

УДК 621.391

© С. Н. Агиевич

МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ И ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СПЛАЙН-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Предлагаются разработанные методы и реализующие их алгоритмы оценивания спектральных и временных параметров сигналов в базисах функций сплайн-характеров (БФСХ). Описывается метод быстрых преобразований сигналов в БФСХ. Обосновывается его высокая вычислительная эффективность. Демонстрируется выигрыш в объеме вычислений при переходе от дискретных экспоненциальных функций к частному случаю БФСХ — базису сплайн-Виленкина-Крестенсона функций (СВКФ). Рассматриваются методы оценивания несущей частоты сигналов на основе глобальных сплайнов. Предлагается алгоритм сплайн-БПФ в базисах функций сплайн-характеров. Анализируется эффективность методов оценивания несущей частоты сигналов с точки зрения точности, скорости и помехоустойчивости обработки. Оцениваются вычислительные затраты на интерполяцию при использовании классического и предлагаемого методов на примере частного случая БФСХ — СВКФ.

Кл. сл.: оценивание параметров сигналов, функции сплайн-характеров, быстрые преобразования сигналов, базис сплайн-Виленкина-Крестенсона функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЛАЙН-ХАРАКТЕРОВ

Пусть имеется пространство функций, заданных на абелевой группе H и принимающих значения в некотором кольце K , т. е. областью определения функций является группа H , областью значений — кольцо K . Это пространство обозначим через $L(H, K)$. Аналогами комплексных экспонент в $L(H, K)$ являются характеры $\chi(n, k)$ [1]. Характеры образуют ортонормированный базис в пространстве $L(H, K)$. Характеры $\chi(n, k)$, определенные на конечном отрезке, называются χ -функциями. В дальнейшем для общности будем использовать понятие "характеры", а из контекста будет ясно, о каком случае (конечном или бесконечном) будет идти речь. Одним из достоинств характеров $\chi(n, k)$ является их многообразие, определяемое многообразием групп H и колец K . Однако все они являются функциями дискретными, поэтому реализация на их основе сигналов для непосредственного излучения в эфир невозможна. Получить гладкие ортонормированные базисные функции оказалось возможным, объединив свойства $\chi(n, k)$ и сплайнов. В результате в полученном пространстве ${}_{L(H, K)}G_n^p$ периодических сплайнов сигнал ${}_{L(H, K)}S^p(t)$ можно разложить следующим образом:

$${}_{L(H, K)}S^p(t) = \frac{1}{N} \sum_k {}_{L(H, K)}q_k M^p(t \ominus t_k) =$$

$$= \sum_n {}_{L(H, K)}c_n^* {}_{L(H, K)}\lambda_n^p(t), \quad (1)$$

где ${}_{L(H, K)}\lambda_n^p(t) = {}_{L(H, K)}m_n^p(t) / \sqrt{{}_{L(H, K)}u_n^{2p}}$; ${}_{L(H, K)}m_n^p(t) = \frac{1}{N} \sum_k \bar{\chi}(n, k) M^p(t \ominus t_k)$; $\chi(n, k)$ — характеры группы H ; ${}_{L(H, K)}c_n^* = {}_{L(H, K)}F_n(z) \sqrt{{}_{L(H, K)}u_n^{2p}} / {}_{L(H, K)}u_n^p$; μ — модуль представления чисел; \ominus_μ — сдвиг по модулю μ ; ${}_{L(H, K)}u_n^p = {}_{L(H, K)}F_n(M^p) = \frac{1}{N} \sum_k \bar{\chi}(n, k) M^p(t_k)$; $t_k = \left(\frac{p}{2} + k\right) / N$; $\bar{\chi}(n, k)$ — комплексносопряженное $\chi(n, k)$. Заметим, что сплайны

$${}_{L(H, K)}\lambda_n^p(t) = {}_{L(H, K)}m_n^p(t) / \sqrt{{}_{L(H, K)}u_n^{2p}}$$

образуют ортонормированный базис пространства ${}_{L(H, K)}G_n^p$. Будем называть их сплайн-характерами.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ В БАЗИСАХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙН-ХАРАКТЕРОВ

Для пространств ${}_{L(H, K)}G_n^p$ (при $t = k$) введем пары прямых и обратных преобразований Фурье (ПФ) в базисах функций сплайн-характеров

(БФСХ):

$$\begin{aligned}
 {}_{L(H,K)}S^p(k) &= \sum_n {}_{L(H,K)}F_n(q^*) {}_{L(H,K)}\tilde{\lambda}_n^p(k) = \\
 &= \sum_n {}_{L(H,K)}F_n(z) / {}_{L(H,K)}u_n^p \sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}} {}_{L(H,K)}\tilde{\lambda}_n^p(k), \quad (2)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 {}_{L(H,K)}F_n(q^*) &= \frac{1}{N} \sum_k \bar{\chi}(n,k) {}_{L(H,K)}q_k^* = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_k \bar{\tilde{\lambda}}_n^p(k) {}_{L(H,K)}z_k. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Отметим, что при $p=1$ частными случаями пары выражений (2) и (3) являются выражения, полученные в [1] ((3.9) и (3.10)).

