МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 621.384.668.8

© В. Д. Саченко

БИПОЛЯРНАЯ ПРОЕКТИВНОСТЬ ГАУССОВЫХ ТОЧЕК В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОСЬЮ

В оптических системах с криволинейной осью обнаружены особые внеосевые геометрические точки, названные автором *оптическими полюсами*, которые обеспечивают ранее неизвестное фундаментальное проективное свойство гауссовых изображений, названное *биполярно проективным соответствием* (ВРС). Рассмотрен вопрос существования и местоположения оптических полюсов в произвольной оптической системе с криволинейной осью. Доказано, что если оптическая сила системы отлична от нуля, а угол поворота ее оси отличен от πn, где $n = 0,1,...$, то оптические полюсы всегда существуют и расположены на особых прямых, названных *фoктрисами*, которые проходят через фокусы оптической системы параллельно противолежащим им оптическим плечам. Позиции оптических полюсов взаимосвязаны и подчинены известному оптическому уравнению Ньютона.

Кл. сл.: биполярно проективное соответствие, криволинейная оптическая ось, гауссово изображение, оптические полюсы, фoктриса

ВВЕДЕНИЕ

Барбер [1] и Штефенс [2] обнаружили, что в корпускулярно-оптической призме с однородным магнитным полем, граница которой ортогональна к оптической оси, при условии идеальной однородности поля внутри границ и отсутствия его вне границ прямая, проходящая через сопряженные гауссовы точки, всегда проходит через центр поворота оптической оси (рис. 1). Данное проективное свойство широко известно в литературе как "*правило Барбера*". К тому же времени относятся исследования Герцога [3] оптических свойств магнитных призм с однородными полями с произвольными наклонами границ призмы к ее оптической оси. Им был показан графический способ определения кардинальных оптических точек таких призм. Позже данный способ был применен Картаном [4] для построения гауссовых изображений (рис. 2). Картаном был также показан графический способ обнаружения гауссовых оптических изображений в электростатических призмах с цилиндрическим полем, основанный на использовании дополнительного "эрзац-шаблона" оригинала, но с иным углом поворота оптической оси и особым масштабированием оси в поле и вне призмы. Позднее Джадд [5] применил данную идею для определения положений гауссовых изображений в магнитостатических призмах с радиально неоднородным полем $H = H_0 \cdot (r_0/r)^n$ (рис. 3). Возможности графических методов анализа электростатических и магнитных призм были расширены и развиты в работе [6].

Ниже впервые предложен и обоснован универсальный метод определения гауссовых изображений. Он основан на обнаруженном автором фундаментальном свойстве гауссовых изображений, названном "*биполярно проективное соответствие*", присущем, как показано ниже, любой оптической системе с криволинейной осью, для которой справедливо ньютоново сопряжение гауссовых точек и угол поворота оптической оси отличен от значений πn, где $n = 0,1,...$

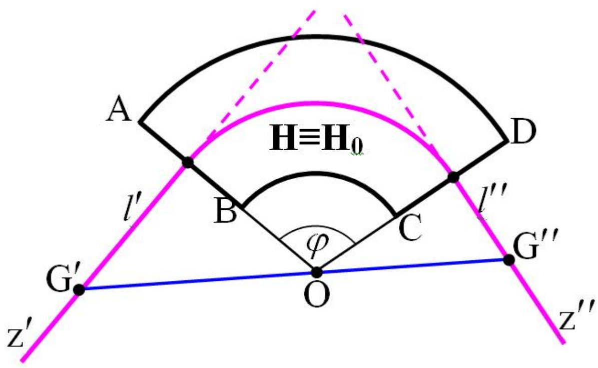

Рис. 1. Правило Барбера.
Гауссовы точки G′ и G″ и центр O поворота оптической оси лежат на одной прямой.
φ — угол поворота оптической оси; ABCD — область поля призмы; l', l'' — входное и выходное плечи призмы. Входная и выходная оси z′ и z″ ортогональны к AB и CD

