ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2012, том 22, № 3, с. 114–122

УДК 621.391; 629.78

© С. В. Соколов, С. С. Вдовиченко

СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ИНЕРЦИАЛЬНО-СПУТНИКОВЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ

Показано, что использование пространственных моделей траектории объекта в географических координатах сокращает размерность оцениваемого вектора навигационных параметров, уменьшая вычислительные затраты, и позволяет принципиально решить задачу апостериорной оценки параметров движения *автономными* измерителями при пропадании спутниковых сообщений.

Кл. сл.: инерциально-спутниковые навигационные системы, пространственные модели движения, апостериорная оценка, автономные измерения

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время алгоритмы тесной интеграции бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) и спутниковых навигационных систем (СНС) формируются в основном или на основе дифференциальной модели объекта [1], или на основе так называемых уравнений ошибок ИНС [2]. Оба случая предполагают априорную информацию об изменении траектории объекта во времени, что для подавляющего большинства подвижных объектов возможно лишь с весьма ограниченной точностью и на небольших интервалах времени. Последнее обстоятельство приводит в свою очередь или к значительным ошибкам инерциально-спутниковых систем в режиме их интеграции, или к быстрой расходимости процесса фильтрации при пропадании спутниковых сообщений. В то же время для навигации широкого класса объектов (железнодорожного, автомобильного, авиационного и пр. транспортов), движущихся по заранее известным с высокой точностью *пространственным* траекториям (железным дорогам, автострадам и пр.), возможно использование пространственных моделей пути, существенно упрощающих решение навигационной задачи и повышающих его точность. При этом необходимо подчеркнуть, что данные модели формируются на основе геодезических измерений или соответствующей картографической информации и инвариантны к характеру движения объекта и виду его модели. Так, изменение высоты h, соответствующее заданной пространственной траектории, естественно описывать двумерной функцией широты ϕ и долготы λ — $h = h(\mathbf{A}, \lambda, \phi)$, а изменение долготы λ на данной траектории — функцией широты ϕ: $\lambda = \lambda(\mathbf{P}, \phi)$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ — векторы известных параметров приведенных моделей. (Например, при аппроксимации изменения высоты полиномиальной зависимостью

$$h = h(\mathbf{A}, \lambda, \phi) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}^{*} \lambda^{i} \phi^{j}$$

вектор $\mathbf{A}$ образован множеством известных постоянных коэффициентов a_{ij}^{*}). Очевидно, что при совместном применении обеих моделей модель высоты можно представить одномерной функцией

$$h = h(\mathbf{A}, \lambda, \phi) = h(\mathbf{A}, \lambda(\mathbf{P}, \phi), \phi) = h(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \phi).$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цель настоящего исследования — показать, что использование подобных пространственных моделей не требует линеаризации навигационных уравнений (как при построении уравнений ошибок), повышая точность позиционирования; сокращает размерность оцениваемого вектора навигационных параметров, уменьшая вычислительные затраты; расширяет вектор наблюдений, позволяя принципиально решить задачу апостериорной оценки параметров движения автономными измерителями при пропадании спутниковых сообщений. Рассмотрим перечисленные преимущества подробнее.

При описании движения объекта будем использовать следующие правые системы координат (СК) [2, 3]:

– приборную СК (ПСК) $J\ 0xyz$, начало которой расположено в центре масс (ЦМ) объекта, а оси направлены по взаимно ортогональным осям чувствительности приборов измерительного комплекса БИНС;

– инерциальную СК (ИСК) $I \;\; O\eta\xi\zeta$ с началом в центре Земли;

– вращающуюся вместе с Землей гринвичскую СК (ГрСК) $G \;\; O\eta_1\xi_1\zeta_1$;

– сопровождающую (ССК) *S OXYZ,* начало которой совпадает с центром масс ПО, ось Y совпадает с направлением местного меридиана, ось Z направлена по линии отвеса, а ось X дополняет систему до правой.

Считаем также, что в начальный момент времени оси ПСК и ССК (а также ИСК и ГрСК) совпадают и в измерительный комплекс БИНС входят три акселерометра и три датчика угловой скорости (ДУС). В качестве модели шумов измерений чувствительных элементов (ЧЭ) примем белый гауссовский шум (БГШ). Такой подход не накладывает принципиальных ограничений на решение поставленной задачи, поскольку путем расширения вектора состояния за счет введения формирующих фильтров оказывается возможным получить модель помехи ЧЭ не только с заданными временны́ми статистическими характеристиками (матожиданием, корреляционной функцией и т. д.), но и с требуемым законом распределения.

