ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2012, том 22, № 3, с. 96–100

УДК 534.874+534.26+534.286+530.16

© Б. П. Шарфарец

СВОЙСТВА ОБЩЕЙ И ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ, А ТАКЖЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. Ч. II. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ (ОБЗОР)

Дан обзор дисперсионных соотношений для общей и парциальных амплитуд рассеяния применительно к акустическим полям, являющихся следствием принципа причинности, адаптированного к классическим полям, подчиняющимся волновым уравнениям. Приведена теорема Титчмарша, являющаяся теоретическим обоснованием дисперсионных соотношений. Приведены аналитические свойства S-матрицы. Упомянутые результаты могут быть использованы в задачах акустического рассеяния, к которым в свою очередь сводится проблема расчета радиационного давления, в частности в средах с потерями.

Кл. сл.: причинность, дисперсионные соотношения, общая амплитуда рассеяния, парциальная амплитуда рассеяния

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Здесь рассматриваются дисперсионные соотношения, исследование которых получило большое развитие в теориях распространения света в диэлектрической среде, а также электромагнитного и квантовомеханического рассеяний. Упомянутые соотношения приводятся применительно к акустическому рассеянию.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Дисперсионные соотношения связывают такие различные величины, как мнимые и действительные составляющие показателей преломления, парциальных и полных амплитуд рассеяния классических и квантовомеханических полей как для ограниченных в пространстве включений, так и для нефинитных потенциалов. В настоящей работе будут рассмотрены дисперсионные соотношения для волнового акустического рассеяния в случае финитных включений.

Дисперсионные соотношения — интегральные представления функций отклика, описывающие реакцию равновесной стационарной физической системы на внешние воздействия. Дисперсионные соотношения отражают аналитические свойства функций отклика в комплексной плоскости частоты, фиксируют их частотную зависимость.

Дисперсионные соотношения являются следствием принципа причинности, который в различных областях физики может формулироваться поразному. Существование причинных связей обычно означает, что некоторая функция тождественно обращается в нуль в пределах некоторой области определения ее аргумента. Из чего следует возможность аналитического продолжения трансформанты Фурье этой функции в некоторую область комплексной плоскости.

Причинность и аналитичность

Пусть произвольная физическая система испытывает внешнее зависящее от времени воздействие $f(t)$; назовем его "вход". Ему соответствует "выход" $x(t)$. Пусть далее система удовлетворяет следующим условиям.

I. Линейность (принцип суперпозиции): выход — линейный функционал входа

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t,t')f(t')\,\mathrm{d}t'.$$

II. Инвариантность относительно временны́х сдвигов. Это означает, что если вход смещен на некоторый временной интервал τ, то выход будет смещен на тот же интервал τ: $x(t\pm\tau)$ соответствует $f(t\pm\tau)$. Из этого следует, что $g(t,t')$ может зависеть только от разности аргументов

$g(t,t') = g(t-t')$. Поэтому соотношение по п. I. записывается в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t')f(t')\mathrm{d}t' = g(t) * f(t).$$

Пусть $G(\omega)$, $F(\omega)$ и $X(\omega)$ — соответствующие трансформанты Фурье. Тогда по теореме о свертке имеем

$$X(\omega) = G(\omega)F(\omega).$$

III. Простое условие причинности. Выход не может предшествовать входу, поэтому если $f(t) = 0,\ \ t < T$, то и $x(t) = 0,\ \ t < T$, а это означает, что

$$g(\tau) = 0, \quad \tau < 0.$$

Следовательно, можно записать для $\omega = u + iv$

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} g(\tau)e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty} g(\tau)e^{iu\tau}e^{-v\tau}\mathrm{d}\tau.$$

При условии, что $g(\tau)$ — непрерывная или имеющая конечное число разрывов первого рода ограниченная функция на интервале интегрирования, функция $G(\omega)$ будет голоморфной функцией (т. е. функцией, представимой сходящимся к ней рядом Тейлора) комплексного переменного ω при $\mathrm{Re}\,\omega > 0$ [2, с. 133], [3, с. 254].