МЕТОД БЫСТРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИГНАЛОВ В БАЗИСАХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙН-ХАРАКТЕРОВ

Согласно (2), для нахождения спектральных коэффициентов в базисе ${}_{L(H,K)}\tilde{\lambda}_n^p$ необходимо вычислить дискретное ПФ ${}_{L(H,K)}F_n(q^*)$. Один из вариантов его вычисления — через ${}_{L(H,K)}F_n(z)$. Для этого необходимо полученную последовательность ${}_{L(H,K)}F_n(z)$ поэлементно умножить на последовательность $\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}} / {}_{L(H,K)}u_n^p$. Элементы последней последовательности могут быть вычислены заранее, а для вычисления ${}_{L(H,K)}F_n(z)$ имеются быстрые алгоритмы [1]. Следовательно, переход из базиса функций характеров (БФХ) в БФСХ на выборке длиной N увеличивает количество операций преобразования на N . Это касается как ПФ в БФСХ, так и его быстрого алгоритма.

Таким образом, быстрое преобразование в БФСХ существует, и его основа — алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) в БФХ. При этом вычислительная сложность БПФ в БФСХ на выборке длиной N увеличивается на N операций умножения по сравнению с алгоритмом БПФ в БФХ. Сравнение вычислительных затрат классического алгоритма БПФ со всеми алгоритмами БПФ в БФСХ — задача невыполнимая по причине бесконечного количества последних. Поэтому остановимся на некоторых из них.

Сравним вычислительные затраты, требуемые для осуществления алгоритмов БПФ для частного случая БФСХ — базисов сплайн-Виленкина-Крестенсона (СВКФ). Для достижения этой цели воспользуемся подходом, предложенным в [2]. Если принять, что на операцию умножения и сложения тратится одинаковое время, то предельный

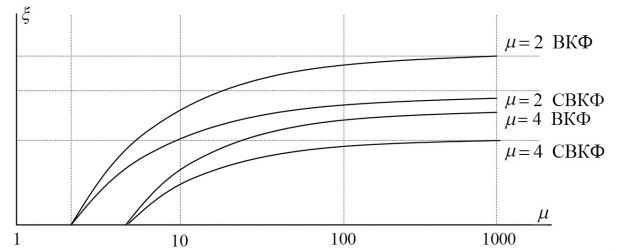


Рис. 1. Выигрыш в объеме вычислений БПФ при переходе от базиса ДЭФ к базисам ВКФ и СВКФ при $\mu=2, 4$

выигрыш по скорости обработки ξ при использовании быстрого преобразования Уолша (БПУ) относительно дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) в алгоритме БПФ будет достигать $\xi=5$. В то же время применение функций Виленкина-Крестенсона (ВКФ) по модулю 4 обеспечивает $\xi=3.25$. В рассматриваемом случае для получения спектра использовался алгоритм БПФ в базисах СВКФ [3]. Согласно этому алгоритму на N входных точек преобразования, дополнительно к стандартному объему вычислений необходимо добавить N операций умножения. Это приводит к увеличению объема вычислений по сравнению с классическими алгоритмами БПУ и БПФ в базисе ВКФ по модулю 4. Однако получаемый выигрыш в этих случаях по сравнению с использованием классического алгоритма БПФ все равно оказывается существенным.

Данные об объеме вычислений для алгоритма БПФ [4] и результаты [2] позволили представить выигрыш в скорости цифровой обработки сигналов (ЦОС) графиком рис. 1 [5]. Анализ полученных результатов показал, что выигрыш в объеме вычислений при переходе к базису СВКФ может достигать 2÷3 раз.

Таким образом, реализация операций ЦОС с использованием алгоритма БПФ в базисе СВКФ ведет к существенному сокращению вычислительных затрат. Аналогичные результаты можно получить и при рассмотрении алгоритма в базисе сплайн-Рейдера.

АЛГОРИТМ СПЛАЙН-БПФ В БАЗИСАХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙН-ХАРАКТЕРОВ

Довольно часто при выполнении стандартных операций ЦОС (фильтрации, вычислении корреляционных функций, определении несущей частоты) возникает необходимость осуществления интерполяции обрабатываемых дискретных данных о непрерывных функциях. Следовательно, возник-