СИНТЕЗ ИНТЕГРИРОВАННОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Система уравнений навигационных параметров исследуемой БИНС, инвариантная к характеру движения объекта и виду его физической модели, как показано в [3], имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\left|\begin{matrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{matrix}\right| = \check{T}, \\ &\left|\begin{matrix}\dot{\lambda}\\ \dot{\phi}\end{matrix}\right| = \mathring{U}, \\ &\dot{h} = V_Z, \\ &\left|\begin{matrix}\dot{V}_X\\ \dot{V}_Y\\ \dot{V}_Z\end{matrix}\right| = \bar{U}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\check{T} = \left|\begin{matrix} \dfrac{\sin\gamma}{\cos\beta} & \dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta} & 0 \\ \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\beta & \cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\beta & 1 \end{matrix}\right| (\mathbf{Z}_d - \mathbf{W}_d) = \Phi(\beta,\gamma)(\mathbf{Z}_d - \mathbf{W}_d),$$

$$\mathring{U} = \left|\begin{matrix} 0 & (\cos\phi)^{-1} \\ -1 & 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} -V_Y \\ V_X \end{matrix}\right| (r+h)^{-1},$$

$$\bar{U} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\phi) Z_a + \left(\left(2\left|\begin{matrix} 0 \\ \Omega\cos\phi \\ \Omega\sin\phi \end{matrix}\right| + (r+h)^{-1} \left|\begin{matrix} -V_Y \\ V_X \\ V_X\,\mathrm{tg}\,\phi \end{matrix}\right| \right) \times \left|\begin{matrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{matrix}\right| \right) -$$

$$- \left|\begin{matrix} 0 \\ -\Omega^2 (r+h)\cos\phi\sin\phi \\ \Omega^2 (r+h)\cos^2\phi + g \end{matrix}\right| - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\phi)\mathbf{W}_a.$$

Здесь α, β, γ — углы Эйлера—Крылова, определяющие ориентацию трехгранника ПСК относительно ИСК; $\mathbf{Z}_d = \left| Z_x \quad Z_y \quad Z_z \right|^{\mathrm{T}}$ — вектор измерений трех ортогональных ДУСов; $\mathbf{W}_d = \left| W_x \quad W_y \quad W_z \right|^{\mathrm{T}}$ — вектор аддитивных помех измерения ДУСов (БГШ с нулевым средним и матрицей интенсивностей $\mathbf{D}_d$); λ — долгота, ϕ — широта, h — высота объекта; V_X, V_Y, V_Z — проекции линейной скорости объекта на соответствующие оси сопровождающей СК; r — радиус Земли; Ω — угловая скорость вращения Земли; g — гравитационное ускорение; $\mathbf{Z}_a = \left| Z_{ax} \quad Z_{ay} \quad Z_{az} \right|^{\mathrm{T}}$ — вектор выходных сигналов акселерометров; $\mathbf{W}_a = \left| W_{a_x} \quad W_{a_y} \quad W_{a_z} \right|^{\mathrm{T}}$ — вектор помех акселерометров (БГШ с нулевым математическим ожиданием и матрицей интенсивностей $\mathbf{D}_a$); $\mathbf{C}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\phi) = \mathbf{D}(\alpha,\beta,\gamma)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\lambda,\phi)$ — матрица направляющих косинусов, определяющая ориентацию ССК относительно ПСК; $\mathbf{D}(\alpha,\beta,\gamma)$ — матрица поворота 2-го рода [4], определяющая ориентацию ПСК относительно ИСК (приведена в Приложении 1); $\mathbf{B} = \mathbf{D}(\lambda + \Omega t = \psi, -\phi, 0)$ — матрица 2-го рода, определяющая ориентацию ССК относительно ИСК.

Здесь следует подчеркнуть, что наблюдение приведенного полного вектора навигационных параметров возможно только с помощью внешних измерителей (в частности, СНС), т. к. информационные модели всех параметров уже использованы в уравнениях вектора состояния БИНС. Используя в качестве системы внешних измерений СНС, далее рассмотрим только кодовые и доплеровские измерения как дающие полное представление о принципах решения задачи построения интегрированной НС на основе пространственных моделей пути (ПМП).

