ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2012, том 22, № 3, с. 101–106

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 534-29

© Б. П. Шарфарец

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПЕРЕКРЕСТНОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ РАДИАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЯХ ИДЕАЛЬНОЙ И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЕЙ

Проведен подробный вывод полученных ранее выражений для расчета радиационного давления в идеальной жидкости. Проведен также вывод отсутствовавших ранее соответствующих выражений для составляющей радиационного давления в вязкой среде, обусловленной взаимодействием падающей и рассеянной волн. Эти выражения, будучи по форме схожими с выражениями для идеальной среды, позволят применять всю наработанную для идеальной среды технику расчетов радиационного давления.

Кл. сл.: радиационное давление, перекрестная составляющая, квадратичная составляющая, идеальная жидкость, вязкая жидкость

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] для случая идеальной жидкости было показано, что радиационное давление (рд) на включение складывается из перекрестной составляющей рд, вызванной взаимодействием между первичным и рассеянным полями, и квадратичной составляющей, вызванной взаимодействием внутри рассеянного поля. Приведем выражения для соответствующих составляющих рд так, как они представлены в [1]. Для перекрестной составляющей (черта сверху означает временно́е усреднение)

$$\overline{F_i}^{(is)} = -\int_S \left\{ \left(-\rho_0 \overline{\mathbf{v'}_{inc} \cdot \mathbf{v'}_s} + \frac{c^2}{\rho_0} \overline{\rho'_{inc}\, \rho'_s} \right) \delta_{ik} + \right.$$

$$\left. + \rho_0 \left(\overline{v'_{inc_i}\, v'_{s_k}} + \overline{v'_{s_i}\, v'_{inc_k}} \right) \right\} n_k \mathrm{d}S, \quad i = \overline{1,3}. \qquad (1)$$

Как следует из [1], квадратичная составляющая равна

$$\overline{F_i}^{(ss)} = -\int_S \left\{ \left(-\frac{\rho_0}{2} \overline{\left|\mathbf{v'}_s\right|^2} + \frac{c^2}{2\rho_0} \overline{\left|\rho'_s\right|^2} \right) \delta_{ik} + \right.$$

$$\left. + \rho_0 \left(\overline{v'_{s_i}\, v'_{s_k}} + \overline{v'_{s_i}\, v'_{s_k}} \right) \right\} n_k \mathrm{d}S, \quad i = \overline{1,3}, \qquad (2)$$

а в волновой зоне (2), когда S есть поверхность, охватывающей включение сферы, трансформируется к выражению [2]

$$\overline{F_i}^{(ss)} = -\frac{1}{2} \rho_0 \int_S \overline{\left|\mathbf{v'}_s\right|^2} \cos\theta_i \mathrm{d}S, \quad i = \overline{1,3}. \qquad (2а)$$

Это вызвано тем, что в первой скобке подынтегрального выражения в (2) стоит разность средних плотностей кинетической и потенциальной энергий, которые в плоской волне (в волновой зоне), как известно, равны.

Здесь $\overline{F_i}$ — проекции векторов рд: is — для перекрестной составляющей, ss — для квадратичной; $\mathbf{v'}_{inc} = (v'_{inc_1}, v'_{inc_2}, v'_{inc_3})$, $\mathbf{v'}_s = (v'_{s_1}, v'_{s_2}, v'_{s_3})$ — первое приближение колебательной скорости падающей и рассеянной волны соответственно; ρ_0 — равновесное значение плотности; ρ' — возмущение плотности первого порядка малости; c — скорость звука в жидкости; S — поверхность произвольного объема, содержащего включение; θ_i — угол между нормалью к поверхности $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ и i-й осью декартовых координат. Выше и далее для идеальной и вязкой жидкости под характеристиками звукового поля понимаются величины первого порядка малости, т. е. решения линеаризованных уравнений системы Эйлера или Навье—Стокса.