Однако для получения дисперсионных соотношений, т. е. соотношений между действительной $\mathrm{Re}\,G(\omega)$ и мнимой $\mathrm{Im}\,G(\omega)$ составляющими функции $G(\omega)$ еще недостаточно голоморфности последней в полуплоскости

$$I_+ = \{-\infty < \mathrm{Re}\,\omega < \infty,\ \mathrm{Im}\omega > 0\}.$$

Необходимо еще некоторое условие достаточно быстрого ее убывания при $|\omega| \to \infty$. Такое условие дается ниже.

Формулы Племеля

Предположим, что функция $G(\omega)$ — квадратично интегрируемая функция на действительной оси ω

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega < C = \mathrm{const}.$$

Тогда при любом фиксированном $\mathrm{Re}\,\omega = v > 0$ справедливо неравенство [4, с. 33]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(u+iv)|^2 \mathrm{d}u < C = \mathrm{const}.$$

Отсюда и из теоремы Коши следуют соотношения [4, с. 34]

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega')}{\omega' - \omega}\mathrm{d}\omega',\ \ \mathrm{Im}\,\omega > 0;$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi i} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega')}{\omega' - \omega}\mathrm{d}\omega',\ \ \mathrm{Im}\,\omega = 0,$$

выражающие значение функции $G(\omega)$ в произвольной точке ω верхней полуплоскости и при действительных ω через ее значения на действительной оси, а также формулы Племеля, или дисперсионные соотношения, связывающие действительную и мнимую части функции $G(\omega)$ при вещественных значениях частот ω и ω':

$$\mathrm{Re}\,G(\omega) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\,G(\omega')}{\omega' - \omega}\mathrm{d}\omega',$$

$$\mathrm{Im}\,G(\omega) = -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\,G(\omega')}{\omega' - \omega}\mathrm{d}\omega'.$$

Здесь P означает главное значение интеграла в смысле Коши.

Отметим, что каждую из формул Племеля можно получить из другой, поэтому нужна только одна из них. Вследствие взаимно однозначного соответствия, существующего между $\mathrm{Re}\,G(\omega)$ и $\mathrm{Im}\,G(\omega)$, эти функции называют взаимными трансформантами Гильберта.

Теорема Титчмарша

Теорема Титчмарша дает точную формулировку приведенных выше результатов [5, с. 125–129].

Теорема Титчмарша. Если квадратично интегрируемая функция $G(\omega)$ удовлетворяет одному из четырех нижеследующих условий, то она удовлетворяет и остальным трем.

1. Обратная Фурье-трансформанта $g(t)$ функции $G(\omega)$ равна нулю для $t < 0$

$$g(t) = 0, \quad t < 0.$$

2. $G(u)$ почти для всех u является предельным значением при $v \to 0+$ аналитической функции $G(u+iv)$, голоморфной в верхней полуплоскости и квадратично интегрируемой вдоль произвольной прямой, параллельной вещественной оси:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(u+iv)|^2 \mathrm{d}u < C \quad (v > 0).$$

3. $\mathrm{Re}\,G(\omega)$ и $\mathrm{Im}\,G(\omega)$ удовлетворяют первой формуле Племеля:

$$\operatorname{Re}G(\omega)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}G(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega',\ \operatorname{Im}\omega=0.$$

4. $\operatorname{Re}G(\omega)$ и $\operatorname{Im}G(\omega)$ удовлетворяют второй формуле Племеля:

$$\operatorname{Im}G(\omega)=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}G(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega',\ \operatorname{Im}\omega=0.$$

Функцию $G(\omega)$, удовлетворяющую одному из условий теоремы Титчмарша, а следовательно, и всем остальным, называют *причинной трансформантой*.