В стандартном (автономном) режиме информационный сигнал кодовых измерений (псевдодальность) может быть записан как [1, 5]

$$Z_R = \sqrt{(\xi_c - \xi)^2 + (\eta_c - \eta)^2 + (\zeta_c - \zeta)^2} + W_{Z_R}, \qquad (2)$$

где ξ_c, η_c, ζ_c — известные координаты спутника в гринвичской СК; ξ, η, ζ — текущие координаты объекта в гринвичской СК; W_{Z_R} — БГШ с нулевым средним и известной дисперсией $D_{Z_R}(t)$, обусловленный алгоритмически нескомпенсированными ошибками часов спутников и приемника, задержками сигнала при прохождении ионосферы и тропосферы, ошибками многолучевости и инструментальными погрешностями.

Информационный сигнал доплеровских измерений (псевдоскорости) Z_V в автономном режиме может быть представлен следующим образом [1, 5]:

$$\begin{aligned} Z_V = \Big[&(\xi_c - \xi)(V_{\xi c} - V_\xi) + \\ &+(\eta_c - \eta)\ (V_{\eta c} - V_\eta) + (\zeta_c - \zeta)(V_{\zeta c} - V_\zeta) \Big] \times \\ &\times \left(\sqrt{(\xi_c - \xi)^2 + (\eta_c - \eta)^2 + (\zeta_c - \zeta)^2} \right)^{-1} + W_{Z_V}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $V_{\xi c}, V_{\eta c}, V_{\zeta c}$ — проекции вектора скорости спутника на оси гринвичской СК; V_ξ, V_η, V_ζ — проекции вектора скорости объекта на оси гринвичской СК; W_{Z_V} — БГШ с нулевым средним и известной дисперсией $D_{Z_V}(t)$, обусловленный аппаратурными погрешностями приемника объекта и передатчика спутника, погрешностями многолучевости и случайными погрешностями измерения.

Для возможности использования измерительных сигналов (2, 3) в качестве наблюдателей вектора состояния НС, описываемого системой (1), выразим входящие в них переменные через навигационные параметры в ССК. Для координат объекта имеем:

$$\begin{aligned} \xi &= (r+h)\cos\phi \cdot \sin\lambda, \\ \eta &= (r+h)\sin\phi, \\ \varsigma &= (r+h)\cos\phi \cdot \cos\lambda. \end{aligned} \qquad (4)$$

При определении проекций скорости учтем, что связь вектора скорости в гринвичской СК $\mathbf{V}_G = \left| V_\xi \ V_\eta \ V_\zeta \right|^{\mathrm{T}}$ с вектором скорости $\mathbf{V}_S = \left| V_X \ V_Y \ V_Z \right|^{\mathrm{T}}$ в ССК определяется матрицей $\mathbf{B} = \mathbf{D}(-\phi, \lambda, 0) = \mathbf{B}(\phi, \lambda)$ ориентации ССК относительно гринвичской СК: $\mathbf{V}_S = \mathbf{B}(\phi,\lambda)\ \mathbf{V}_G$, откуда сразу следует возможность представления вектора $\mathbf{V}_G$ через навигационные параметры объекта:

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\phi,\lambda)\ \mathbf{V}_S. \qquad (5)$$

Исходя из (4, 5), сигналы кодовых и доплеровских измерений можно представить как информационные модели наблюдателей вектора состояния НС (1):

$$\begin{aligned} Z_R &= \sqrt{(\xi_c-(r+h)\cos\phi\,\sin\lambda)^2+(\eta_c-(r+h)\sin\phi)^2+(\zeta_c-(r+h)\cos\phi\,\cos\lambda)^2}+W_{Z_R} = \\ &= H_R\left(\phi,\lambda,h\right)+W_{Z_R}, \\ Z_V &= \Big[\left(\xi_c-(r+h)\cos\phi\,\sin\lambda\right)\left(\mathbf{V}_{\xi c}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}_{(1)}(\phi,\lambda)\mathbf{V}_S\right)+\left(\eta_c-(r+h)\sin\phi\right)\left(\mathbf{V}_{\eta c}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}_{(2)}(\phi,\lambda)\mathbf{V}_S\right)+ \\ &\quad +\left(\zeta_c-(r+h)\cos\phi\,\cos\lambda\right)\left(\mathbf{V}_{\zeta c}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}_{(3)}(\phi,\lambda)\mathbf{V}_S\right)\Big]\times \\ &\quad \times\left(\sqrt{(\xi_c-(r+h)\cos\phi\,\sin\lambda)^2+(\eta_c-(r+h)\sin\phi)^2+(\zeta_c-(r+h)\cos\phi\,\cos\lambda)^2}\right)^{-1}+W_{Z_V} = \\ &= H_V\left(\phi,\lambda,h,\mathbf{V}_S\right)+W_{Z_V}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}_{(i)}(\phi,\lambda)$ — i-я строка матрицы $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\phi,\lambda)$.