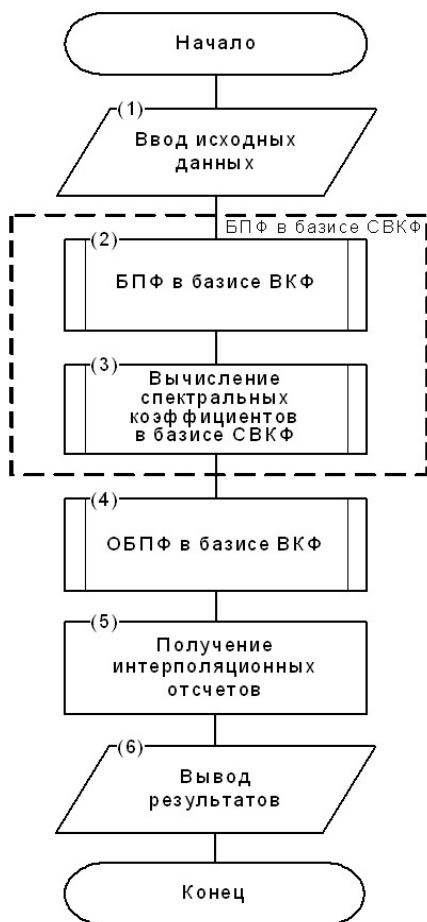


Рис. 2. Алгоритм сплайн-БПФ в БФСХ

кает необходимость разработки вычислительно эффективного алгоритма интерполяции сигналов. В теории сплайн-гармонического анализа (СГА) таким алгоритмом является алгоритм сплайн-БПФ в ДЭФ [6]. Его вычислительная эффективность базируется на том, что он построен на основе классического БПФ, поэтому по свойствам сравним

с известным алгоритмом интерполяции, основанным на добавлении нулевых коэффициентов в спектральной области. Отличие состоит в том, что вместо добавления нулей в спектральной области используется информация о степени гладкости. Это позволяет осуществлять не линейную интерполяцию, как в классическом случае, а соответствующую выбранному порядку сплайна (например, кубическому). Рассматриваемый подход реализации быстрых преобразований позволяет разработать алгоритм сплайн-БПФ (СБПФ) сигналов в БФСХ. Рассмотрим особенности этого алгоритма.

Так как в основе алгоритма сплайн-БПФ в базе ДЭФ лежат процедуры БПФ, то разумно положить процедуры БПФ в БФСХ в основу алгоритма сплайн-БПФ в БФСХ. Исходными данными для алгоритма (см. рис. 2) являются объем выборки N , порядок сплайна p , тип группы H и кольца K , модуль представления числа μ , отсчеты сигнала $\{z_k\}$ и шаг сетки интерполяции h .

Разработанный алгоритм (рис. 2) отличается от известного не только переходом от ЭФ к БФСХ, но и отказом от увеличения количества спектральных коэффициентов перед осуществлением операции ОБПФ в соответствующем базисе, поскольку получение интерполяционных значений происходит уже во временной области. Структурная схема, реализующая указанные процедуры, представлена на рис. 3. В Приложении (табл. 1) представлены сравнительные затраты на интерполяцию при использовании классического и предлагаемого методов на примере частного случая БФСХ — СВКФ.

Анализ полученных результатов показывает, что выигрыш в объеме вычислений может достигать от 1.69 до 2.71 раза даже на коротких выборках сигнала. Таким образом, предложенный алгоритм обладает вычислительной эффективностью и может быть использован для осуществления фильтрации, вычисления корреляционных функций, определения несущей частоты.



Рис. 3. Принцип реализации процедур интерполяции в БФСХ

**МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ НЕСУЩЕЙ ЧАСТОТЫ
В БАЗИСАХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙН-ХАРАКТЕРОВ**

Большое значение при приеме сигналов имеет оценивание несущей частоты. Для классических моделей сигналов в базисе ДЭФ оценивание осуществляется с использованием ПФ. Однако для сигналов, синтезированных в БФСХ, невозможно правильно оценить несущую частоту на основе базиса Фурье. Естественно, данную операцию необходимо выполнять в БФСХ.

На рис. 4 представлены эпюры, поясняющие принцип оценивания частоты в БФСХ.

Аналоговый сигнал $z(t)$ (рис. 4, а) дискретизируют $z(t_k)$ (рис. 4, б), затем вычисляют последовательность комплексных спектральных коэффициентов ${}_{L(H,K)}F_n(z)$ (рис. 4, в) методом преобразования в выбранном пользователем базисе характеристик. Одновременно тем же методом B -сплайн заданной степени $p-1$ преобразуется в последовательность комплексных дискретных отсчетов

(рис. 4, г). Порядок B -сплайна определяется пользователем и зависит от степени гладкости анализируемого сигнала. Затем последовательность комплексных спектральных коэффициентов ${}_{L(H,K)}F_n(z)$ делят поэлементно на последовательность комплексных дискретных отсчетов $\sqrt{{}_{L(H,K)}u_n^{2p}} / {}_{L(H,K)}u_n^p$ для базисов ${}_{L(H,K)}\lambda_n^p(t)$ (рис. 4, д). Далее вычисляют компоненты спектральной плотности мощности ${}_{L(H,K)}\tilde{S}(n)$ в БФСХ (рис. 4, е) заданной степени $p-1$ с помощью выражения, представленного на рис. 4, е, где N — нормирующий множитель. На новом массиве компонент спектральной плотности мощности находится максимум r (рис. 4, ж), а значение несущей частоты сигнала определяется по формуле $f_n = r \Delta f$, где Δf — расстояние между спектральными компонентами ${}_{L(H,K)}\lambda_n^p(t)$.

