ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2012, том 22, № 2, с. 105–111

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 537.534.7: 621.319.7

© А. С. Бердников

МЕНЯЮЩИЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ОПИСАНИЮ УСРЕДНЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ. Ч. 5. КОММЕНТАРИИ К ОБЩЕЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ МЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛОВ

В предыдущих работах данного цикла работ был рассмотрен новый метод управления движением заряженных частиц с помощью высокочастотных электрических полей, характеризующихся медленно меняющимися во времени эффективными потенциалами. Данная работа посвящена тонким математическим моментам, не в должной мере раскрытым при выводе общей формулы для медленноменяющегося псевдопотенциала при подготовке к печати предыдущих публикаций цикла.

Кл. сл.: масс-спектрометрические приборы, радиочастотные приборы, эффективный потенциал, гамильтонова динамика, гамильтоновы динамические системы, техники усреднения динамических гамильтоновых уравнений, высокочастотные электрические поля, радиочастотные электрические поля, спектральный анализ временны́х сигналов

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих работах данного цикла работ [1–4] был рассмотрен новый метод управления движением заряженных частиц с помощью высокочастотных электрических полей, характеризующихся медленно меняющимися во времени эффективными потенциалами. Однако со времени публикации первых работ цикла в результате многочисленных обсуждений и семинаров были выявлены такие аспекты данного изобретения, вызывающие у читателей и слушателей дополнительные вопросы, которые не были в достаточной мере раскрыты в указанных публикациях. В частности, данная работа посвящена тонким математическим моментам, не в должной мере раскрытым при выводе общей формулы для медленноменяющегося псевдопотенциала.

1. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РАНЕЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для приближенного описания движения заряженных частиц в высокочастотном электрическом поле широко используется специальный математический аппарат, называемый теорией псевдопотенциала [5–8]. А именно, при определенных допущениях движение заряженной частицы распадается сумму «медленного» движения, связанного с дрейфом заряженной частицы в высокочастотном электрическом поле и характеризуемого временами характерного изменения, много больше однократного периода высокочастотного электрического поля; и «быстрого» движения, представляющего собой быстрые осцилляции относительно «медленного» движения с частотами, сравнимыми с частотой электрического поля, но с относительно небольшой амплитудой. При этом «медленное» движение описывается дифференциальными уравнениями, идентичными уравнениям движения заряженной частицы в некотором эффективном электрическом поле. Потенциальная функция эффективного электрического поля называется эффективным потенциалом, или псевдопотенциалом, и вычисляется по определенным формулам через данные о высокочастотном электрическом поле.

Классическая теория псевдопотенциала (изложенная, например, в [5, с. 124–127], [6, с. 49–51], [7, с. 49–51], [8, с. 142–144]) имеет дело с высокочастотными гармоническими электрическими полями с постоянными во времени (но не в пространстве) амплитудами. Так, если высокочастотное электрическое поле имеет вид $\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_0(x,y,z)\cos(\omega t+\phi)$, то его псевдопотенциал вычисляется как $\bar{U}(x,y,z) = q\left|\mathbf{E}_0(x,y,z)\right|^2 \times (4m\omega^2)^{-1}$. Если высокочастотное электрическое поле может быть представлено, как $\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_c(x,y,z)\cdot\cos\omega t + \mathbf{E}_s(x,y,z)\cdot\sin\omega t$, то его псевдопотенциал вычисляется, как

$\bar{U}(x,y,z) = q\left(\left|\mathbf{E}_c(x,y,z)\right|^2 + \left|\mathbf{E}_s(x,y,z)\right|^2\right)\Big/\left(4m\omega^2\right)$.

Наконец, если высокочастотное электрическое поле представляется рядом Фурье, как $\mathbf{E}(x,y,z,t) = \sum \mathbf{E}_c^{(k)}(x,y,z)\cos(k\omega t) + \mathbf{E}_s^{(k)}(x,y,z)\sin(k\omega t)$, где функции $\mathbf{E}_c^{(k)}(x,y,z)$ и $\mathbf{E}_s^{(k)}(x,y,z)$ — это амплитуды соответствующих гармоник электрического поля, то значение эффективного потенциала $\bar{U}(x,y,z)$ в точке пространства (x,y,z) вычисляется в соответствии с формулой $\bar{U}(x,y,z) = q\sum\left(\left|\mathbf{E}_c^{(k)}(x,y,z)\right|^2 + \left|\mathbf{E}_s^{(k)}(x,y,z)\right|^2\right)\Big/\left(4m\omega^2k^2\right)$.