Анализируя полученные уравнения спутниковых наблюдателей, можно сделать вывод, что сигналы измерения (6) содержат информацию обо всех навигационных параметрах *линейного* движения объекта, но не обеспечивают наблюдения параметров вращения приборного трехгранника относительно ЦМ объекта (подобная ситуация является типичной для существующих алгоритмов фильтрации в СНС). Т. е. использование только спутниковых измерений может привести к неустойчивости процесса оценивания угловых параметров объекта.

НАВИГАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ПУТИ

Использование ПМП $\lambda(\mathbf{P},\phi)$, $h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)$ принципиально меняет ситуацию.

Во-первых, в этом случае сокращается размерность уравнений состояния НС (1), т. к. отпадает необходимость в уравнениях, описывающих динамику изменения λ, h, а следовательно, и вертикальной проекции скорости V_Z.

Проекция скорости V_Z здесь выражается через остальные параметры движения дифференцированием модели высоты:

$$V_Z=\dot h=\frac{\partial h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\,\dot\phi=\frac{\partial h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}.$$

Более того, проекция скорости V_X здесь также может быть выражена через другие параметры движения — уже дифференцированием модели долготы.

Т. к.

$$\dot\lambda=\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\dot\phi\ ,$$

то подставляя в данное равенство выражения производных $\dot\lambda,\dot\phi$ из уравнений системы (1), получим

$$V_X\left(\cos\phi\right)^{-1}\left(r+h\right)^{-1}=\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\left(r+h\right)^{-1},$$

откуда получаем искомое уравнение связи:

$$V_X=\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\cos\phi.$$

Во-вторых, принципиальным обстоятельством здесь является то, что отсутствие необходимости использования уравнений проекций V_X, V_Z в уравнениях вектора состояния позволяет использовать их, как будет показано ниже, для построения *автономного* наблюдателя этого вектора, обеспечивающего оценивание при пропадании спутниковых измерений.

Рассмотрим построение фильтра для данных ПМП более подробно. Уравнения состояния приобретают при этом достаточно простой вид:

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{vmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \dot\gamma\end{vmatrix} = \Phi\left(\beta,\gamma\right)(\mathbf{Z}_d-\mathbf{W}_d), \quad \dot\phi = V_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}, \\
\dot V_Y = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(2)}\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi\right)\mathbf{Z}_a - \\
\quad -\left(2\Omega+\dfrac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\right)\dfrac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\cos\phi\sin\phi - \\
\quad -\dfrac{\mathrm{d}h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\mathrm{d}\phi}V_Y^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-2} + \\
\quad +\Omega^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)\cos\phi\sin\phi - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(2)}\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi\right)\mathbf{W}_a,
\end{array}\right\} \qquad (7)$$

где $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(2)}\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi\right)$ — 2-я строка матрицы $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi\right)$.

В векторной форме Ланжевена, исходной для построения апостериорных оценок, уравнения (7) описываются как

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}\left(\mathbf{Y},t\right)+\mathbf{F}_1\left(\mathbf{Y},t\right)\boldsymbol{\xi}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{Y} = \left|\alpha\ \beta\ \gamma\ \phi\ V_Y\right|^{\mathrm{T}}$, $Y(0)=Y_0$, $\boldsymbol{\xi} = \left|\mathbf{W}_d^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{W}_a^{\mathrm{T}}\right|^{\mathrm{T}}$, функции $\mathbf{F}\left(\mathbf{Y},t\right), \mathbf{F}_1\left(\mathbf{Y},t\right)$ приведены в Приложении 2.

