, г. Санкт-Петербург (Прокопенко В.Т.)

Контакты: *Майоров Евгений Евгеньевич*,
majorov_ee@mail.ru

Материал поступил в редакцию 31.01.2013

DERIVATION OF AN ANALYTICAL EXPRESSION FOR THE PATH DIFFERENCE OF THE RAYS PASSED THROUGH JAMIN INTERFEROMETER

E. E. Maiorov¹, V. T. Prokopenko²

¹*Northwest State Medical University named after I.I. Mechnikov, Saint-Petersburg*

²*Saint Petersburg National Research University of Information Technologies,
Mechanics and Optics*

Jamin interferometer is chosen for functioning of processing system of holographic interferograms using dual-frequency radiation. The optical scheme of the light rays passing through the plates of Jamin interferometer and the scheme to the calculation of path difference of the rays in the interferometer are given. The results of the interferometer analysis in the strict narrative are obtained. The analytical expression for the phase difference of the rays passed through Jamin interferometer is derived.

Keywords: holographic interferograms, interferometer, refractive index, phase shift, projection angle