Оценим вычислительные затраты рассмотренного подхода. Его основу составляют процедуры

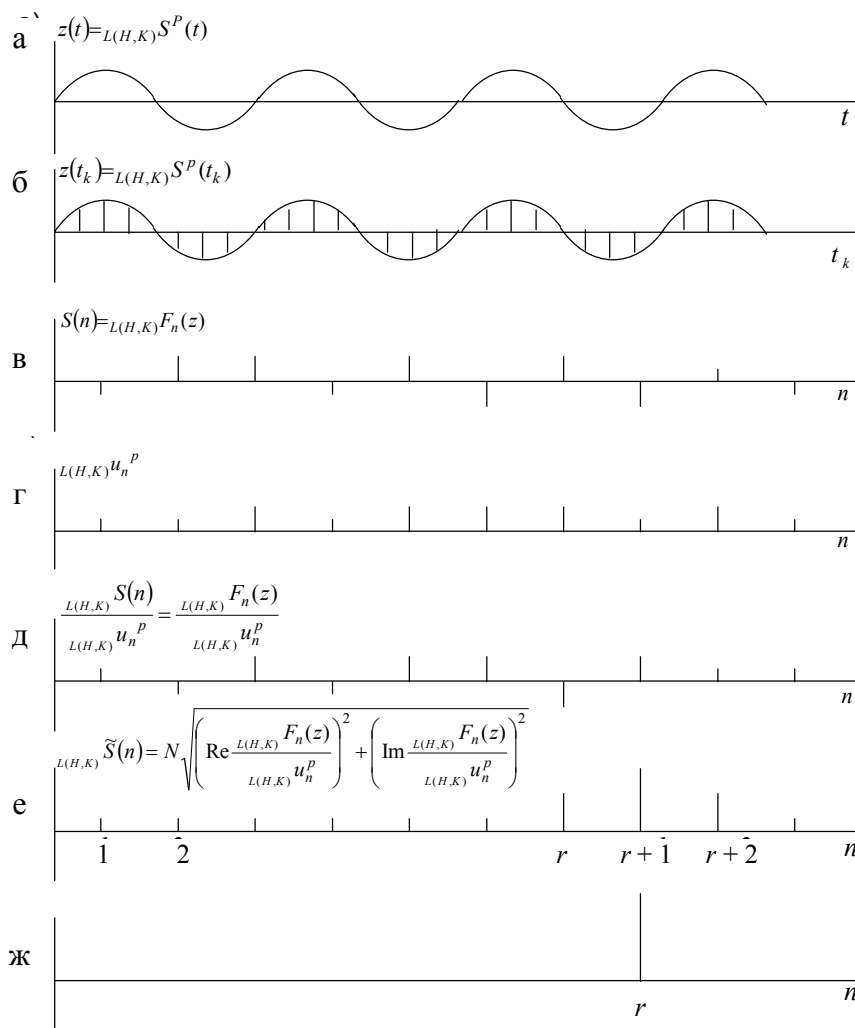


Рис. 4. Принцип оценивания несущей частоты в БФСХ

БПФ в БФСХ. Сокращения объема вычислений данной процедуры возможно за счет формирования сигналов в базисах сплайн-Рейдера, в СВКФ с использованием модуля 2...4. В этом случае вычислительные затраты сократятся в 2...3 раза.

МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ НЕСУЩЕЙ ЧАСТОТЫ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА СПЛАЙН-БПФ В БАЗИСАХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙН-ХАРАКТЕРОВ

Дальнейшее повышение вычислительной эффективности и точности оценивания возможно за счет учета информации о гладкости спектральной плотности мощности сигналов. Поскольку точность оценивания определяется величиной частотного разрешения, то необходимо повысить разрешающую способность. При классическом подходе это достигается за счет увеличения длины реализации сигнала, в том числе и путем добавления нулевых значений. При этом существенно растет объем вычислений, а интерполяция осуществляется по линейному закону без использования информации о степени гладкости спектральной плотности мощности сигнала. В связи с этим предлагается использовать сплайн-интерполяцию в частотной области. Причем эту операцию предлагается проводить с помощью вычислительно эффективного алгоритма сплайн-БПФ в БФСХ. Возможны два варианта интерполяции [7].

В первом случае используются коэффициенты всей реализации. Во втором — интерполяция производится только вблизи исходного максимального спектрального коэффициента. Эффективность указанных методов оценивалась с позиций скорости ЦОС (Приложение, табл. 2).

Характеристика методов по точности определения несущей частоты сигналов представлена в Приложении, табл. 3. Согласно табл. 3, чем выше степень гладкости интерполируемого процесса, соответственно и степень гладкости сплайна, тем выше точность интерполяции [8]. Если $h = 0.1$, то точность кубической интерполяции с использованием глобальных сплайнов будет пропорциональна 0.0001. При классическом подходе точность интерполяции пропорциональна $h = 0.05$ или необходимо значительное увеличение объема вычислений.