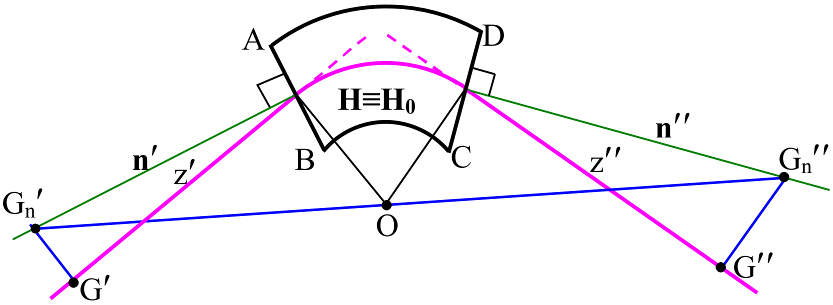

Рис. 2. Правило Картана.
Точки G_n' и G_n'' и центр O поворота оптической оси лежат на одной прямой.
Гауссовы точки G′ и G″ есть ортогональные проекции G_n' и G_n'' на входную и выходную оси z′ и z″; **n′** и **n″**— нормали к границам AB и CD в точках их пересечения с оптической осью

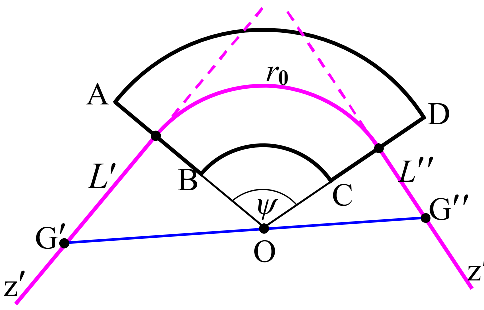

Рис. 3. Эрзац-шаблон Джадда для магнитных призм с полем $H = H_0 \cdot (r_0/r)^n$.
$\omega = \sqrt{(1-n)}$: $\psi = \omega \cdot \varphi$; $L' = \omega \cdot l'$; $L'' = \omega \cdot l''$; φ — угол поворота оптической оси; l', l'' — входное и выходное плечи призмы (см. рис. 1); G′, G″ — сопряженные точки шаблона.
G′, G″ и центр O поворота оптической оси лежат на одной прямой

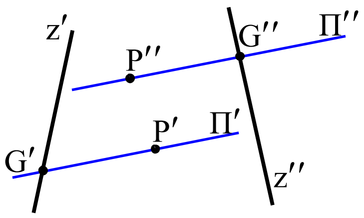

Рис. 4. Биполярно проективное соответствие осей z′ и z″.
П', П" — проектирующие прямые; P′, P″ — B-полюсы; G′, G″ — B-сопряженные точки

О БИПОЛЯРНО ПРОЕКТИВНОМ СООТВЕТСТВИИ И СОПУТСТВУЮЩЕЙ ТЕРМИНОЛОГИИ

Концепция *биполярной проекции* обобщает общеизвестную центральную проекцию. Выберем произвольно две оси z′ и z″. Вне их зафиксируем две произвольные точки P′ и P″, которые назовем *B-полюсами* (рис. 4). Проведем через данные полюсы параллельные прямые П′ и П″, которые назовем *проектирующими*, а их совокупность *проектирующей парой* (П′, П″). Пусть проектирующая прямая П′ пересечет ось z′ в точке G′, а проектирующая прямая П″ пересечет ось z″ в точке G″. Очевидно, что указанное соответствие точек G′ и G″ при фиксированном положении полюсов P′ и P″ будет взаимно однозначным. Назовем его "*биполярно проективное соответствие*" (BPC), а отмеченные точки G′ и G″ назовем *B-сопряженными точками*. При фиксированном положении полюсов P′ и P″, меняя направления проектирующих пар (П′, П″), можно получить взаимно-однозначное *биполярно проективное* соответствие всех точек осей z′ и z″. Пусть оси z′ и z″ пересекаются в некоторой точке V. Выделим среди множества проектирующих прямых П′ и П″ особые прямые π' и π'', первая из которых проходит через полюс P′ параллельно оси z″, пересекая ось z′ в некоторой точке F′, а вторая проходит через полюс P″ параллельно оси z′, пересекая ось z″ в точке F″ (рис. 5) . Указанные особые прямые π' и π''