Для того чтобы создавать высокочастотные электрические поля указанного вида, к электродам устройства должны прикладываться электрические напряжения, меняющиеся во времени, как $\cos(\omega t+\phi)$, $\cos\omega t$, $\sin\omega t$, $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $\sum\left(p_k\cos(k\omega t)+q_k\sin(k\omega t)\right)$ (последнее выражение представляет собой разложение в ряд Фурье произвольной периодической во времени функции), а также суперпозиции таких напряжений. Отметим, что во всех приведенных случаях псевдопотенциал — это стационарная, не меняющаяся во времени функция от координат пространства.

В работах [1–4] понятие псевдопотенциала обобщается на более широкий класс электрических напряжений, характеризуемых "медленными" и "быстрыми" характерными временами изменения во времени. Пусть электрические напряжения, прикладываемые к электродам устройства, описываются выражениями вида $A_0(t) + \sum\left(A_k(t)\cos\omega_k t + B_k(t)\sin\omega_k t\right)$, где $A_k(t)$ и $B_k(t)$ — "медленные" функции, а ω_k — фиксированный набор "быстрых" и "далеко разнесенных" частот (точные математические определения этих понятий приводятся в [3]). Тогда высокочастотное электрическое поле $\mathbf{E}(x,y,z,t)$, создаваемое внутри устройства, представимо в виде

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_0(x,y,z,t) + \sum\left(\mathbf{E}_k^{(c)}(x,y,z,t)\cos\omega_k t + \mathbf{E}_k^{(s)}(x,y,z,t)\sin\omega_k t\right), \quad (1)$$

где компоненты высокочастотного электрического поля $\mathbf{E}_0(x,y,z,t)$, $\mathbf{E}_k^{(c)}(x,y,z,t)$ и $\mathbf{E}_k^{(s)}(x,y,z,t)$ являются "медленными" функциями времени, а ω_k — "быстрыми" и "далеко разнесенными" частотами. В результате разбиения движения заряженной частицы на "медленную" и "быструю" часть получаем, что "медленное" движение описывается уравнениями движения заряженной частицы в электрическом поле с потенциалом $U_0(x,y,z,t)+\bar{U}(x,y,z,t)$, где $U_0(x,y,z,t)$ — это "медленный" электрический потенциал, соответствующий низкочастотной компоненте электрического поля $\mathbf{E}_0(x,y,z,t)$, а $\bar{U}(x,y,z,t)$ — это "медленный" эффективный потенциал, который выражается через "медленные" амплитуды быстрых гармоник электрического поля, как

$$\bar{U}(x,y,z,t) = q\sum\left(\left|\mathbf{E}_k^{(c)}(x,y,z,t)\right|^2 + \left|\mathbf{E}_k^{(s)}(x,y,z,t)\right|^2\right)\times\left(4m\omega_k^2\right)^{-1} \quad (2)$$

(подробности выкладок см. в [2]). Существенно, что для таких высокочастотных электрических полей псевдопотенциал $\bar{U}(x,y,z,t)$ оказывается зависимым от времени, тогда как в предыдущем случае он был строго стационарной функцией от координат.

Важным частным случаем высокочастотных электрических полей с меняющимся во времени псевдопотенциалом $\bar{U}(x,y,z,t)$ являются высокочастотные электрические поля с архимедовыми свойствами, характеризующиеся чередующимися масимумами и минимумами псевдопотенциала, перемещающимися вдоль оси устройства (причем обычно псевдопотенциал на оси устройства представляет собой бегущую волну вида $\bar{U}(z) = f(z/L - t/T)$ при надлежащим образом выбранной периодической функции $f(\lambda)$). Для таких высокочастотных электрических полей характерен захват заряженных частиц в локальные области устойчивости, соответствующие локальным минимумам псевдопотенциала, и принудительное перемещение сформировавшихся пакетов заряженных частиц вдоль оси устройства в соответствии с перемещением минимумов псевдопотенциала. Данный эффект аналогичен работе архимедова винта в механике, чем и обусловлено название, выбранное для высокочастотных электрических полей с указанными свойствами.