При использовании спутниковых измерений (6) в качестве наблюдателя вектора $\mathbf{Y}$ они также трансформируются соответствующим образом: вместо переменных h, λ записываются их функциональные зависимости от ϕ — $h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)$, $\lambda(\mathbf{P},\phi)$, а вектор $\mathbf{V}_S$ представляется как

$$\mathbf{V}_S = \\ = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi & 1 & \dfrac{\partial h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\end{vmatrix}^{\mathrm{T}} V_Y.$$

Т. е. в данном случае измерения и функции наблюдения СНС выглядят как

$$Z_R = H_R(\phi) + W_{Z_R}, \quad Z_V = H_V(\phi, V_Y) + W_{Z_V}. \qquad (9)$$

Но главное в приведенной трансформации вектора состояния — это возможность построения автономного наблюдателя навигационных параметров на основе выходных сигналов акселерометров. Используем для этого уравнение проекции скорости V_X из системы (1) (не вошедшее в (7)), учитывая, что из уравнения связи ее производная может быть выражена как

$$\dot V_X = \frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\,\dot V_Y + \\ +\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\right)V_Y{}^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}. \qquad (10)$$

Выражая в (10) производную скорости $\dot V_Y$ из ее уравнения, входящего в систему (1), и используя уравнение связи, окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
\dot V_X = {} & \frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\left\{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(2)}\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi\right)\mathbf{Z}_a - \right. \\
& -\left(2\Omega+\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\right)\times \\
& \times\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\cos\phi\sin\phi - \frac{\partial h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\times \\
& \times V_Y{}^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-2} + \\
& +\Omega^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)\cos\phi\sin\phi - \\
& \left. -\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(2)}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi)\mathbf{W}_a\right\} + \\
& +\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\right)V_Y{}^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

С другой стороны, уравнение проекции скорости V_X из системы (1) с учетом уравнения связи может быть преобразовано к виду

$$\dot{V}_X = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(1)}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi)\mathbf{Z}_a + $$
$$+\left(2\Omega + \frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\right)\times$$
$$\times V_Y\left\{\sin\phi - \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\mathrm{d}\phi}\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\cos\phi\right\}-$$
$$-\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(1)}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi)\mathbf{W}_a. \qquad (12)$$

Выбирая в качестве наблюдателя параметров состояния БИНС акселерометр, расположенный по оси $0x$ ПСК (выбор оси принципиального значения не имеет), построим информационную модель его выходного сигнала Z_{ax}, приравнивая правые части уравнений (11) и (12):

$$Z_{ax} = \left(c_{11} - \frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\; c_{12}\right)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi c_{22} - c_{21}\right)Z_{ay} + \right.$$
$$+\left(\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\; c_{32} - c_{31}\right)Z_{az} + \frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\times$$
$$\times\left[-\left(2\Omega + \frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\right)\times\right.$$
$$\times\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\cos\phi\sin\phi-$$
$$-\frac{\partial h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}{V_Y}^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-2}+$$
$$\left.+\Omega^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)\cos\phi\sin\phi\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\right){V_Y}^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}-$$
$$-\left(2\Omega + \frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\right)V_Y\times$$
$$\times\left\{\sin\phi - \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\mathrm{d}\phi}\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\cos\phi\right\}+$$
$$\left.+\left[\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(1)} - \frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\;\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(2)}\right]\mathbf{W}_a\right\}=$$
$$=H_a(\mathbf{Y},t)+\mathbf{H}_w(\mathbf{Y},t)\,\mathbf{W}_a\,, \qquad (13)$$

где

$c_{ij} = c_{ij}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi)$ — ij-й элемент матрицы $\mathbf{C}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi)$;

$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(i)} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(i)}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi)$ — i-я строка матрицы $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi)$;

функции $\mathbf{H}_a(\mathbf{Y},t)$, $\mathbf{H}_w(\mathbf{Y},t)$ приведены в Приложении 3.

Несмотря на более сложную модель информационного сигнала по сравнению со спутниковыми измерениями, дополнительным преимуществом данного наблюдателя (помимо автономности) является возможность явного наблюдения *всех* навигационных переменных (в том числе и угловых параметров), что принципиально влияет на точность оценивания вектора состояния БИНС.