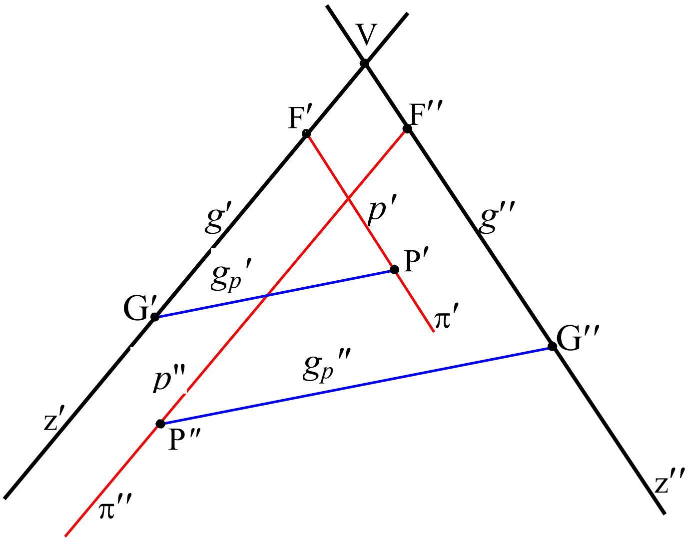

Рис. 5. Фоктрисы осей z′ и z″.
F′, F″ — фокальные точки; P′, P″ — В-полюсы; *g*′, *g*″ — *ньютоновы плечи*; g_p' = P′G′; g_p'' = P″G″; *p*′= P′F′; *p*″= = P″F″, π′, π″ — фоктрисы полюсов P′ и P″; G′ и G″ — В-сопряженные точки

назовем *фоктрисами* полюсов P′ и P″, соответственно. Точки F′ и F″ назовем *фокальными точками* осей z′ и z″ (название и обозначение данных точек обусловлены тем, что их В-изображения находятся в "бесконечности"). Элементы, помеченные однотипными штрихами, будем называть *смежными*. Расстояния между смежными точками F и G назовем *ньютоновыми плечами*, обозначив их соответственно *g*′ и *g*″; расстояния между смежными точками G и P назовем *полярными радиусами* В-сопряженных точек, обозначив их g_p' и g_p''; а расстояния между смежными точками F и P назовем *полюсными плечами*, обозначив их *p*′ и *p*″. Все указанные величины рассматриваются алгебраическими и могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Биполярно проективное соответствие становится центрально проективным в случае, когда В-полюсы совпадают. В этом особом случае совмещенный В-полюс назовем *сингулярным.*

СОГЛАШЕНИЕ О ЗНАКАХ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ВРС

Поскольку ньютоновы и полюсные плечи отсчитываются от фокальных точек F′ и F″, то естественно принять последние за начало отсчетов указанных плеч. Примем следующее соглашение о знаках. Будем считать, что ньютоновы плечи *g*′ и *g*″ положительны, если F′ и F″ расположены между вершиной V и соответствующими точками G′ и G″; полюсные плечи *p*′ и *p*″ будем считать положительными, если соответствующие В-полюсы расположены внутри угла между осями z′ и z″, как показано на рис. 5. Не умаляя общности дальнейших результатов, примем для определенности расположение В-полюсов, соответствующее положительным значениям *p*′ и *p*″ (как на рис. 5). Нетрудно доказать, что *для любых В-сопряженных точек* G′ *и* G″ *произведение их ньютоновых плеч всегда положительно.* При этом из подобия треугольников F′P′G′ и F″G″P″ на рис. 5 следует фундаментальная связь между ньютоновыми и полюсными плечами, выражающая характеристическое свойство ВРС:

$$g' \cdot g'' = p' \cdot p''. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что *для любой пары В-сопряженных точек* G′ *и* G″ *при фиксированном положении В-полюсов произведение ньютоновых плеч g′ и g″ есть величина постоянная*. Поскольку эта постоянная положительна, обозначим ее p^2, а параметр *p* назовем *параметром В-сопряжения*. Таким образом,

$$p = \sqrt{(p' \cdot p'')}. \qquad (2)$$

Не останавливаясь на других свойствах ВРС, приведем известные практические примеры, иллюстрирующие биполярно проективное соответствие гауссовых точек.