Вычитания

На деле может оказаться, что функция $G(\omega)$ не является квадратично интегрируемой. Однако в большинстве случаев квадратично интегрируемому выходу $x(t)$ соответствует квадратично интегрируемый вход $f(t)$. Тогда, согласно теореме Парсеваля, следует более слабое ограничение на функцию $G(\omega)$ [4, с. 39]: $\left|G(\omega)\right|^2\le A$. В этом случае функция $G(\omega)$ перестает быть причинной трансформантой и, следовательно, для нее не удается получить дисперсионных соотношений. Однако для функции

$$D(\omega)=\left(G(\omega)-G(\omega_0)\right)/\left(\omega-\omega_0\right),$$

которая уже является причинной трансформантой, такие соотношения получить удается [4, с. 41]:

$$G(\omega)=G(\omega_0)+\frac{\omega-\omega_0}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\omega')}{\omega'-\omega_0}\frac{\mathrm{d}\omega'}{\omega'-\omega},\ \operatorname{Im}\omega=0.$$

Здесь ω_0 — некоторое фиксированное значение действительной частоты ω, которую часто выбирают равной $\omega_0=0$ или $\omega_0=\infty$.

Оказывается возможным получить дисперсионные соотношения и при неограниченном росте функции $G(\omega)$. Например, когда $G(\omega)\underset{|\omega|\to\infty}{=}O(\omega)$, пользуются двойным вычитанием [4, с. 41], чтобы получить квадратично интегрируемую функцию

$$D_1(\omega)=\left(G(\omega)-G(\omega_0)-\left(\omega-\omega_0\right)G'(\omega_0)\right)/\left(\omega-\omega_0\right)^2,$$

для которой вновь справедливы дисперсионные соотношения. И вообще при $G(\omega)\underset{|\omega|\to\infty}{=}O(\omega^n)$ можно получить дисперсионное соотношение с $n+1$ вычитаниями.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ

Применительно к акустическому рассеянию принцип причинности формулируется так [4, с. 71]: *выходящая* (*рассеянная,* прим. авт.) *волна не может появиться, до того как падающая волна достигнет рассеивателя.*

Для простоты далее будем рассматривать случай, когда акустическое включение является сферически симметричным конечного радиуса a. Дальнейшее изложение начнем с рассмотрения свойств S-матрицы.

Свойства S-матрицы

Важнейшую роль в теории рассеяния играет S-матрица (функция), через которую выражается совокупная амплитуда рассеяния включения.

Амплитуда рассеяния сферического включения $f(k,\theta)$ определяется через парциальные амплитуды рассеяния $f_l(k)$ следующим образом [4, с. 141]

$$f(k,\theta)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\left(2l+1\right)f_l(k)P_l\left(\cos\theta\right), \tag{1}$$

где

$$f_l(k)=\frac{1}{2i}\left[S_l(k)-1\right]=e^{i\delta_l}\sin\delta_l= \\ =\frac{k}{2}\int_0^{\pi}f\left(k,\theta\right)P_l\left(\cos\theta\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{2}$$

Здесь $S_l(k)=e^{2i\delta_l(k)}$, $l=0,1,2,...$ — элементы S-матрицы.

Приведем свойства S-матрицы применительно к акустическому рассеянию [4].

На действительной оси $\operatorname{Im}k=0$ имеем соотношение симметрии S-функции [4, с. 69]

$$S_l(-k)=\overline{S}_l(k), \tag{3}$$

условие унитарности S-функции [4, с. 69]

$$\left|S_l(k)\right|^2=S_l(k)\overline{S}_l(k)=1, \tag{4}$$

а также соотношение [4, с. 70]

$$S_l(k)S_l(-k)=1, \tag{5}$$

откуда следует

$$S_l(0)=\pm1. \tag{6}$$

Обычно принимается $S_l(0)=1$, т. к. при $S_l(0)=-1$ неограниченно возрастают парциальные поперечные сечения рассеяния [4, с. 70, 84].