Далее в [1] без вывода дается окончательный вид выражения (1) для вектора перекрестной составляющей рд:

$$\overline{\mathbf{F}}^{(is)} = -\rho_0 \int_V \overline{\mathbf{v'}_{inc} \left(\Delta\varphi'_s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'_s}{\partial t^2} \right)} \mathrm{d}V. \qquad (3)$$

Здесь φ' — скалярный потенциал скоростей $\mathbf{v}'_{inc} = \nabla\varphi'_{inc}$, $\mathbf{v}'_s = \nabla\varphi'_s$.

В работе [3] дан конспективный переход от выражения (1) к выражению (3) в тензорном виде. Вызывает, однако, интерес воспроизвести этот переход подробно и в векторном виде, а на его основе получить соответствующее выражение для случая вязкой жидкости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе дается подробный вывод выражения (3) в векторном виде из выражения (1) альтернативным приведенному в работе [3] методу. Кроме того, производится полный вывод соответствующего выражения для случая линеаризованной системы Навье—Стокса для вязкой жидкости, аналогичного выражению (3) для линеаризованной системы Эйлера.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Вначале для решения поставленной выше задачи выпишем линеаризованную систему уравнений Навье—Стокса (см., например, [4–7]), а затем и следующую из нее систему уравнений Эйлера. Рассматриваем для простоты баротропную жидкость. Система состоит из собственно линеаризованного уравнения движения Навье—Стокса

$$\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \frac{\lambda+\mu}{\rho_0}\nabla\nabla\cdot\mathbf{v}' + \frac{\mu}{\rho_0}\Delta\mathbf{v}', \tag{4}$$

линеаризованного уравнения неразрывности

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}' = 0 \tag{5}$$

и уравнения состояния, связывающего давление p' с плотностью ρ':

$$p' = f(\rho'), \quad \text{или} \qquad p' = c^2\rho'. \tag{6}$$

В (4) λ и μ — коэффициенты динамической вязкости (соответственно первый и второй параметры Ламе), связанные с коэффициентами η сдвиговой и ς объемной (второй) вязкости следующим образом:

$$\eta = \mu, \qquad \varsigma = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$

Поскольку линейная задача рассеяния на включении связана с безвихревой (т. е. потенциальной) составляющей скоростей [8], то уравнение (4) для этих составляющих приводится к виду [4]

$$\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}\Delta\mathbf{v}'. \tag{7}$$

Из уравнений (5)–(7) при условии равенства нулю коэффициентов динамической вязкости λ и μ немедленно следует система уравнений Эйлера.

Рассмотрение начнем с идеальной жидкости.

Идеальная жидкость

По теореме Гаусса переходим от поверхностного интеграла (1) к объемному. Введем обозначение для тензора $T_{ik} = \overline{v_{inc_i} v_{s_k}} + \overline{v_{s_i} v_{inc_k}}$. Тогда выражение (1) может быть переписано следующим образом

$$\overline{F_i}^{(is)} = -\int\limits_V \left\{ \partial_i \left(-\rho_0 \overline{\mathbf{v}'_{inc}\cdot\mathbf{v}'_s} + \frac{c^2}{\rho_0}\overline{\rho'_{inc}\,\rho_s'} \right) + \right.$$
$$\left. +\rho_0 \partial_k \left(\overline{v'_{inc_i}\, v'_{s_k}} + \overline{v'_{s_i}\, v'_{inc_k}} \right) \right\} \mathrm{d}V, \quad i,k = \overline{1,3}.$$

Здесь $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; $\quad \partial_k \left(\overline{v'_{inc_i}\, v'_{s_k}} + \overline{v'_{s_i}\, v'_{inc_k}} \right) =$

$$= \partial_k T_{ik} = \sum_k \frac{\partial\left(\overline{v'_{inc_i}\, v'_{s_k}} + \overline{v'_{s_i}\, v'_{inc_k}} \right)}{\partial x_k}.$$