ПРИМЕРЫ ВРС В ОПТИКЕ

Классическим примером В-сопряжения является проективное соответствие оптически сопряженных внеосевых точек линзы, имеющей

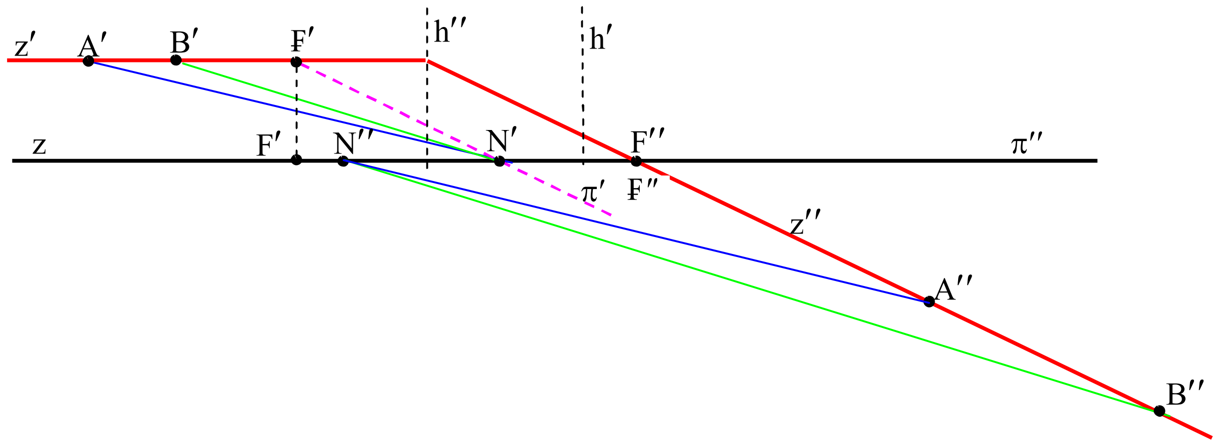

Рис. 6. ВРС внеосевых точек в линзе.
z — центральная оптическая ось линзы; h′,h″ — главные плоскости линзы; z′, z″ — входная и выходная оси; A′, B′ — внеосевые (относительно центральной оптической оси) объектные точки, лежащие на входной оси z′; A″, B″ — оптические изображения точек A′и B′ соответственно; F′, F″ — фокальные точки линзы; ₣′, ₣″ — фокальные точки линзы при смещении оси (точки F″ и ₣″ здесь совпадают); π′, π″ — фoктрисы линзы при смещении оптической оси (фoктриса π″ совпадает с центральной оптической осью z). B-полюсы линзы при смещении оси расположены в узловых точках линзы N′ и N″

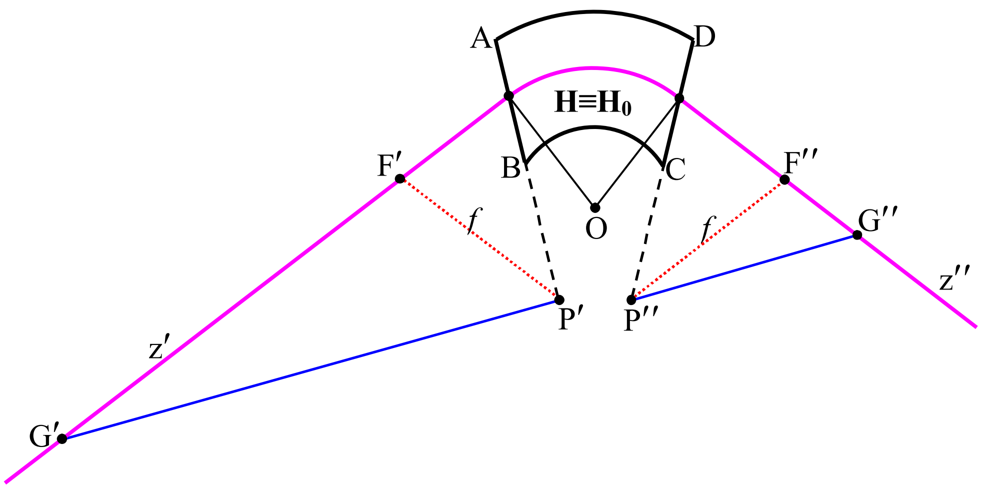

Рис. 7. B-сопряжение в симметричной магнитной призме.
Полярные радиусы гауссовых точек G′ и G″ параллельны; F′, F″ — фокальные точки призмы; P′, P″ — оптические полюсы; F′P′, F″P″ — фoктрисы оптических полюсов; f — фокусное расстояние призмы; AB и CD — эффективные границы магнитного поля призмы

прямолинейную центральную оптическую ось (рис. 6). В данном случае роль B-полюсов играют узловые точки. Действительно, через любую внеосевую объектную точку можно провести луч, параллельный оптической оси линзы, связав с данным лучом новую оптическую ось (см. рис. 6). В параксиальном приближении данный луч, а вместе с ним и смещенная ось после искривления луча в поле линзы асимптотически пройдут через выходной фокус F″, образуя асимптотическое выходное плечо смещенной оси, на котором расположено гауссово изображение исходного объекта. Согласно определению узловых точек линзы, исходный внеосевой объект и его изображение геометрически будут B-сопряжены через данные узловые точки.