Уравнения (8, 13), представленные в классической форме "объект—наблюдатель", позволяют осуществить *теоретически строгое* апостериорное оптимальное оценивание навигационного вектора по выбранному вероятностному критерию. Т. к. точное решение задачи связано с необходимостью интегрирования интегро-дифференциального уравнения в частных производных (уравнения Стратоновича) для апостериорной плотности вероятности (АПВ) [6], то с целью уменьшения вычислительных затрат используем далее субоптимальную оценку навигационного вектора на основе гауссовской аппроксимации АПВ (так называемый нелинейный фильтр Калмана):

$$\dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \mathbf{F}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right) + \mathbf{K}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\left[Z_{ax} - H_a\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\right], \qquad (14)$$

где

$$\mathbf{K}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right) = \left\{\mathbf{R}\frac{\partial\mathbf{H}_a^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)}{\partial\hat{\mathbf{Y}}} + \mathbf{F}_1\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\mathbf{D}_A\mathbf{H}_w^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\right\}\times$$
$$\times\left(\mathbf{H}_w\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\mathbf{D}_a\mathbf{H}_w^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\right)^{-1};$$
$$\dot{\mathbf{R}}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right) = \frac{\partial\mathbf{F}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)}{\partial\hat{\mathbf{Y}}}\mathbf{R}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right) + \mathbf{R}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\frac{\partial\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)}{\partial\hat{\mathbf{Y}}}+$$
$$+\mathbf{F}_1\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\mathbf{D}_\xi\mathbf{F}_1^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)-$$
$$-\mathbf{K}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\left(\mathbf{H}_w\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\mathbf{D}_a\mathbf{H}_w^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right)\right)\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{Y}},t\right);$$
$$\hat{\mathbf{Y}}_0 = M\left(\mathbf{Y}_0\right); \qquad \mathbf{R}_0 = M\left\{\left(\mathbf{Y}_0-\hat{\mathbf{Y}}_0\right)\left(\mathbf{Y}_0-\hat{\mathbf{Y}}_0\right)^{\mathrm{T}}\right\};$$
$$\mathbf{D}_\xi = \begin{vmatrix}\mathbf{D}_d & 0\\ 0 & \mathbf{D}_a\end{vmatrix};\; \mathbf{D}_A = \begin{vmatrix}0\\ \mathbf{D}_a\end{vmatrix}.$$

Фильтр (14) необходимо использовать при отсутствии спутниковых измерений, обеспечивая непрерывность и устойчивость процесса оценивания в целом. При наличии же спутниковых сигналов целесообразно их комплексировать с сигналами акселерометров. В этом случае уравнения комплексированного наблюдателя, учитывающие дискретный характер спутниковых сообщений, в векторной форме принимают следующий вид:

$$\mathbf{Z}_{\kappa}^{ИНТ} = \begin{vmatrix} Z_{ax} \\ Z_R \\ Z_V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_a(\mathbf{Y},\kappa) \\ H_{\mathrm{R}}(\phi) \\ H_{\mathrm{V}}(\phi,\mathbf{V}_Y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{H}_w(\mathbf{Y},\kappa) & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{W}_a \\ W_R \\ W_V \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{H}^{ИНТ}(\mathbf{Y},\kappa) + \mathbf{H}_0^{ИНТ}(\mathbf{Y},\kappa)\zeta_{\kappa}^{ИНТ}, \qquad (15)$$

где $\mathbf{E}_2$ — единичная матрица размерности 2; κ — текущий такт поступления спутниковых измерений; $\zeta_{\kappa}^{ИНТ} = \begin{vmatrix} \mathbf{W}_a & \mathbf{W}_{Z_R} & \mathbf{W}_{Z_V} \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}$ — БГШ с нулевым средним и матрицей интенсивности $\mathbf{D}_{ИНТ}$ = $= \begin{vmatrix} \mathbf{D}_a & 0 & 0 \\ 0 & D_{Z_R} & 0 \\ 0 & 0 & D_{Z_V} \end{vmatrix}$.

Подобная задача относится уже к задачам непрерывно-дискретной фильтрации и просто с помощью фильтра Калмана решена быть не может [6].