Легко показать, что при преобразовании последнего интеграла к векторному виду он записывается следующим образом:

$$\overline{\mathbf{F}}^{(is)} = -\int\limits_V \left\{ \nabla \left(-\rho_0 (\overline{\mathbf{v}'_{inc}\cdot\mathbf{v}'_s}) + \frac{c^2}{\rho_0}(\overline{\rho'_{inc}\,\rho'_s}) \right) + \right.$$
$$+\rho_0 \left(\overline{(\mathbf{v}'_{inc}\cdot\nabla)\mathbf{v}'_s} + \overline{(\mathbf{v}'_s\cdot\nabla)\mathbf{v}'_{inc}} + \right.$$
$$\left.\left. + \overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\nabla\cdot\mathbf{v}'_s} + \overline{\mathbf{v}'_s\,\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}} \right) \right\} \mathrm{d}V. \tag{8}$$

Учитывая тождество для градиента скалярного произведения двух векторов

$$\nabla(\mathbf{v}'_{inc}\cdot\mathbf{v}'_s) = (\mathbf{v}'_{inc}\cdot\nabla)\mathbf{v}'_s + (\mathbf{v}'_s\cdot\nabla)\mathbf{v}'_{inc} +$$
$$+ \mathbf{v}'_{inc}\times\nabla\times\mathbf{v}'_s + \mathbf{v}'_s\times\nabla\times\mathbf{v}'_{inc},$$

а также потенциальность колебательных скоростей, получаем

$$\nabla(\mathbf{v}'_{inc}\cdot\mathbf{v}'_s) = (\mathbf{v}'_{inc}\cdot\nabla)\mathbf{v}'_s + (\mathbf{v}'_s\cdot\nabla)\mathbf{v}'_{inc}.$$

С учетом последнего равенства интеграл (8) преобразуется к виду

$$\overline{\mathbf{F}}^{(is)} = -\int\limits_V \left(\frac{c^2}{\rho_0} \overline{\nabla(\rho'_{inc}\,\rho'_s)} + \right.$$

$$+\rho_0\left(\overline{\mathbf{v}'_{inc}\nabla\cdot\mathbf{v}'_s}+\overline{\mathbf{v}'_s\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}}\right)\Bigg)\mathrm{d}V. \qquad (9)$$

Далее учтем выражение (7) для линеаризованного уравнения Эйлера (при $\lambda=\mu=0$) и выражение (6), связывающее возмущенные плотность и давление

$$\frac{c^2}{\rho_0}\nabla(\rho'_{inc}\,'\rho'_s)=\frac{\nabla p'_{inc}}{\rho_0}\rho_s\,'+\frac{\nabla p'_s}{\rho_0}\rho'_{inc}=$$
$$=-\dot{\mathbf{v}}'_{inc}\,\rho'_s-\dot{\mathbf{v}}'_s\,\rho'_{inc},$$

а также линеаризованное уравнение неразрывности (5). Кроме того, очевидно, что для гармонического процесса при интегрировании по периоду колебаний справедливы равенства

$$-\overline{\dot{\mathbf{v}}'_{inc}\,\rho'_s}=\overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\dot{\rho}'_s}\,,\quad -\overline{\dot{\mathbf{v}}'_s\,\rho'_{inc}}=\overline{\mathbf{v}'_s\,\dot{\rho}'_{inc}}$$

(точка сверху означает дифференцирование по времени).