Другим классическим примером B-сопряжения гауссовых точек является упоминавшееся выше правило Барбера для магнитных призм с однородным полем, справедливое в случае ортогональности границ к оптической оси. Нетрудно доказать, что в данных призмах фoктрисы проходят через центр поворота оптической оси; при этом данный

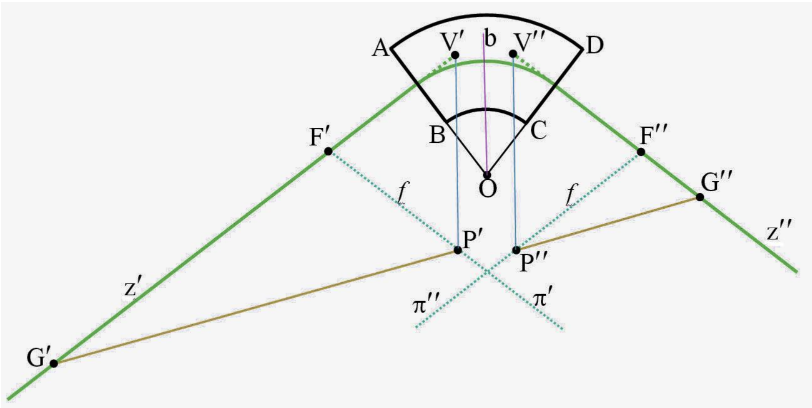

Рис. 8. В-сопряжение гауссовых точек в магнитной призме с полем $H=H_0\cdot(r_0/r)^n$. P′, P′′ — кардинальные оптические полюсы: P′G′ ║ P′′G′′; V′, V′′ — главные точки призмы; F′, F′′ — фокальные точки призмы; π′, π′′ — фоктрисы оптических полюсов; f — фокусное расстояние призмы; b — биссектриса угла поворота оптической оси; AB и CD — эффективные границы магнитного поля призмы

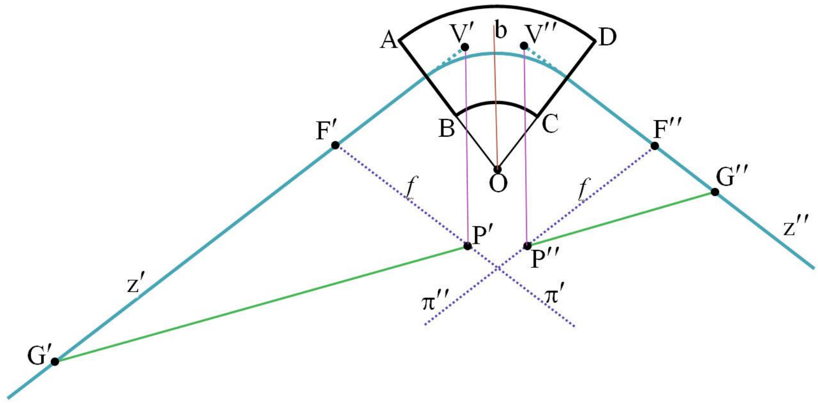

Рис. 9. Центральная проективность гауссовых точек в магнитной призме со скошенными границами с полем $H = H_0\cdot(r_0/r)^n$ в условиях наличия сингулярного В-полюса.
ε — угол скоса границ призмы; точка O — центр поворота оптической оси; AB и CD — эффективные границы магнитного поля призмы.
Гауссовы точки G′ и G′′ лежат на прямой, проходящей через сингулярный В-полюс в точке P пересечения фоктрис π′ и π′′