В соответствии с [6], гауссовский алгоритм дискретного оценивания для расширенного наблюдателя (15) на κ-м такте измерения имеет вид:

$$\hat{\mathbf{Y}}(t_\kappa+0) = \hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0} + \mathbf{R}(t_\kappa+0)\frac{\partial \mathbf{H}^{ИНТ^{\mathrm{T}}}(\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0},\kappa)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \times$$

$$\times\left(\mathbf{H}_0^{ИНТ}(\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0},\kappa)\mathbf{D}_{ИНТ}\mathbf{H}_0^{ИНТ^{\mathrm{T}}}(\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0},\kappa)\right)^{-1} \times$$

$$\times\left[\mathbf{Z}_{\kappa}^{ИНТ} - \mathbf{H}^{ИНТ}(\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0},\kappa)\right], \qquad (16)$$

где

$$\mathbf{R}(t_\kappa+0) = R_{\kappa 0} - R_{\kappa 0}\frac{\partial \mathbf{H}^{ИНТ^{\mathrm{T}}}(\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0},\kappa)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \times$$

$$\times\left\{\frac{\partial \mathbf{H}^{ИНТ}(\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0},\kappa)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}}\mathbf{R}_{\kappa 0}\frac{\partial \mathbf{H}^{ИНТ^{\mathrm{T}}}(\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0},\kappa)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{H}_0^{ИНТ^{\mathrm{T}}}(\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0},\kappa)\mathbf{D}_{ИНТ}\mathbf{H}_0^{ИНТ^{\mathrm{T}}}(\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0},\kappa)\right\}^{-1} \times$$

$$\times\frac{\partial \mathbf{H}^{ИНТ}(\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0},\kappa)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}}\mathbf{R}_{\kappa 0}.$$

При этом следует подчеркнуть, что непрерывный фильтр (14) используется только на временны́х интервалах $[t_{k-1}, t_k]$, $\kappa = 1, 2,\ldots$, между дискретными спутниковыми измерениями (в том числе при их пропадании), поэтому начальные условия $\hat{\mathbf{Y}}(t_{\kappa-1})$, $\mathbf{R}(t_{\kappa-1})$ уравнений (14) на интервале $[t_{k-1}, t_k]$ формируются как результат дискретного оценивания $\hat{\mathbf{Y}}_{\kappa-1} = \hat{\mathbf{Y}}(t_{\kappa-1}+0)$, $\mathbf{R}_{\kappa-1} = \mathbf{R}(t_{\kappa-1}+0)$ вектора состояния НС $\mathbf{Y}$ в момент времени $t_{\kappa-1}$:

$$\hat{\mathbf{Y}}(t_{\kappa-1}) = \hat{\mathbf{Y}}_{\kappa-1} = \hat{\mathbf{Y}}(t_{\kappa-1}+0),$$

$$\mathbf{R}(t_{\kappa-1}) = \mathbf{R}_{\kappa-1} = \mathbf{R}(t_{\kappa-1}+0).$$

В свою очередь, результат интегрирования $\hat{\mathbf{Y}}(t_\kappa)$, $\mathbf{R}(t_\kappa)$ уравнений непрерывного оценивания (14) в конце временно́го интервала $[t_{\kappa-1}, t_\kappa]$ является начальным условием $\hat{\mathbf{Y}}(t_\kappa-0) = \hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0}$, $\mathbf{R}(t_\kappa-0) = R_{\kappa 0}$ для выполнения алгоритма дискретного оценивания (16) в момент времени t_κ:

$$\hat{\mathbf{Y}}(t_\kappa-0) = \hat{\mathbf{Y}}_{\kappa 0} = \hat{\mathbf{Y}}(t_\kappa), \quad \mathbf{R}(t_\kappa-0) = \mathbf{R}_{\kappa 0} = \mathbf{R}(t_\kappa).$$

Подобная связь начальных и конечных условий алгоритмов дискретного и непрерывного оценивания является одним из основных условий корректного функционирования режима интеграции автономной БИНС и СНС.