Важно отметить, что использование глобальных сглаживающих сплайнов может повысить помехоустойчивость определения несущей частоты. Согласно табл. 3 (см. Приложение), при выборе кубического сплайна выигрыш в помехоустойчивости может достигать 0.5 дБ.

МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ НЕСУЩЕЙ ЧАСТОТЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Основное отличие локальных сплайнов от глобальных состоит в том, что для интерполяции используется значительно меньший объем информации. Например, для поиска экстремума достаточно данных лишь о вблизи расположенных отсчетах сигнала. Это относится и к простейшим сплайнам, таким как сплайны минимального шаблона (СМШ), квадратичные (КВСМШ) и кубические (КСМШ), квазиинтерполяционные сплайны (КИС), сплайны максимального сглаживания (СМС) [9]. Однако обеспечиваемая ими точность и помехоустойчивость ниже по сравнению с глобальными сплайнами, а вычислительная эффективность существенно изменяется в зависимости от длины реализации.

Представление о вычислительной эффективности простейших сплайнов на примере СМШ с использований экспоненциальных функций и СВКФ с модулем 2 и 4 дает табл. 4 (в Приложении). Характеристика точности определения несущей частоты сигналов представлена в Приложении в табл. 5.

Анализ полученных результатов показал, что при выборе наиболее часто используемого кубического СМС выигрыш в помехоустойчивости может достигать 0.22 дБ.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ СИГНАЛОВ

Предлагаемый метод базируется на свойствах сплайнов и предложенного алгоритма СБПФ. Его вычислительная эффективность обеспечивается при условии расчета корреляционной функции при предельно низкой частоте дискретизации. Вариант структурной схемы, реализующий метод, в соответствии с указанными требованиями, представлен на рис. 5.

Сравнительные затраты на вычисление корреляционных функций при использовании различных базисов представлены в Приложении в табл. 6. При этом интерполяция на $\lambda \cdot N$ точках производится для получения дополнительных значений корреляционной функции на всей ее области определения. А интерполяция на $\lambda \cdot 2$ точках производится только в районе максимума. Здесь λ — количество точек интерполяции между двумя узловыми точками, $N(2)$ — количество интервалов интерполяции, 4 — количество операций для получения одного интерполируемого значения. Полученные результаты подтверждают вычислительную эффективность предложенного алгоритма.

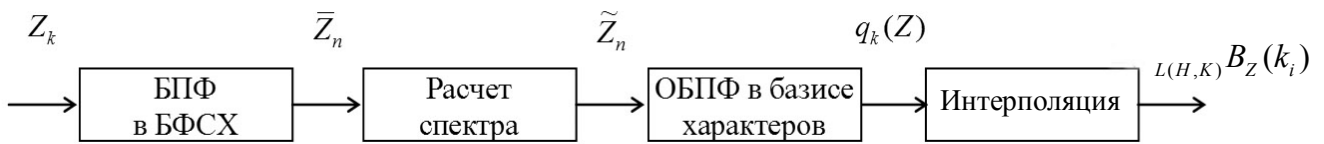


Рис. 5. Вычисление автокорреляционной функции в БФСХ

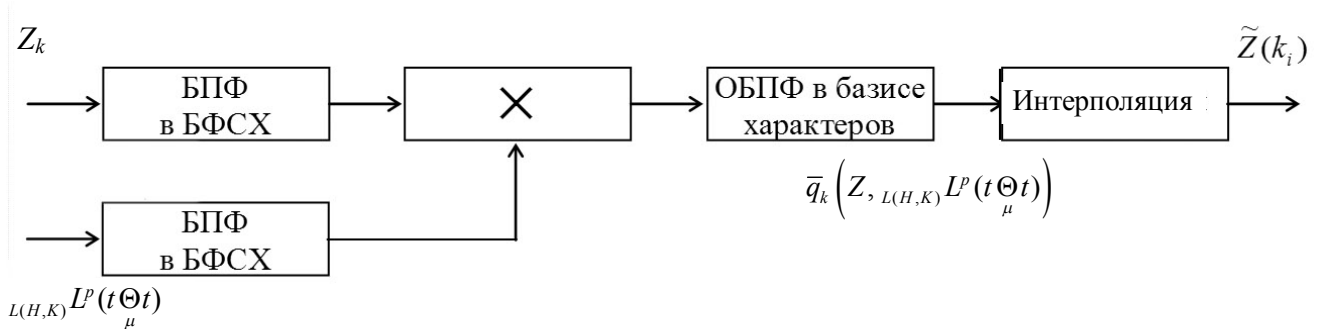


Рис. 6. Фильтрация в базисах СВКФ

МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ В БАЗИСАХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙН-ХАРАКТЕРОВ

Вариант структурной схемы метода фильтрации сигналов в базисах функций сплайн-характеров представлен на рис. 6. Вычислительная эффективность метода фильтрации — в Приложении, табл. 7.