центр является сингулярным В-полюсом, что и предопределяет центральную проективность гауссовых точек. Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и в электростатической призме со сферически симметричным полем. Легко заметить, что если сингулярный В-полюс существует, то он расположен в точке пересечения фоктрис оптической системы. В случае магнитных призм с однородным полем и произвольным наклоном границ к оптической оси точка пересечения фоктрис не является сингулярным В-полюсом. При этом в случае магнитной призмы с симметрично наклонными к оптической оси границами при любых углах поворота оптической оси (кроме значений πn) точки пересечения эффективных границ поля призмы со смежными с ними фоктрисами являются В-полюсами (рис. 7). Данный результат непосредственно следует из вычислений фоктрис и оптической силы призмы. В случае аксиально-симметричных магнитных призм с радиально неоднородным полем $H = H_0\cdot(r_0/r)^n$, входная и выходная границы которого ортогональны оптической оси, можно также обосновать отсутствие сингулярного В-полюса; при этом, как и в предыдущем примере, в данных призмах имеет место В-сопряжение гауссовых точек через пространственно разделенные В-полюсы, как показано на рис. 8. Обоснование показанного на рис. 8 способа нахождения В-полюсов следует из общей теоремы, приведенной ниже. Отметим без доказательства, что в условиях симметричного скоса границ призмы, обеспечивающего краевую фокусировку частиц в медианной плоскости призмы, при определенной зависимости между углом ε скоса границ, параметром n и углом φ поворота оптической оси наличие сингулярного В-полюса возможно (рис. 9). Указанному вопросу будет посвящена отдельная статья. Однако одно из решений отметим: $\varphi = 2\mathrm{arctg}(\sqrt{5}+1)$, $\varepsilon = \mathrm{arctg}(1/2)$, $n = (\sqrt{5}-1)/2$.

В связи с приведенными примерами возникает естественный вопрос, всегда ли можно указать полюсы, способные обеспечить В-сопряжение гауссовых точек, и как обнаружить эти полюсы? Ответ на него дают нижеследующие теоремы, вторая из которых указывает на общий метод нахождения местоположений В-полюсов.

ТЕОРЕМЫ О БИПОЛЯРНО ПРОЕКТИВНОМ СООТВЕТСТВИИ ГАУССОВЫХ ТОЧЕК

В случае, если прямые z′ и z″ являются входной и выходной осями оптической системы с криволинейной осью, то положения гауссовых точек G′ и G″, расположенных на данных плечах, как известно, связаны фундаментальным оптическим тождеством Ньютона:

$$g' \cdot g'' = f' \cdot f', \qquad (3)$$

где f' и f'' — фокусные расстояния оптической системы. Поэтому если выбор полюсов подчинить условию

$$p' \cdot p'' = f' \cdot f', \qquad (4)$$

то на основании равенства (1) можно заключить, что В-сопряжение точек, расположенных на прямых z′ и z″, является и условием оптического сопряжения данных точек. При этом становится ясным оптический смысл параметра В-сопряжения:

$$p = \sqrt{(f' \cdot f'')}. \qquad (5)$$

Уравнения (3) и (4) назовем условиями *ньютонова сопряжения* гауссовых точек и В-полюсов относительно смежных с ними фокусов. Тогда эквивалентность условий (3) и (4) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

В любых оптических системах с криволинейной оптической осью, обладающих ненулевой оптической силой, при угле поворота, отличном от значений πn, где n = 0, 1,…, В-сопряженные точки асимптотических плеч оптической оси являются гауссовыми тогда и только тогда, когда положения В-полюсов ньютоново сопряжены.

Условие ненулевой оптической силы означает, что система не должна быть телескопической. Кроме того, в данной теореме неявно предполагается, что В-полюсы существуют и не расположены на асимптотических плечах оптической оси. Однако в условиях конечности фокусных расстояний оптической системы всегда можно указать положения фокальных точек и из них провести соответствующие фоктрисы. Легко видеть, что В-полюсы должны располагаться исключительно на данных фоктрисах, поскольку В-сопряженные изображения фокальных точек, по определению, должны быть расположены в "бесконечности". Поэтому в качестве В-полюсов достаточно выбрать на фоктрисах точки, удаленные от соответствующих фокальных точек на расстояния, удовлетворяющие уравнению (4).

Таким образом, можно сформулировать следующую общую теорему о биполярно проективном соответствии гауссовых точек.