ПРИМЕР

Для иллюстрации возможности эффективного использования предложенного алгоритма интеграции было проведено численное моделирование уравнений оценивания (14), (16). Моделирование осуществлялось на временно́м интервале $t \in [0;1000]$ с с шагом Δt = 0.01 с методом Рунге—Кутта 4-го порядка. (Следует при этом отметить, что размерность фильтра с учетом симметричности ковариационной матрицы сократилась по сравнению с оценкой полного вектора состояния (1) с 54 уравнений до 20). Модели изменения долготы и высоты задавались полиномами 2-го порядка. В качестве модели помех был использован аддитивный гауссовский вектор-шум с нулевым матожиданием и интенсивностью: для акселерометров — $(10^{-5}$ м/с$^2)^2$, кодовых измерений — $(15$ м$)^2$, доплеровских измерений — $(0.5$ м/с$)^2$. Моделирование пропадания спутниковых сигналов осуществлялось на 400-й секунде на временно́м интервале 300 с. По окончании временно́го интервала моделирования максимальные ошибки компонентов вектора $\mathbf{Y}$ составили: по проекции V_Y — 4 %, по углам ориентации — 0.1 %, по широте — 14 м, что свидетельствует о возможности эффективного практического использования предложенного алгоритма, реализующего все преимущества, заявленные в начале статьи.

Приложение 1

$$\mathbf{D}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{vmatrix} \sin\beta\sin\alpha\sin\gamma+\cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\gamma & \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma-\sin\beta\cos\gamma \\ \sin\beta\sin\alpha\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Приложение 2

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y},t)=\left|\begin{array}{l} \mathbf{\Phi}(\beta,\gamma)\mathbf{Z}_d \\ \hline \mathbf{V}_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1} \\ \hline \mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(2)}(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi)\mathbf{Z}_a - \\ -\left(2\Omega+\dfrac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\right)\dfrac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\cos\phi\sin\phi - \\ -\dfrac{\mathrm{d}h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\mathrm{d}\phi}V_Y^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-2}+\Omega^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)\cos\phi\sin\phi \\ \hline \\ \end{array}\right|,$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{Y},t)=\left|\begin{array}{c:c} -\mathbf{\Phi}(\beta,\gamma) & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(2)}\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\mathbf{P},\phi),\phi\right) \\ \hline & \end{array}\right|.$$

Приложение 3

$$H_a(\mathbf{Y},t)=\left(c_{11}-\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\; c_{12}\right)^{-1}\left\{\left(\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi c_{22}-c_{21}\right)Z_{ay}+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\; c_{32}-c_{31}\right)Z_{az}+$$
$$+\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\left[-\left(2\Omega+\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\right)\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\cos\phi\sin\phi-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y{}^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-2}+\Omega^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)\cos\phi\sin\phi\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\right)V_Y{}^2\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}-$$

$$-\left(2\Omega+\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}V_Y\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\right)V_Y\times$$
$$\times\left[\sin\phi-\frac{\mathrm{d}h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)}{\mathrm{d}\phi}\left(r+h(\mathbf{A},\mathbf{P},\phi)\right)^{-1}\cos\phi\right]\Bigg\}.$$

$$\mathbf{H}_w(\mathbf{Y},t)=\left(c_{11}-\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\; c_{12}\right)^{-1}\left[\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(1)}-\frac{\partial\lambda(\mathbf{P},\phi)}{\partial\phi}\cos\phi\;\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{(2)}\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Интегрированные инерциально-спутниковые системы: Сб. ст. и докл. / Сост. О.А. Степанов / Под общ. ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2001. 233 с.
2. *Анучин О.Н., Емельянцев Г.И.* Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов / Под общ. ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2003. 390 с.
3. *Соколов С.В., Погорелов В.А.* Основы синтеза многоструктурных бесплатформенных навигационных систем. М.: Физматлит, 2009. 184 с.
4. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
5. Интерфейсный контрольный документ ГЛОНАСС (5-я редакция). 2002.
6. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.

Ростовский государственный университет путей сообщения, г. Ростов-на-Дону

Контакты: *Соколов Сергей Викторович,* s.v.s.888@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 24.01.2012.

SYNTHESIS OF ALGORITHMS OF INERTIAL-SATELLITE NAVIGATING SYSTEMS ON THE BASIS OF SPATIAL MODELS OF MOVEMENT

S. V. Sokolov, S. S. Vdovichenko

Rostov State Transport University, Rostov-on-Don

It is shown that use of spatial models of a trajectory of object in geographical coordinates reduces dimension of an estimated vector of navigating parameters, reducing computing expenses, and allows to solve essentially a problem of a posterior estimations of parameters of movement by independent measuring instruments at loss of satellite messages.

Keywords: inertial-satellite navigation systems, spatial (space) models of movement, a posterioriestimation, autonomic measurements