С учетом сказанного получаем цепочку равенств:

$$\frac{c^2}{\rho_0}\overline{\nabla(\rho'_{inc}\,\rho'_s)}=-\overline{\dot{\mathbf{v}}'_{inc}\,\rho'_s}-\overline{\dot{\mathbf{v}}'_s\,\rho'_{inc}}=$$
$$=\begin{cases}\overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\dot{\rho}'_s}-\rho_0\overline{\mathbf{v}'_s\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}},\\[2ex] \overline{\mathbf{v}'_s\,\dot{\rho}'_{inc}}-\rho_0\overline{\mathbf{v}'_{inc}\nabla\cdot\mathbf{v}'_s},\end{cases} \qquad (10)$$

т. к. очевидно, что

$$-\overline{\dot{\mathbf{v}}'_s\,\rho'_{inc}}=\overline{\mathbf{v}'_s\,\dot{\rho}'_{inc}}=-\rho_0\overline{\mathbf{v}'_s\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}}\,;$$
$$-\overline{\dot{\mathbf{v}}'_{inc}\,\rho'_s}=\overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\dot{\rho}'_s}=-\rho_0\overline{\mathbf{v}'_{inc}\nabla\cdot\mathbf{v}'_s}\,.$$

Таким образом, получено два различных представления для первого слагаемого в подынтегральном выражении в (9). Произведем дальнейшие выкладки для варианта

$$\frac{c^2}{\rho_0}\overline{\nabla(\rho'_{inc}\,\rho'_s)}=\overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\dot{\rho}'_s}-\rho_0\overline{\mathbf{v}'_s\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}}\,. \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (9), получаем цепочку равенств:

$$\overline{\mathbf{F}}^{(is)}=$$
$$=-\int_V\left(\frac{c^2}{\rho_0}\overline{\nabla(\rho'_{inc}\,\rho'_s)}+\rho_0\left(\overline{\mathbf{v}'_{inc}\nabla\cdot\mathbf{v}'_s}+\overline{\mathbf{v}'_s\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}}\right)\right)\mathrm{d}V=$$
$$=-\int_V\Big(\overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\dot{\rho}'_s}-\rho_0\overline{\mathbf{v}'_s\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}}+\rho_0\overline{\mathbf{v}'_{inc}\nabla\cdot\mathbf{v}'_s}+$$
$$+\rho_0\overline{\mathbf{v}'_s\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}}\Big)\mathrm{d}V=$$
$$=-\int_V\left(\overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\dot{\rho}'_s}+\rho_0\overline{\mathbf{v}'_{inc}\nabla\cdot\mathbf{v}'_s}\right)\mathrm{d}V=$$
$$=-\int_V\overline{\mathbf{v}'_{inc}\left(\rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}'_s+\dot{\rho}'_s\right)}\mathrm{d}V=$$
$$=-\int_V\overline{\mathbf{v}'_{inc}\left(\rho_0\Delta\varphi'_s-\frac{\rho_0}{c^2}\ddot{\varphi}'_s\right)}\mathrm{d}V=$$
$$=-\rho_0\int_V\overline{\mathbf{v}'_{inc}\left(\Delta\varphi'_s-\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}'_s\right)}\mathrm{d}V. \qquad (12)$$

Здесь учтено, что $\mathbf{v}'=\nabla\varphi'$ и $\dot{\rho}'=-\frac{\rho_0}{c^2}\ddot{\varphi}$. Выражение (12) полностью совпадает с выражением (11) работы [1].

В случае, если бы было принято представление

$$\frac{c^2}{\rho_0}\overline{\nabla(\rho'_{inc}\,\rho'_s)}=\overline{\mathbf{v}'_s\,\dot{\rho}'_{inc}}-\rho_0\overline{\mathbf{v}'_{inc}\nabla\cdot\mathbf{v}'_s}\,,$$

то конечное выражение для рд было бы таким:

$$\overline{\mathbf{F}}^{(is)}=-\rho_0\int_V\overline{\mathbf{v}'_s\left(\Delta\varphi'_{inc}-\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}'_{inc}\right)}\mathrm{d}V\equiv 0\,.$$

Последнее выражение тождественно равно нулю, т. к. внутри объема V потенциал φ'_{inc} удовлетворяет однородному волновому уравнению $\Delta\varphi'_{inc}-\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}'_{inc}=0$. Дело в том, что в соответствии с выбранным объемом интегрирования V и охватывающей его поверхности S при получении выражений для рд принимается предположение о том, что источник падающего поля находится вне объема V.