Частный пример транспортирующего устройства для заряженных частиц (ion guide), работа которого основана на высокочастотных электрических полях с архимедовыми свойствами, приводится в [1]. Наиболее интересное свойство указанного устройства состоит в том, что оно способно преобразовывать эффективно и без потерь заряженных частиц непрерывный пучок заряженных частиц в последовательность пространственно сепарированных пакетов заряженных частиц, сгущая частицы в окрестностях определенных точек и разрежая пучок до полной прозрачности в остальных точках. Указанные пакеты транспортируются вдоль оси устройства в соответствии с контролируемым электроникой законом от времени, в результате чего на выходе указанного устройства в строго обозначенные моменты времени возникают импульсы заряженных частиц. Более подробно практические классы масс-спектрометрических устройств, которые могут быть созданы на основе высокочастотных электрических полей, характеризуемых меняющимся во времени псевдопотенциалом, рассмотрены в [4].

2. КОНТРПРИМЕР, "ОПРОВЕРГАЮЩИЙ" КОРРЕКТНОСТЬ ФОРМУЛЫ ДЛЯ МЕДЛЕННОМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПОТЕНЦИАЛА

В качестве частного примера рассмотрим суперпозицию осесимметричных электрических полей, имеющих осевое распределение $U_c(z) = U_0 \cos(z/L)$ и $U_s(z) = U_0 \sin(z/L)$ соответственно, где z — это координата вдоль оси устройства. Трехмерные электрические потенциалы, соответствующие данным осевым распределениям, имеют вид $U^{(c)}(z,r) = U_0 \cos(z/L) \cdot F(r/L)$ и $U^{(s)}(z,r) = U_0 \sin(z/L) \cdot F(r/L)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $F(r)$ представляется в виде сходящегося бесконечного ряда $F(r) = 1 + r^2/4 + r^4/64 + {}$ $+ r^6/2304 + r^8/147456 + \ldots$ или же в виде интеграла

$$F(r) = (1/2\pi)\int_0^{\pi} \left(\exp(+r\cos\phi) + \exp(-r\cos\phi)\right) \mathrm{d}\phi,$$

совпадающего с модифицированной функцией Бесселя нулевого порядка $\mathrm{I}_0(r)$.

Пусть потенциал $U^{(c)}$ модулирован во времени, как $U^{(c)}(z,r) \cdot \sin\delta t \cdot \cos\omega t$, а потенциал $U^{(s)}$, как $U^{(s)}(z,r) \cdot \cos\delta t \cdot \cos\omega t$. На оси $r = 0$ радиальные компоненты электрического поля обращаются в ноль: $E_r^{(c)} = \partial U^{(c)}/\partial r = 0$ и $E_r^{(s)} = \partial U^{(s)}/\partial r = 0$, а осевые компоненты электрического поля равны $E_z^{(c)} = \partial U^{(c)}/\partial z = -(U_0/L)\sin(z/L)\sin\delta t \cdot \cos\omega t$ и $E_z^{(s)} = \partial U^{(s)}/\partial z = +(U_0/L)\cos(z/L)\cos\delta t \cdot \cos\omega t$. В результате суммарное электрическое поле на оси $r = 0$ ведет себя, как $E_z = {}$ $= (U_0/L)\cos(z/L + \delta t) \cdot \cos\omega t$, поэтому в соответствии с формулами (1) и (2) псевдопотенциал $\bar{U}$ на оси устройства ведет себя, как $\bar{U}(z) = qU_0^2/(4mL^2\omega^2)\cos^2(z/L + \delta t)$, т. е. представляет собой бегущую волну.