В любых оптических системах с поворотной оптической осью с углом поворота, отличным от значений πn, где n = 0, 1,…, и обладающих ненулевой оптической силой,

1) всегда существуют В-полюсы, способные обеспечить биполярно проективное соответствие всех оптически сопряженных осевых точек;

2) В-сопряженные точки асимптотических плеч оптической оси являются оптически сопряженными в том и только в том случае, если В-полюсы расположены на фоктрисах оптической системы, а произведение полюсных плеч равно произведению фокусных расстояний f′ **и** ***f″ оптической системы,*** т.е.

$$p' \cdot p'' = f' \cdot f''.$$

Ньютоново сопряжение В-полюсов показывает их оптический смысл, в связи с чем их можно назвать "*оптическими*" полюсами.

Особенностью оптических полюсов является их неоднозначность, поскольку расположение полюсов на фоктрисах регламентируется лишь условием ньютонова сопряжения. В частности, В-полюсы можно расположить на равных расстояниях от соответствующих фокусов F′ и F″. Данный выбор полюсов назовем *равновесным*.

Из рис. 5 нетрудно увидеть, что

$$g''/p' = g_p''/g_p'. \qquad (6)$$

В случае равновесных полюсов левую часть (6) можно преобразовать к виду

$$g''/p' = g''/\sqrt{(f'' \cdot f')} = (g''/f'') \cdot \sqrt{(f''/f')}.$$

Таким образом, уравнение (6) можно переписать в виде

$$g''/f'' = (g_p''/g_p')/\sqrt{n}, \qquad (7)$$

где $n = (f''/f')$ — коэффициент иммерсии оптической системы. Величина отношения, стоящего слева в (7), как известно, равна оптическому увеличению системы при текущем положении гауссовых точек G′ и G″. Легко видеть, что знак оптического увеличения положителен, если полярные радиусы P′G′ и P″G″ одинаково направлены и отрицателен в противном случае (как на рис. 5). Проводя дальнейшую аналогию с традиционными оптическими представлениями, можно выделить *главные* и *узловые* В-полюсы, определяемые аналогично общепринятым *главным* и *узловым* точкам линз с прямолинейной оптической осью. *Главными* оптическими полюсами назовем В-полюсы, расположенные на расстояниях f' и f'' от соответствующих фокусов F′ и F″, а *узловыми* полюсами назовем B-полюсы, расположенные на расстояниях f'' и f' от фокусов F′ и F″ соответственно. В последнем варианте расположения полюсов очевидно $p' = f'$, и из (6) следует, что *в случае B-сопряжения гауссовых точек через узловые полюсы коэффициент оптического увеличения изображения равен отношению полярных радиусов данных гауссовых точек.*

Отмеченные выше *главные, узловые и равновесные* оптические полюсы назовем *"кардинальными"* полюсами оптической системы с криволинейной поворотной осью.

Из определения кардинальных полюсов следует однозначность их местоположения в оптической системе. В случае отсутствия иммерсии фокусные расстояния оптической системы в пространствах объекта и изображения равны. В этой ситуации кардинальные полюсы располагаются на одинаковых расстояниях от соответствующих фокальных точек, равных фокусному расстоянию системы (см. рис. 7, 8).

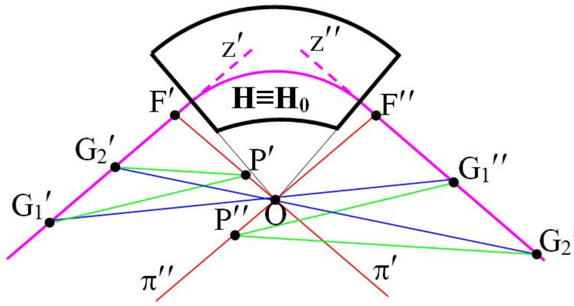

Рис. 10. ВРС гауссовых точек в магнитной призме с однородным полем в случае, когда оптическая ось ортогональна к границам поля.
Точка O — сингулярный оптический полюс: $G_i'OG_i''$ — прямые линии ($i = 1, 2$); P′, P″ — альтернативные оптические полюсы: $P'G_i' \parallel P''G_i''$; F′, F″ — фокальные точки призмы; π′ и π″ — фоктрисы оптических полюсов

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье показано, что биполярно проективное соответствие гауссовых точек является фундаментальным свойством любых оптических систем с криволинейной поворотной осью, в которых справедливо ньютоново сопряжение данных точек и угол поворота оптической оси отличен от значений πn, где $n = 0, 1,...$ Главные, узловые и равновесные оптические полюсы таких систем определяются однозначно. Зная местоположения оптических полюсов, для любого положения объекта на входном плече оптической оси путем B-сопряжения можно однозначно определить местоположение оптического изображения объекта. Указанный способ является универсальным методом обнаружения гауссовых изображений, не имеющим аналога в оптической теории. Данный метод применим в любых статических оптических системах с криволинейной поворотной осью, в которых угол поворота отличен от значений πn, где $n = 0, 1,\ldots$, и справедливо ньютоново сопряжение гауссовых точек.