Вязкая жидкость

В этом случае необходимо исходить из линеаризованной системы Навье—Стокса (7), (5), (6). Отличие от идеальной жидкости проявляется только в уравнении движения (7). В качестве альтернативного подхода примем предположение о стационарности процесса с временны́м фактором $e^{-i\omega t}$, который везде далее опускаем.

Приведем здесь соответствующие выражения, связывающие амплитуды характеристик потенциального поля между собой (обозначения для амплитуд оставим теми же, что были для общего случая временно́й зависимости). Из уравнения (7) получаем

$$-i\omega\mathbf{v}'=-\frac{1}{\rho_0}\nabla p'+\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}\Delta\mathbf{v}'\,.$$

Из соответствующих нестационарных зависимостей [8] получаем для области без источников (особенностей)

$$\Delta\varphi' + k_l^2\varphi' = 0\,, \tag{13}$$

$$\Delta\mathbf{v}' + k_l^2\mathbf{v}' = 0\,, \tag{14}$$

$$\rho' = i\omega\frac{\rho_0}{c^2}\varphi' + \frac{\lambda+2\mu}{c^2}\Delta\varphi',$$
$$p' = i\omega\rho_0\varphi' + (\lambda+2\mu)\Delta\varphi'.$$

Последнее выражение легко преобразуется к следующему виду (см. [9]):

$$p' = \frac{i\rho_0 c^2 k_l^2}{\omega}\varphi'. \tag{15}$$

Для плотности, учитывая (6), имеем

$$\rho' = \frac{i\rho_0 k_l^2}{\omega}\varphi'. \tag{16}$$

Здесь

$$k_l^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\omega\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0 c^2}\right)^{-1}, \tag{17}$$

k_l^2 — квадрат волнового числа продольных волн [7].

Далее модифицируем выражения (15), (16):

$$\nabla p' = \frac{i\rho_0 c^2 k_l^2}{\omega}\mathbf{v}', \tag{15а}$$

$$\nabla\rho' = \frac{i\rho_0 k_l^2}{\omega}\mathbf{v}'. \tag{16а}$$

Из уравнения неразрывности (5) получаем

$$i\omega\rho' = \rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}' = \rho_0\Delta\varphi'. \tag{18}$$

Преобразуем выражение (1) для случая вязкой жидкости при условии, что оценивается составляющая средней силы, вызванная только взаимодействием волн при пренебрежении акустическими течениями, т. е. для случая оценки радиационного давления по терминологии работ [10–12]. Если пренебречь влиянием акустических течений на среднюю силу, то тензор напряжений вязкой жидкости второго порядка малости σ_{ik}'' может быть принят равным $\sigma_{ik}'' \approx -p''\delta_{ik}$. Здесь p'' — величина давления второго порядка малости. В работе [13] без учета акустических течений получено выражение для p'':

$$p'' = \frac{\rho_0}{2c^2}\left(-i\omega\varphi'\right)^2 - \frac{1}{2}\rho_0\left(\nabla\varphi'\right)^2 + i\omega\frac{\lambda+2\mu}{c^2}\varphi'\Delta\varphi'.$$

С учетом (13) последнее выражение перепишется в виде

$$p'' = \left(-\frac{\rho_0}{2c^2}\omega^2 - i\omega k_l^2\frac{\lambda+2\mu}{c^2}\right)\times$$
$$\times\left(\Phi'\right)^2 - \frac{1}{2}\rho_0\left(\nabla\Phi'\right)^2. \tag{19}$$

После подстановки в (19) выражения (15) получаем следующее выражение для p'':

$$p'' = \frac{\left(1 + \dfrac{\omega^2(\lambda+2\mu)^2}{\rho_0^2 c^4}\right)}{2\rho_0 c^2}\left(p'\right)^2 - \frac{1}{2}\rho_0\left|\mathbf{v}'\right|^2. \tag{20}$$