Пусть потенциал $U^{(c)}$ модулирован во времени, как $U^{(c)}(z,r) \cdot (a\sin(\omega+\delta)t + b\sin(\omega-\delta)t)$, а потенциал $U^{(s)}$, как $U^{(s)}(z,r) \cdot (c\cos(\omega+\delta)t + {}$ $+ d\cos(\omega-\delta)t)$. Радиальная компонента суммарного электрического поля на оси равна нулю, а осевая компонента ведет себя, как

$$\begin{aligned} E_z = {} & (U_0/L) \cdot c\cos(z/L)\cos(\omega+\delta)t - {} \\ & -(U_0/L) \cdot a\sin(z/L)\sin(\omega+\delta)t + {} \\ & +(U_0/L) \cdot d\cos(z/L)\cos(\omega-\delta)t - {} \\ & -(U_0/L) \cdot b\sin(z/L)\sin(\omega-\delta)t. \end{aligned}$$

В соответствии с формулами (1) и (2) псевдопотенциал указанного высокочастотного электрического поля должен вычисляться, как

$$\begin{aligned} & q(U_0/L)^2 c^2 \cos^2(z/L) \Big/ \left(4m(\omega+\delta)^2\right) + {} \\ & + q(U_0/L)^2 a^2 \sin^2(z/L) \Big/ \left(4m(\omega+\delta)^2\right) + {} \\ & + q(U_0/L)^2 d^2 \cos^2(z/L) \Big/ \left(4m(\omega-\delta)^2\right) + {} \\ & + q(U_0/L)^2 b^2 \sin^2(z/L) \Big/ \left(4m(\omega-\delta)^2\right). \end{aligned}$$

В частности, при $a = +1/2$, $b = -1/2$, $c = +1/2$, $d = +1/2$ псевдопотенциал должен быть равен $(qU_0^2/16mL^2)\left(1\big/(\omega+\delta)^2 + 1\big/(\omega-\delta)^2\right)$. Что не соответствует полученному ранее результату, поскольку при таком выборе констант a, b, c и d модулирование во времени потенциалов $U^{(c)}$ и $U^{(s)}$ тождественно совпадает с предыдущим случаем.

Причина, естественно, состоит в том, что не выполнены базовые предположения, при которых из представления высокочастотного электрического поля в форме (1) была получена формула (2) для псевдопотенциала. Если частота δ "медленная" по сравнению с "быстрой" частотой ω, тогда частоты $(\omega+\delta)$ и $(\omega-\delta)$ будут "быстрыми", но не будут "далеко разнесенными", и поэтому второй вариант формулы для псевдопотенциала будет неверен. Если частота δ тоже будет "быстрой", то частоты $(\omega+\delta)$ и $(\omega-\delta)$ будут и "быстрыми", и "далеко разнесенными", однако в этом случае уже функция $\cos(z/L + \delta t)$ не может рассматриваться как "медленная", и поэтому первый вариант формулы для псевдопотенциала будет неверен. Наконец, если "быстрая" частота δ будет сравнима с "быстрой" частотой ω, то неверны обе формулы для псевдопотенциала, поскольку частота $(\omega-\delta)$ в этом случае не может рассматриваться как "быстрая" и перед вычислением псевдопотенциала из представления высокочастотного электрического поля надо выделить низкочастотную составляющую. Наконец, для переходных случаев формула (2), которая требует, чтобы в формуле (1) "быстрые" и "медленные" времена были четко разнесены, вряд ли вообще способна дать результат, с приемлемой точностью описывающий истинное движение заряженной частицы в высокочастотном электрическом поле.

3. АНАЛИЗ ПРИЧИН ВАЖНОСТИ УСЛОВИЯ, ЧТОБЫ ВСЕ БАЗОВЫЕ ЧАСТОТЫ БЫЛИ "ДАЛЕКО РАЗНЕСЕННЫМИ"

Интересным вопросом является, на каком именно этапе при выводе в [2] формулы для медленноменяющегося потенциала было использовано условие, что частоты ω_k — это "далеко разнесенные" частоты? Вопрос не праздный, поскольку с формальной точки зрения указанная гамильтонова замена переменных будет работать независимо от того, являются ли разности частот ω_k "далеко разнесенными". Тем более что результирующая формула для эффективного потенциала содержит знаменатели вида $1/\omega_k^2$ (и, следовательно, частоты ω_k обязаны быть "быстрыми" для сходимости ряда для псевдопотенциала), но в ней отсутствуют члены вида $1/(\omega_m-\omega_n)^2$, порождающие избыточно большие поправки и вызывающие расходимость начальных членов ряда для псевдопотенциала, если частоты ω_k "близки". С другой стороны, пример из раздела 2 показывает, что суперпозиция чисто гармонических электрических напряжений, характеризуемых незначительно отличающимися частотами, обеспечивает архимедов эффект (волну псевдопотенциала, двигающуюся вдоль оси устройства), тогда как формальное использование формулы для псевдопотенциала для этих напряжений никакой бегущей волны отнюдь не предсказывает.