В основе разработанного метода лежит использование алгоритма СБПФ в БФСХ. Анализ полученных результатов показывает, что даже без интерполяции выигрыш в объеме вычислений достигает от 1.45 до 2.86 раза на коротких выборках сигнала. Данный факт подтверждает вычислительную эффективность разработанного метода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана аналитическая основа методов оценивания спектральных и временных параметров сигналов в БФСХ.

Предложен метод быстрых преобразований сигналов в БФСХ, обладающий высокой вычислительной эффективностью. Выигрыш в объеме вычислений при переходе от ДЭФ к частному случаю БФСХ — базису функций сплайн-Виленкина-Крестенсона — достигает 2...3 раз.

На основе разработанного алгоритма сплайн-БПФ в БФСХ предложены методы оценивания несущей частоты сигналов с использованием глобальных сплайнов. Вычислительная эффективность указанных методов для СВКФ достигает 2.54 раза и более даже на коротких выборках сигнала. А выигрыш в помехоустойчивости для сглаживающих глобальных сплайнов может достигать 1 дБ.

Использование методов оценивания несущей частоты сигналов на основе локальных сплайнов может обеспечить выигрыш в помехоустойчивости до 0.5 дБ при достаточно высокой вычислительной эффективности.

При расчете корреляционных функций сигналов вычислительные затраты по сравнению с классическим подходом для СВКФ как частного случая БФСХ сокращаются в 2.1 и более раза.

Выигрыш в объеме вычислений при фильтрации сигналов может достигать от 1.45 до 2.86 раза даже на коротких выборках сигнала по отношению к классическому подходу.

Таким образом, применение разработанного аналитического аппарата обработки сигналов обеспечивает повышение помехоустойчивости при общем снижении вычислительных затрат.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Табл. 1. Количество операций на интерполяцию различными методами в базисах СВКФ (квадратичный сплайн)

Параметры метода								Количество операций		
N	Модуль числа	Алгоритм интерполяции	БПФ в базисе ВКФ	Переход в базис сплайнов	Количество точек интерполяции, λ	ОБПФ в базисе ВКФ, N точек	ОБПФ в базисе ВКФ, $N \cdot \lambda$ точек	Количество операций на интерполяцию, $\lambda \cdot N$ точек	Всего	Выигрыш
64	ЭФ	Доб. нулей	384	–	8	–	4608	–	4992	–
64	ЭФ	СБПФ	384	128	8	384	–	2048	2944	1.69
64	2	СБПФ	192	64	8	192	–	2048	2496	2
64	4	СБПФ	256	128	8	256	–	2048	2688	1.85
128	ЭФ	Доб. нулей	896	–	8	–	10240	–	11136	–
128	ЭФ	СБПФ	896	256	8	896	–	4096	6144	1.81
128	2	СБПФ	407	128	8	407	–	4096	5038	2.21
128	4	СБПФ	535	256	8	535	–	4096	5422	2.05
256	ЭФ	Доб. нулей	1024	–	8	–	22528	–	23552	–
256	ЭФ	СБПФ	1024	512	8	1024	–	8192	10752	2.19
256	2	СБПФ	410	256	8	410	–	8192	9268	2.54
256	4	СБПФ	552	512	8	552	–	8192	9808	2.44
512	ЭФ	Доб. нулей	4608	–	8	–	49152	–	53760	–
512	ЭФ	СБПФ	4608	1024	8	4608	–	16384	26624	2.01
512	2	СБПФ	1440	512	8	1440	–	16384	19776	2.71
512	4	СБПФ	2355	1024	8	2355	–	16384	21658	2.48

Табл. 2. Количество операций на интерполяцию при определении несущей частоты различными методами в базисах СВКФ (кубический сплайн)

Параметры метода										Число операций на интерполяцию				
N	Модуль числа	Алгоритм интерполяции	Число точек интерполяции, λ	Реализация БПФ в базисе ВКФ	Переход в базис сплайнов	Вычисление спектр. коэф.	БПФ в базисе ВКФ	Переход в базис сплайнов	ОБПФ в базисе ВКФ	$\lambda N/2$	λN	$\lambda \cdot 2$	Всего	Выигрыш
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
64	ЭФ	Нулями	8	4608	–	9216	–	–	–	–	–	–	13824	–
64	ЭФ	СБПФ	8	384	64	128	160	64	160	1280	–	–	2240	6.17
64	ЭФ	СБПФ	8	384	64	128	160	64	160	–	–	80	1040	13.26
64	2	СБПФ	8	110	64	64	110	64	110	–	2560	–	3082	4.48
64	2	СБПФ	8	110	64	64	110	64	110	–	–	80	602	22.96

Табл. 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
64	4	СБПФ	8	192	64	128	84	64	84	1280	–	–	1896	7.29
64	4	СБПФ	8	192	64	128	84	64	84	–	–	80	696	19,86
128	ЭФ	Нулями	8	10240	–	20480	–	–	–	–	–	–	30720	–
128	ЭФ	СБПФ	8	896	128	256	384	128	384	2560	–	–	4736	6.48
128	ЭФ	СБПФ	8	896	128	256	384	128	384	–	–	80	2256	13.61
128	2	СБПФ	8	230	128	128	230	128	230	–	5120	–	6194	4.95
128	2	СБПФ	8	230	128	128	230	128	230	–	–	80	1154	26.62
128	4	СБПФ	8	390	128	256	192	128	192	2560	–	–	3846	7.98
128	4	СБПФ	8	390	128	256	192	128	192	–	–	80	1366	22.48