С учетом (20) выражение (8) для вязкой жидкости преобразуется к виду

$$\overline{\mathbf{F}}^{(is)} =$$
$$= -\int_V \nabla\left(-\rho_0\overline{(\mathbf{v}'_{inc}\cdot\mathbf{v}'_s)} + \alpha\frac{c^2}{\rho_0}\overline{(\rho'_{inc}\,\rho'_s)}\right)\mathrm{d}V =$$
$$= -\int_V\left(\rho_0\overline{(\mathbf{v}'_{inc}\cdot\nabla)\mathbf{v}'_s} + \overline{(\mathbf{v}'_s\cdot\nabla)\mathbf{v}'_{inc}} +\right.$$
$$\left. + \overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\nabla\cdot\mathbf{v}'_s} + \overline{\mathbf{v}'_s\,\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}}\right)\mathrm{d}V. \tag{21}$$

Здесь $\alpha = 1 + \dfrac{\omega^2(\lambda+2\mu)^2}{\rho_0^2 c^4}$. Тогда выражение, аналогичное выражению (9) для идеальной жидкости, в случае вязкой жидкости имеет вид

$$\overline{\mathbf{F}}^{(is)} = -\int_V\left(\alpha\frac{c^2}{\rho_0}\overline{\nabla(\rho'_{inc}\,\rho'_s)} +\right.$$
$$\left. + \rho_0\left(\overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\nabla\cdot\mathbf{v}'_s} + \overline{\mathbf{v}'_s\,\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}}\right)\right)\mathrm{d}V. \tag{22}$$

Далее раскроем первое слагаемое под интегралом в (21). Для этого воспользуемся выражениями (16а) и (18).

$$\alpha\frac{c^2}{\rho_0}\overline{\nabla(\rho'_{inc}\,\rho'_s)} =$$
$$= \alpha\frac{c^2}{\rho_0}\overline{\nabla(\rho'_{inc})\rho'_s + \rho'_{inc}\,\nabla\rho'_s} =$$
$$= \alpha\frac{c^2}{\rho_0}\overline{\left(\frac{i\rho_0 k_l^2}{\omega}\mathbf{v}'_{inc}\,\rho'_s + \rho'_{inc}\,\frac{i\rho_0 k_l^2}{\omega}\mathbf{v}'_s\right)} =$$
$$= -\alpha\frac{c^2}{\rho_0}\overline{\left(\frac{\rho_0 k_l^2}{\omega^2}\mathbf{v}'_{inc}\,i\omega\rho'_s + i\omega\rho'_{inc}\,\frac{\rho_0 k_l^2}{\omega^2}\mathbf{v}'_s\right)} =$$

$$=-\alpha\frac{c^2}{\omega^2}\overline{k_l^2\left(\mathbf{v}'_{inc}\,\rho_0\Delta\varphi'_s+\rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}\,\mathbf{v}'_s\right)}=$$

$$=-\left(1+\frac{\omega^2(\lambda+2\mu)^2}{\rho_0^{\,2}c^4}\right)\frac{c^2}{\omega^2}\times$$

$$\times\overline{k_l^2\left(\mathbf{v}'_{inc}\,\rho_0\Delta\varphi'_s+\rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}\,\mathbf{v}'_s\right)}=$$

$$=-\left(1+\frac{\omega^2(\lambda+2\mu)^2}{\rho_0^{\,2}c^4}\right)\frac{c^2}{\omega^2}\frac{\omega^2}{c^2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{1+\dfrac{\omega^2(\lambda+2\mu)^2}{\rho_0^{\,2}c^4}}\right)\times$$

$$\times\overline{\left(1+i\omega\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0c^2}\right)\left(\mathbf{v}'_{inc}\,\rho_0\Delta\varphi'_s+\rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}\,\mathbf{v}'_s\right)}=$$

$$=-\overline{\left(1+i\omega\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0c^2}\right)\left(\mathbf{v}'_{inc}\,\rho_0\Delta\varphi'_s+\rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}\,\mathbf{v}'_s\right)}\approx$$

$$\approx-\rho_0\overline{\left(\mathbf{v}'_{inc}\,\Delta\varphi'_s+\nabla\cdot\mathbf{v}'_{inc}\,\mathbf{v}'_s\right)}. \tag{23}$$