Ключевыми моментами являются два пункта. Во-первых, производящая функция S_b для замены переменных во втором порядке, полученная в [2], содержит члены вида $S_{-v,b}^{(i,j)}\cos(\omega_i-\omega_j)t$ и $S_{-w,b}^{(i,j)}\sin(\omega_i-\omega_j)t$. Это означает, что хотя при "близких" частотах гамильтоновы уравнения, записанные в новых переменных, и остаются справедливыми и взаимно обратимыми относительно исходных уравнений, но сами новые переменные уже нельзя трактовать как результат усреднения точных решений уравнений движения, соответствующих движению заряженных частиц в высокочастотном электрическом поле. То есть при переходе от новых переменных к усредненным старым переменным необходимо заодно учесть и соответствующие поправки для координат и импульсов вида $(\cdots)\cos(\omega_i-\omega_j)t$ и $(\cdots)\sin(\omega_i-\omega_j)t$, результат усреднения которых по "быстрым" осцилляциям в случае $(\omega_i-\omega_j) \ll \min(\omega_k)$ не может рассматриваться, как равный нулю. Во-вторых, достаточно вспомнить, что выражения в [2] для $S_{-v,b}^{(i,j)}t$ и $S_{-w,b}^{(i,j)}$ содержат множители вида $(\omega_i+\omega_j)^2 / \left(4m\omega_i^2\omega_j^2(\omega_i-\omega_j)\right)$, вызывающие расходимость не в самом псевдопотенциале, но в замене переменных, которая к нему приводит.

В результате для применимости значения псевдопотенциала, вычисляемого по выведенной здесь формуле, для реального описания движения заряженных частиц в "быстро-медленных" высокочастотных электрических полях, необходимо предварительно аккуратно свести высокочастотные электрические поля к каноническому представлению

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\mathbf{E}_0(\mathbf{x},t)+ \\ +\varepsilon\sum\left(\mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\cos\omega_k t+\mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\sin\omega_k t\right),$$

где частоты ω_k не только "быстрые", но и "далеко разнесенные". В противном случае неизбежны ошибки: вычисленное движение заряженных частиц и истинное движение заряженных частиц будут сильно отличаться друг от друга.

4. ПРОЦЕДУРА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЕДИНОГО НАБОРА "ДАЛЕКО РАЗНЕСЕННЫХ" БАЗОВЫХ ЧАСТОТ ПРИ НАЛИЧИИ СОВОКУПНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ

Как показано в разделе 2 данной работы, при представлении временны́х сигналов, описывающих закон изменения во времени напряжений, приложенных к электродам устройства, в форме $f_j(t)=A_0^{(j)}(t)+\sum A_k^{(j)}(t)\cos\omega_k t+B_k^{(j)}(t)\sin\omega_k t$, где $A_k^{(j)}(t)$ и $B_k^{(j)}(t)$ — "медленные" функции, а ω_k — фиксированный набор "быстрых" и "далеко разнесенных" частот, крайне существенно, чтобы набор частот ω_k был одним и тем же для всей совокупности сигналов. В частности, если частоты ω_k, использованные для разных сигналов, будут слегка отличаться (оставаясь при этом "далеко разнесенными" в пределах одного сигнала), это может привести к ошибочному представлению псевдопотенциала суммарного высокочастотного электрического поля, как это показано на примере в разделе 2.