Табл. 3. Интерполяционные и сглаживающие свойства глобальных сплайнов

Метод интерполяции	Потенциальная точность интерполяции	Требование к функции	Выигрыш в помехоустойчивости, дБ
Добавление нулей	$1/2h$	C^1	–
Квадратичная интерполяция	$< o(h^4 z_{\max}^{(4)})$	C^4	–
Квадратичное сглаживание	$< o(h^4 z_{\max}^{(4)})$	C^4	0.3
Кубическая интерполяция	$< o(h^5 z_{\max}^{(5)})$ $5/384(h^4 z_{\max}^{(4)})$	C^5	–
Кубический сглаживающий сплайн	$< o(h^5 z_{\max}^{(5)})$, $5/384(h^4 z_{\max}^{(4)})$	C^5	0.5
Интерполяционный сплайн 4-й степени	$< o(h^6 z_{\max}^{(6)})$	C^6	–
Сглаживающий сплайн 4-й степени	$< o(h^6 z_{\max}^{(6)})$	C^6	0.9
Интерполяционный сплайн 5-й степени	$< o(h^7 z_{\max}^{(7)})$	C^7	–
Сглаживающий сплайн 5-й степени	$< o(h^7 z_{\max}^{(7)})$	C^7	1.1

Табл. 4. Количество операций на интерполяцию при определении несущей частоты различными методами с использованием локальных сплайнов

Параметры метода							Число операций на интерполяцию					
N	Модуль числа	Алгоритм интерполяции	Число точек интерполяции, λ	Реализация БПФ в базе ВКФ	Переход в базис сплайнов	Вычисление спектр. коэф.	Одной точки	$\lambda \cdot N/2$	$\lambda \cdot N$	$\lambda \cdot 2$	Всего	Выигрыш
64	ЭФ	Доб. нулей	8	4608	–	9216	–	–	–	–	13824	–
64	ЭФ	КВСМШ	8	384	32	128	21	5376	–	–	5920	2.33
64	ЭФ	КВСМШ	8	384	32	128	21	–	–	336	880	15.7
64	ЭФ	КСМШ	8	384	32	128	28	7168	–	–	7712	1.79
64	ЭФ	КСМШ	8	384	32	128	28	–	–	448	992	13.93
64	ЭФ	СМШ 4-й степени	8	384	32	128	80	20480	–	–	21024	0.66
64	ЭФ	СМШ 4-й степени	8	384	32	128	80	–	–	1280	1824	7.58
64	ЭФ	СМШ 5-й степени	8	384	32	128	102	26112	–	–	26656	0.52
64	ЭФ	СМШ 5-й степени	8	384	32	128	102	–	–	1632	2176	6.35
64	ЭФ	КИС 5-й степени	8	384	32	128	175	44800	–	–	45344	0.3
64	ЭФ	КИС 5-й степени	8	384	32	128	175	–	–	2800	3344	4.13
64	ЭФ	СМС 5-й степени	8	384	32	128	175	44800	–	–	45344	0.3
64	ЭФ	СМС 5-й степени	8	384	32	128	175	–	–	2800	3344	4.13
64	ЭФ	Доб. нулей	8	390	128	256	–	–	–	–	13824	–

Табл. 5. Интерполяционные и сглаживающие свойства локальных сплайнов для различных методов оценивания несущей частоты

Метод интерполяции	Потенциальная точность интерполяции	Требование к функции	Выигрыш в помехоустойчивости, дБ
1	2	3	4
Добавление нулей	$1/(2h)$	C^1	–
КВСМШ	$0.047 h^3 z_{\max}^{(3)}$	C^4	–
Квадратичный КИС	$< 0.047 h^3 z_{\max}^{(3)}$	C^4	–
Квадратичный СМС	$0.047 h^3 z_{\max}^{(3)}$	C^4	0.1
КСМШ	$35/1152 h^4 z_{\max}^{(4)}$	C^5	–
Кубический КИС	$< 35/1152 h^4 z_{\max}^{(4)}$	C^5	–

Табл. 5 (продолжение)

1	2	3	4
Кубический СМС	$35/1152 h^4 z_{\max}^{(4)}$	C^5	0.22
СМШ 4-й степени	$132677/13271040 h^5 z_{\max}^{(5)}$	C^5	–
КИС 4-й степени	$< 132677/13271040 h^5 z_{\max}^{(5)}$	C^6	–
СМС 4-й степени	$132677/13271040 h^5 z_{\max}^{(5)}$	C^6	0.34
СМШ 5-й степени	$59/5120 h^6 z_{\max}^{(6)}$	C^7	–
КИС 5-й степени	$< 59/5120 h^6 z_{\max}^{(6)}$	C^7	–
СМС 5-й степени	$59/5120 h^6 z_{\max}^{(6)}$	C^7	0.5