На 2-м шаге последовательных эквивалентных преобразований (23) использовано выражение (16а), кроме того, на 3-м шаге заменен знак на противоположный вследствие следующего факта. Пусть A_1 и A_2 — амплитуды стационарных гармонических сигналов $A_1e^{-i\omega t}$ и $A_2e^{-i\omega t}$ (здесь временно для наглядности возвращен временной фактор $e^{-i\omega t}$). Тогда легко проверить, что имеет место равенство

$$\overline{\left(-i\omega A_1e^{-i\omega t}\right)A_2e^{-i\omega t}}=-\overline{A_1e^{-i\omega t}\left(-i\omega A_2e^{-i\omega t}\right)},$$

аналогичное равенствам во временно́й области, приведенным после выражения (10). Кроме того, для двух процессов $A_1e^{-i\omega t}$ и $A_2e^{-i\omega t}$ имеет место общее равенство для среднего их произведения по периоду $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$:

$$\overline{A_1e^{-i\omega t}A_2e^{-i\omega t}}=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\left(A_1e^{-i\omega t}+A_1^*e^{i\omega t}\right)\left(A_2e^{-i\omega t}+A_2^*e^{i\omega t}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Re}A_1A_2^*.$$

На 4-м шаге (23) использовано тождество (18). На 6-м шаге использован перенос мнимой единицы в выражении для k_l^2 (17) в числитель. На 8-м шаге использован тот факт, что для реализации волнового процесса в вязкой жидкости необходимо выполнение условия [7, с. 23]

$$\omega\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0c^2}<<1,$$

вследствие чего в выражении $1+i\omega\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho_0c^2}$ мнимой составляющей можно пренебречь.

Подставляем итоговый результат (23) в (22), получаем

$$\overline{\mathbf{F}}^{(is)}=-\int_V\left(-\rho_0\overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\Delta\varphi'_s}+\rho_0\overline{\mathbf{v}'_{inc}\,\nabla\cdot\mathbf{v}'_s}\right)\mathrm{d}V=$$

$$=-\rho_0\int_V\overline{\mathbf{v}'_{inc}\left(\Delta+k_l^2\right)\varphi'_s}\mathrm{d}V. \tag{24}$$

Здесь по умолчанию реальное включение заменяется точечным, а рассеянное поле во всем объеме V, исключая эту точку, удовлетворяет уравнению Гельмгольца (13), и, следовательно, вне этой точки справедливо равенство $\Delta\varphi'_s=-k_l^2\varphi'_s$. Таким образом, мы пришли к исходному выражению для идеальной среды [1, выражение (11)], но для гармонического процесса и в вязкой среде.

Наконец, выражение (24) может быть записано в удобном для вычислений виде, аналогичном полученному ранее для идеальной среды [14, выражение (1)]:

$$\overline{\mathbf{F}}^{(is)}=-\frac{\rho_0}{4}\int_V\mathbf{v}'_{inc}\left(\left(\Delta+k_l^2\right)\varphi'_s\right)^*\mathrm{d}V+\text{к.с.} \tag{25}$$

Исходя из (2) и (20) выражение для квадратичной составляющей рд может быть записано так:

$$\overline{F_i}^{(ss)}=-\int_S\left\{\left(-\frac{\rho_0}{2}\overline{\left|\mathbf{v}'_s\right|^2}+\frac{\alpha}{2\rho_0c^2}\overline{\left|p'_s\right|^2}\right)\delta_{ik}+\right.$$

$$\left.+\rho_0\left(\overline{v'_{s_i}\,v'_{s_k}}+\overline{v'_{s_i}\,v'_{s_k}}\right)n_k\right\}\mathrm{d}S,\quad i=\overline{1,3}.$$