Из последних тождеств и равенства

$S_l(k)=e^{2i\delta_l(k)}$ следует, что фазовый сдвиг $\delta_l(k)$ — нечетная функция k [4, с. 70]

$$\delta_l(k)=-\delta_l(-k).$$

Ниже будет определено аналитическое продолжение $S_l(k)$ в I_+ ($\operatorname{Im}k>0$) через их значение на действительной оси [4, с. 73]

$$\overline{S}_l(k)=S_l(-\overline{k}). \quad (7)$$

Таким образом, S-функция принимает комплексно сопряженные значения в точках, расположенных симметрично относительно мнимой оси. В частности, $S_l(k)$ вещественна на мнимой оси.

Аналитическое продолжение в полуплоскость I_- ($\operatorname{Im}k<0$) осуществляется с помощью выражения (5) [4, с. 74], справедливого для действительных k, положив $k=k'+iK$, $K<0$:

$$S_l(k)=S_l(k'+iK)=1/S_l(-k'-iK)=1/S(-k). \quad (8)$$

Выражение (8) определяет аналитическую функцию в I_-, регулярную всюду, за исключением полюсов, соответствующих точкам, в которых $-k'-iK$ совпадает с нулем $S_l(k)$ в I_+ (как известно [4], функция $S_l(k)$ является голоморфной в I_+). Таким образом, $S_l(k)$ является мероморфной функцией с полюсами в I_-.

Из (1) и (8) получается обобщение (4) на комплексные значения k:

$$S_l(k)\overline{S}_l(\overline{k})=1. \quad (9)$$

Соотношения (1), (8) и (9) подразумевают существование некоторых свойств симметрии в распределении полюсов и нулей $S_l(k)$. Пусть k_n — полюс $S_l(k)$ в четвертом квадранте. Тогда, согласно (1), $-\overline{k}_n$ — также полюс, а согласно (8) и (9), $-k_n$ и $\overline{k}_n$ — нули $S_l(k)$: зеркальное изображение полюса относительно мнимой оси также представляет полюс, в то время как зеркальное изображение относительно вещественной оси или начала координат дает нули.

Наконец, приведем условие унитарности для амплитуды рассеянной парциальной волны, следующее из (2) [4, с. 141]:

$$\operatorname{Im} f_l(k)=\sin^2\delta_l=\left|f_l(k)\right|^2. \quad (10)$$

Последнее условие является следствием унитарности S-матрицы (4).

Дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд рассеяния

Для рассматриваемого включения можно выписать дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд рассеяния [4].

Справедливы следующие дисперсионные соотношения [4, с. 73, 85]:

$$S_{al}(k)=S_l(0)+\frac{k}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{al}(k')-S_{al}(0)}{k'(k'-k)}\mathrm{d}k', \quad \operatorname{Im}k=0.$$

Здесь $S_{al}(k)=e^{2ika}S_l(k)$. Учитывая, что $S_l(0)=1$ (см. (6) и последующий комментарий), имеем

$$S_{al}(k)=1+\frac{k}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{al}(k')-S_{al}(0)}{k'(k'-k)}\mathrm{d}k', \quad \operatorname{Im}k=0.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{Re}\left[e^{2ika}S_l(k)\right]=1+\frac{k}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\left[S_{al}(k')-S_{al}(0)\right]}{k'(k'-k)}\mathrm{d}k',$$
$$\operatorname{Im}k=0.$$

Кроме того, имеет место дисперсионное соотношение, представляющее собой аналитическое продолжение с действительной оси $\operatorname{Im}k=0$ на верхнюю полуплоскость I_+ $\operatorname{Im}k>0$:

$$S_{al}(k)=1+\frac{k}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{al}(k')-S_{al}(0)}{k'(k'-k)}\mathrm{d}k', \ \operatorname{Im}k>0. \quad (11)$$

Дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния

Амплитуда рассеяния $f(k,\theta)$ для сферически симметричного включения определяется из (1) и является функцией двух переменных — волнового числа k и угла азимута θ.