В работе [3] было показано, что для представления временно́го сигнала $f(t)$ в канонической форме

$$f(t)=A_0(t)+\sum\left(A_k(t)\cos\omega_k t+B_k(t)\sin\omega_k t\right), \quad (3)$$

где $A_k(t)$ и $B_k(t)$ — "медленные" функции, а ω_k — "быстрые" и "далеко разнесенные" частоты, необходимо и достаточно, чтобы спектр сигнала распадался на совокупность достаточно узких отрезков, достаточно далеко разнесенных друг от друга. При построении представления сигнала $f(t)$ в форме (3) в качестве частот ω_k можно выбрать середины соответствующих узких отрезков, а функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$ однозначно определяются поведением спектральной функции $F(\omega)$ на соответствующем узком отрезке спектра (точнее, $A_k(t)$ и $B_k(t)$ — это вещественная и мнимая части комплекснозначного сигнала, спектром которого является спектральная функция $F(\omega)$, взятая на соответствующем узком отрезке спектра, после сдвига указанного отрезка с центром в точке $\omega=\omega_k$ к началу координат $\omega=0$).

Однако выбор узких спектральных отрезков, вне которых спектр сигнала предполагается равным нулю, — достаточно произвольная процедура. В частности, достаточно дополнить данный отрезок справа и/или слева куском оси частот, на которой спектр $F(\omega)$ тождественно равен нулю, чтобы центр отрезка ω_k изменился и соответственно изменилось представление сигнала $f(t)$ в форме (3). Для того, чтобы избавиться от неоднозначности при определении "быстрых" частот ω_k, в [3] предложено вычислять ω_k, как средневзвешенную величину по формуле $\omega_k=\int\left|F(\omega)\right|^2\omega\,\mathrm{d}\omega\Big/\int\left|F(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega$, где интегрирование выполняется по соответствующему узкому отрезку частот. Легко показать, что такая процедура определения частоты ω_k приводит к одному и тому же значению, если расширить узкий отрезок частот, положив спектр $F(\omega)$ равным нулю на добавленном интервале.

Однако если речь идет не об одном сигнале $f(t)$, а о совокупности сигналов $f_j(t)$, то с помощью данного способа легко получить такие наборы частот ω_{kj}, среди которых окажутся близкие быстрые частоты. Наиболее простой способ — отобрать "близкие" частоты ω_{kj} в отдельную группу и определить для них единую частоту ω_k, как среднее арифметическое $\omega_k=(1/N)\sum\omega_{kj}$, где суммирование, естественно, производится только по частотам, попавшим в данную группу "близости". Для перехода от "слегка различающихся" частот $\omega_{kj}=\omega_k+\delta_{kj}$ к единой частоте ω_k не требуется снова выполнять частотный анализ, достаточно простейшего тригонометрического преобразования:

$$\begin{aligned}
&A_k^{(j)}(t)\cos\left(\left(\omega_k+\delta_{kj}\right)t\right)+B_k^{(j)}(t)\sin\left(\left(\omega_k+\delta_{kj}\right)t\right)=\\
&=A_k^{(j)}(t)\cos\delta_{kj}t\cdot\cos\omega_k t-A_k^{(j)}(t)\sin\delta_{kj}t\cdot\sin\omega_k t+\\
&+B_k^{(j)}(t)\cos\delta_{kj}t\cdot\sin\omega_k t+B_k^{(j)}(t)\sin\delta_{kj}t\cdot\cos\omega_k t=\\
&=\cos\omega_k t\left(A_k^{(j)}(t)\cos\delta_{kj}t+B_k^{(j)}(t)\sin\delta_{kj}t\right)+\\
&+\sin\omega_k t\left(B_k^{(j)}(t)\cos\delta_{kj}t-A_k^{(j)}(t)\sin\delta_{kj}t\right).
\end{aligned}$$

В скобках полученного выражения стоят модифицированные "медленные" функции

$$\bar{A}_k^{(j)}(t)=A_k^{(j)}(t)\cos\delta_{kj}t+B_k^{(j)}(t)\sin\delta_{kj}t \quad \text{и}$$

$$\bar{B}_k^{(j)}(t)=B_k^{(j)}(t)\cos\delta_{kj}t-A_k^{(j)}(t)\sin\delta_{kj}t,$$

которые и должны использоваться для вычисления канонического представления для высокочастотного электрического поля, подставляемого в формулу для псевдопотенциала для получения правильного результата (конечно, если единые для всей совокупности сигналов $f_j(t)$ базовые частоты ω_k будут не только "быстрыми", но и "далеко разнесенными", а соответствующие функции $A_k^{(j)}$ и $B_k^{(j)}$ будут "медленными").