Учитывая, что $\alpha\approx1$, последнее выражение для вязкой жидкости записывается идентично выражению (2) для идеальной жидкости:

$$\overline{F_i}^{(ss)}=-\int_S\left\{\left(-\frac{\rho_0}{2}\overline{\left|\mathbf{v}'_s\right|^2}+\frac{1}{2\rho_0c^2}\overline{\left|p'_s\right|^2}\right)\delta_{ik}+\right.$$

$$\left.+\rho_0\left(\overline{v'_{s_i}\,v'_{s_k}}+\overline{v'_{s_i}\,v'_{s_k}}\right)\right\}n_k\mathrm{d}S,\quad i=\overline{1,3}, \tag{26}$$

а в волновой зоне в точности совпадает с выражением (2а) для идеальной среды.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе приведен подробный вывод полученных ранее выражений для перекрестной и квадратичной составляющих радиационного давления в идеальной среде. Получены выражения для составляющей радиационного давления в вязкой среде, обусловленной взаимодействием первичной и рассеянной волн. Эти выражения оказались по форме совершенно аналогичны выражениям для идеальной среды. Этот факт позволяет экстраполировать всю наработанную для идеальной среды технику на случай вязкой среды в части, касающейся оценки упомянутой составляющей радиационного давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горьков Л.П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Доклады АН СССР. 1961. Т. 140, № 1. С. 88–91.
2. *Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* Связь радиационного давления с амплитудой рассеяния сложных включений в идеальной жидкости // ДАН. 2008. Т. 419, № 3. С. 324–327.
3. *Settnes M., Bruus H.* On the forces acting on a small particle in an acoustical field in a viscous fluid. 2011. URL: (http://arxiv.org/pdf/1110.6037.pdf).
4. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости (обзор). I // Прикл. механика. 2000. Т. 36, № 1. С. 25–52.
7. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
8. *Шарфарец Б.П.* Амплитуда рассеяния упругого шарика в вязкой изотропной жидкости // Научное приборостроение. 2012. Т. 22, № 2. С. 90–97.
9. *Doinikov A.A.* Acoustic radiation pressure on a rigid sphere in a viscous fluid // Proc. R. Soc. Lond. A. 1994. V. 447. P. 447–466.
10. *Данилов С.Д.* Средняя сила, действующая на малую сферу в поле бегущей волны в вязкой жидкости // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 1. С. 45–49.
11. *Данилов С.Д.* Средняя сила, действующая на малое тело в осесимметричном звуковом поле в реальной среде // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. 1986. № 5. С. 161–169.
12. *Danilov S.D., Mironov M.A.* Mean force on a small sphere in a sound field in a viscous fluid // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107, N 1. P. 143–153.
13. *Гузь А.Н., Жук А.П.* О гидродинамических силах, действующих в акустическом поле в вязкой жидкости // ДАН. 1982. Т. 266, № 1. С. 32–35.
14. *Данилов С.Д., Миронов М.А.* О силе радиационного давления, действующей на малую частицу в звуковом поле // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 4. С. 467–473.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 4.04.2012.

DEDUCTION OF EXPRESSIONS FOR CROSS AND QUADRATIC COMPONENTS OF RADIATION PRESSURE IN CASES OF THE IDEAL AND VISCOUS FLUID

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg

The detailed deduction of the earlier expressions for calculation of radiation pressure in perfect fluid was made. The deduction of earlier missing corresponding expressions for a component of radiation pressure in a viscous medium caused by interaction of impinging and diffused waves was also realized. These expressions, being similar in shape with the expressions for perfect medium, will allow to use all techniques developed for the calculations of radiation pressure for perfect medium.

Keywords: radiation pressure, cross component, quadratic component, perfect liquid, viscous liquid