Вначале приведем тот факт [4, с. 141], что условие симметрии (3), выражающее вещественность взаимодействия, приводит к аналогичному соотношению для амплитуды рассеяния:

$$f(-k,\theta)=\overline{f}(k,\theta), \ \operatorname{Im}k=0.$$

Дисперсионные соотношения будем рассматривать для переменной k. Пусть

$$f_a(k,\theta)=e^{2ika\sin\frac{\theta}{2}}f(k,\theta).$$

Тогда имеет место следующее дисперсионное соотношение для амплитуды рассеяния сферического включения радиусом a при заданном угле рассеяния [4, с. 146]:

$$\operatorname{Re}\left[e^{2ika\sin\frac{\theta}{2}}f(k,\theta)\right]=$$

$$=f(0,\theta)+\frac{2k^2}{\pi}P\int_0^\infty\frac{\operatorname{Im}\left[e^{2ik'a\sin\frac{\theta}{2}}f(k',\theta)\right]}{k'\left(k'^2-k^2\right)}\mathrm{d}k',$$

$\operatorname{Im}k=0$.

Из последнего соотношения легко получается дисперсионное соотношение для амплитуды рассеяния вперед

$$\operatorname{Re}\left[f(k,0)\right]=f(0,0)+\frac{2k^2}{\pi}P\int_0^\infty\frac{\operatorname{Im}\left[f(k',0)\right]}{k'\left(k'^2-k^2\right)}\mathrm{d}k',$$

которое не зависит от радиуса рассеивателя. Таким образом, дисперсионное соотношение для $\theta=0$ имеет более фундаментальный характер.

Учитывая оптическую теорему

$$\operatorname{Im}\left[f(k',0)\right]=\frac{k}{4\pi}\sigma(k),$$

где $\sigma(k)$ — полное сечение рассеяния, последнее соотношение перепишется в виде

$$\operatorname{Re}\left[f(k,0)\right]=f(0,0)+\frac{k^2}{2\pi^2}P\int_0^\infty\frac{\sigma(k')}{k'^2-k^2}\mathrm{d}k'.$$

Величину $-f(0,0)$ обычно называют длиной рассеяния. В последнем соотношении уже можно опираться на измеряемые на опыте величины.

Работа была выполнена при поддержке Президиума Российской академии наук: программа фундаментальных исследований Президиума РАН № 21 "Основы фундаментальных исследований нанотехнологий и наноматериалов".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарфарец Б.П.* Свойства общей и парциальных амплитуд рассеяния, а также дисперсионные соотношения в квантовой механике. Ч. I. Свойства парциальных амплитуд рассеяния. Обзор // Научное приборостроение. 2012. Т. 22, № 1. С. 5–12.
2. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа, т. 1. М.: Физматлит, 1963. 515 с.
3. *Тейлор Дж.* Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений. М.: Мир, 1975. 567 с.
4. *Нуссенцвейг Х.М.* Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976. 462 с.
5. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980. 450 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 27.08.2011.

PROPERTIES OF GENERAL AND PARTIAL SCATTERING AMPLITUDES AND DISPERSION RELATIONS IN QUANTUM MECHANICS. PART II. DISPERSION RELATIONS (REVIEW)

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg

The review of dispersion relations for general and partial scattering amplitudes regarding acoustic fields which are the consequence principle of causality adapted for classical fields, submitting wave equations is presented. Titchmarsh theorem which is a theoretical substantiation of dispersion relations is given as well as analytical S-matrix properties. The mentioned effects can be used in problems of acoustic dispersion to which the problem of calculation of radiation pressure is reduced, in particular in media with losses.

Keywords: causality, dispersion relations, general scattering amplitude, partial scattering amplitude