Метод ВРС удобно применять при конструировании оптической системы с криволинейной осью на этапе выбора расположении плоскостей объекта и изображения. При этом, как нетрудно заметить, методом ВРС возможно решение и обратной задачи, а именно осуществить синтез геометрии и оптической среды призмы при наличии априорных требований на расположение плоскостей объекта и изображения.

Уравнение (1) выражает особое геометрическое свойство, которое можно назвать "конвертируемостью" множеств гауссовых пар и оптических полюсов. Это свойство означает, что при известном положении какой либо пары гауссовых точек распределение оптических полюсов на фоктрисах можно найти путем "*инверсной биполярной проекции*", проводя проектирующие пары прямых из данных гауссовых точек. Оптические полюсы в этом случае будут расположены в точках пересечения проектирующих прямых со смежными фоктрисами. Такой способ можно использовать как альтернативный метод нахождения оптических полюсов, если известно положение какой-либо пары сопряженных гауссовых точек. Для иллюстрации отмеченного метода на рис. 10 наряду с сингулярным полюсом в точке O показаны пространственно разделенные оптические полюсы P′ и P″ магнитной призмы с однородным полем и ортогональными к оптической оси границами. Местоположения данных полюсов найдено путем инверсной биполярной проекции из гауссовых точек G′ и G″, которые для визуального контроля определены здесь также по "правилу Барбера".

Путем предельного перехода идеи метода ВРС могут быть естественным образом распространены на оптические системы с криволинейной оптической осью, сохраняющие на выходе первоначальное направление оси, а также на линзы и зеркала с прямолинейной оптической осью. Данной теме будет посвящена следующая статья.

Автор считает своим приятным долгом выразить сердечную благодарность д.ф.-м.н., проф. Л.Н. Галль за полезные дискуссии по затронутой теме, во многом стимулировавшие написание данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barber N.F.* // Proc. Leeds Philos. Soc. 1933. V. 2. P. 427–434.
2. *Stephens W.E.* // Phys. Rev. 1934. V. 45. P. 513–518.
3. *Herzog R.* // Z. Physik. 1934. V. 89. P. 447–473.
4. *Cartan L.J.* // J. Phys. et Radium. 1937. V. 8. P. 453–470.
5. *Judd D.L.* // RSI. 1950. V. 21, № 3. P. 213–216.
6. *Тарантин Н.И.* // ЖТФ. 1967. V. 37, № 2. С. 375–383.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

ELMITEC, Elektronen Mikroskopie GmbH, Germany

Контакты: *Саченко Вячеслав Данилович*, v.sachenko@mail.ru

Материал поступил в редакцию 29.08.2011.

BIPOLAR PROJECTIVITY OF GAUSSIAN POINTS IN OPTICAL SYSTEMS WITH CURVILINEAR AXIS

V. D. Sachenko

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg
ELMITEC, Elektronen Mikroskopie GmbH, Germany

Specific off-axis geometrical points of optical systems with curvilinear optic axis and a new fundamental projective property of conjugate gaussian points are found. This property is called by author a *bipolar projective correspondence* (BPC); specific off-axis points are called *optical poles*. Last ones provide the BPC property of gaussian points. Their existence is proved for any optical systems with curvilinear optic axis in case if the optic power of the system is not equal to zero and the deflection angle is not equal πn, where $n = 0, 1,...$ It's proved that optical poles are placed on the specific straight lines, called *foctrices*. These specific lines pass through optical foci being parallel to the opposite asymptotic arms of the optic system. Positions of optical poles are conjugated accordingly to well-known Newton's optic equation.

Keywords: bipolar projective correspondence, curvilinear optical axis, gaussian image, optical pole, foctrix, projectivity