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА В СЛУЧАЕ НЕВОЗМОЖНОСТИ КАНОНИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВРЕМЕННЫ́Х СИГНАЛОВ

Если спектр или спектры временны́х сигналов $f_j(t)$ не являются почти линейчатыми, т. е. представимыми в виде совокупности узких и далеко разнесенных частотных отрезков, вне которых спектр сигнала считается равным нулю, то указанные сигналы не могут быть приведены к каноническому виду

$$f_j(t)=A_0^{(j)}(t)+\sum\left(A_k^{(j)}(t)\cos\omega_k t+B_k^{(j)}(t)\sin\omega_k t\right),$$

где $A_k^{(j)}(t)$ и $B_k^{(j)}(t)$ — "медленные" функции, а ω_k — фиксированный набор "быстрых" и "далеко разнесенных" частот. В частности, это возможно, если спектры отдельных сигналов $f_j(t)$ перекрываются настолько плотно, что невозможно выбрать единую для всех сигналов систему "быстрых" и "далеко удаленных" друг от друга частот ω_k. В этом случае изложенная выше теория медленноменяющегося псевдопотенциала оказывается неприменима. Однако это не означает, что невозможно предложить модифицированное выражение для псевдопотенциала, которое окажется пригодным для приближенного описания движения заряженных частиц в таком высокочастотном электрическом поле. Более аккуратное усреднение уравнений движения, чем то, которое приведено в [2], может привести к успеху и обобщить понятие псевдопотенциала на расширенный класс временны́х сигналов.

Например, может оказаться полезным численное исследование движения заряженных частиц в указанном высокочастотном электрическом поле и анализ получаемого усредненного движения. Таким образом возможно восстановить правые части дифференциальных уравнений для усредненного движения заряженной частицы, проверить их "потенциальность" и, если возможно, восстановить численно значение псевдопотенциала. Определение псевдопотенциала как виртуальной функции, описывающей усредненное движение заряженной частицы в соответствующем высокочастотном электрическом поле, является определяющим по сравнению с конкретными арифметическими выражениями, приведенными выше. Эта увлекательная задача еще ждет своих исследователей.

6. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА К НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ЗАДАНИЯ НАБОРА БАЗОВЫХ ЧАСТОТ

Интересной задачей, непосредственно следующей из содержания раздела 4 данной работы, является задача о чувствительности значения псевдопотенциала к выбору "быстрых" частот ω_k. Рассмотрим, например, что произойдет при переходе от частот ω_k к слегка сдвинутым частотам $\bar{\omega}_k = \omega_k + \delta_k$.

Пересчет высокочастотного электрического поля, представленного как (1), к новому представлению, потребует лишь уже знакомых нам элементарных тригонометрических преобразований:

$$\sum\Big[\mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\cos\big((\bar{\omega}_k-\delta_k)t\big) + \mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\sin\big((\bar{\omega}_k-\delta_k)t\big)\Big] =$$

$$=\sum\Big[\mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\cos\delta_k t\cdot\cos\bar{\omega}_k t + \mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\sin\delta_k t\cdot\sin\bar{\omega}_k t + \mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\cos\delta_k t\cdot\sin\bar{\omega}_k t - \mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\sin\delta_k t\cdot\cos\bar{\omega}_k t\Big] =$$

$$=\sum\Big[\cos\bar{\omega}_k t\Big(\mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\cos\delta_k t - \mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\sin\delta_k t\Big) + \sin\bar{\omega}_k t\Big(\mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\cos\delta_k t + \mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\sin\delta_k t\Big)\Big].$$

В круглых скобках полученного выражения стоят модифицированные "медленные" функции $\tilde{\mathbf{E}}_k^{(c)}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\cos\delta_k t - \mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\sin\delta_k t$ и $\tilde{\mathbf{E}}_k^{(s)}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\cos\delta_k t + \mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\sin\delta_k t$, описывающие поведение высокочастотного электрического поля. Легко видеть, что эти функции могут существенно отличаться от предыдущего варианта.