Табл. 6. Количество операций на вычисление корреляционных функций в базисах СВКФ

N	Модуль числа	БПФ в базисе ВКФ (операций)	Вычисление спектральных коэффициентов	Нахождение энерг. спектра	Количество точек интерполяции, λ	ОБПФ в базисе ВКФ, N точек	ОБПФ в базисе ВКФ, M точек	Количество операций на интерполяцию		Всего	Выигрыш
								На λ·N точках	На λ·2 точках		
64	ЭФ	384	–	384	8	–	4608	–	–	5376	–
64	2	192	64	64	8	192	–	2048	64	2560/576	2.1/9.33
64	4	256	64	384	8	256	–	2048	64	3008/1024	1.78/5.25
128	ЭФ	896	–	768	8	–	10240	–	–	11904	–
128	2	407	128	128	8	407	–	4096	64	4806/1134	2.48/10.5
128	4	535	128	768	8	535	–	4096	64	6062/2030	1.96/5.86
256	ЭФ	1024	–	1536	8	–	22528	–	–	25088	–
256	2	410	256	256	8	410	–	8192	64	9124/996	2.75/25.19
256	4	552	256	1536	8	552	–	8192	64	11088/2960	2.26/8.48
512	ЭФ	4608	–	3072	8	–	49152	–	–	56832	–
512	2	1440	512	512	8	1440	–	16384	64	20288/3968	2.8/14.32
512	4	2355	512	3072	8	2355	–	16384	64	24678/8358	2.3/6.8

Табл. 7. Количество операций на фильтрацию в различных базисах (без интерполяции)

N	Модуль числа	БПФ в базисе ВКФ (операций)	Вычисление спектральных коэффициентов сигнала, прошедшего через фильтр	ОБПФ в базисе ВКФ N точек	Всего	Выигрыш
1	2	3	4	5	6	7
64	ЭФ	384	64	384	832	–
64	2	192	64	192	448	1.86

Табл. 7 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7
64	4	256	64	256	575	1.45
128	ЭФ	896	128	896	1920	–
128	2	407	128	407	943	2.04
128	4	535	128	535	1198	1.6
256	ЭФ	1024	256	1024	2304	–
256	2	410	256	410	1075	2.14
256	4	552	256	552	1360	1.69
512	ЭФ	4608	512	4608	9728	–
512	2	1440	512	1440	3392	2.86
512	4	2355	512	2355	5222	1.86

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вариченко Л.В., Лабунец В.Г., Раков М.А.* Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов. Киев: Наукова думка, 1986. 247 с.
2. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Советское радио, 1975. 208 с.
3. *Агиевич С.Н.* Сплайн-Вилленкина-Крестенсона функции в представлении сигналов // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 1. С. 79–89.
4. *Рабинер Л., Голд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 848 с.
5. *Агиевич С.Н., Беспалов В.Л.* Цифровая обработка сигнала: скорость и экономия ресурса // Мобильные системы. 2007. № 3. С. 26–29.
6. *Желудев В.А.* Периодические сплайны и быстрое преобразование Фурье // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32, № 2. С. 179–198.
7. *Агиевич С.Н., Мальшев С.Р., Подымов В.А. и др.* Способ (варианты) и устройство (варианты) оцени-

- вания несущей частоты. Патент № 2168759 RU, МПК6 G 06 F 17/14, G 01 R 23/ 00, № 99126680/09. Заяв. 16.12.99. Оpubл. 10.06.01. Бюл. № 16. 132 с.
8. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
 9. *Желудев В.А.* Локальные сплайны с регулирующим параметром // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31, № 2. С. 193–211.

г. Санкт-Петербург

Контакты: *Агиевич Сергей Николаевич*,
i.m.top.banana@gmail.com

Материал поступил в редакцию 25.10.2011.

METHODS OF THE ESTIMATION OF SPECTRAL AND TEMPORARY PARAMETER SIGNAL ON THE BASIS OF THE THEORIES OF SPLINE ALGEBRAIC HARMONIC ANALYSIS

S. N. Agievich

Saint-Petersburg

The developed methods and realizing them algorithms of the estimation of spectral and temporary parameter signal in base function of spline-character (BFSH) are suggested. The method for quick transformations of sig-

nal in these bases is described. Its high computing efficiency is proved. The advantage in calculation volume in passing from discrete exponential function to particular case BFSH — a base spline-Vilenkin-Krestenson functions — is shown. Methods for the estimation of signal carrying frequencies are considered using global splines. The algorithm of spline-BPF is offered in the base functions of spline-character. Efficiency of the methods for the estimation of signal carrying frequencies from the points of view of accuracy, velocities and noise-immunity of the processing is analyzed. The computing expresses on interpolation with the use of classical and proposed methods on the example of the particular case BFSH — SVKF are evaluated.

Keywords: estimation parameter signal, functions spline-character, quick transformations signal, the base of spline-Vilenkin-Krestenson functions