Однако с точки зрения вычисления эффективного потенциала это расхождение между новым и старым представлениями при переходе к сдвинутым центральным частотам не очень существенно. Действительно,

$$\left|\tilde{\mathbf{E}}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\right|^2 = \left|\mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\right|^2\cos^2\delta_k t + \left|\mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\right|^2\sin^2\delta_k t - \mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\cdot\sin 2\delta_k t$$

и

$$\left|\tilde{\mathbf{E}}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\right|^2 = \left|\mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\right|^2\cos^2\delta_k t + \left|\mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\right|^2\sin^2\delta_k t + \mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\cdot\sin 2\delta_k t .$$

Поэтому значение эффективного потенциала $\bar{U}(x,y,z,t)$, выраженное через новое каноническое представление электрического поля, будет равно

$$\bar{U}(x,y,z,t) = q\sum\left(\left|\tilde{\mathbf{E}}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\right|^2 + \left|\tilde{\mathbf{E}}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\right|^2\right)\Big/\left(4m\bar{\omega}_k^2\right) = q\sum\left(\left|\mathbf{E}_k^{(c)}(\mathbf{x},t)\right|^2 + \left|\mathbf{E}_k^{(s)}(\mathbf{x},t)\right|^2\right)\Big/\left(4m\bar{\omega}_k^2\right).$$

Это значит, что значение псевдопотенциала в отличие от канонического представления высокочастотного электрического поля не слишком сильно меняется при переходе к сдвинутым базовым частотам $\bar{\omega}_k = \omega_k + \delta_k$: числители остаются неизменными, а для знаменателей выполнено соотношение $1/(\bar{\omega}_k)^2 = 1/(\omega_k+\delta_k)^2 \approx 1/(\omega_k)^2$ в силу предполагаемого условия $\delta_k << \omega_k$. В силу этих же соображений неоднозначность выбора поправки δ_k для центральной частоты ω_k, рассмотренная в разделе 4, меняет представление временно́го сигнала $f(t)$ в виде канонической тригонометрической суммы (3), но практически не меняет значения медленно меняющегося во времени эффективного потенциала, вычисляемого на основе полученной тригонометрической суммы.

Благодарности

В конце данной работы, подводящей итог циклу публикаций, я хочу еще раз выразить свою благодарность людям, без которых это исследование вряд ли могло состояться.

Я хочу выразить свою благодарность Михаилу Явору за многочисленные консультации по тонким вопросам оптики заряженных частиц, включая оптику заряженных частиц в высокочастотных электрических полях; Алине Андреевой за экспериментальную проверку с помощью моделирования конкретных устройств, тех общих теоретических формул и закономерностей, которые здесь получены, а также за помощь при подготовке рисунков; Николаю Галлю за неоценимую помощь и поддержку в решении разнообразных организационных вопросов во время проведения данной работы; Сумио Кумаширо, Роджеру Джайлсу, Вячеславу Щепунову и Михаилу Судакову за их высокую оценку представленных здесь результатов во время моей первой презентации возможностей, связанных с использованием архимедовых высокочастотных полей, на закрытом лабораторном семинаре в мае 2010 г. Отдельная благодарность Михаилу Судакову за последующие совместные обсуждения указанной тематики, наглядную физическую интерпретацию разработанного здесь математического формализма, подсказанные ссылки на патенты масс-спектрометрических устройств и на практические применения радиочастотных электрических полей в классической масс-спектрометрии, и за те многочисленные каверзные вопросы, на которые мне приходилось искать ответы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердников А.С.* Медленно меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. I // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 2. С. 77–89.
2. *Бердников А.С.* Медленно меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 2. Общая формула // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 3. С. 83–96.
3. *Бердников А.С.* Медленно меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 3. Временные сигналы, характеризуемые "медленным" и "быстрым" временами // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 4. С. 75–85.
4. *Бердников А.С.* Медленно меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 4. Приборы и устройства // Научное приборостроение. 2011. Т. 21, № 4. С. 86–102.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. I. Механика. М.: Физматлит, 2004. 224 с.
6. *Миллер М.А.* Движение заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях // Известия вузов, сер. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 3. С. 110–123.
7. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
8. *Yavor M.I.* Optics of Charged Particle Analyzers. Ser. Advances of Imaging and Electron Physics. V. 157. Elsevier, 2009.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Бердников Александр Сергеевич*, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 9.06.2011.

TIME-DEPENDENT PSEUDOPOTENTIAL AND ITS APPLICATION FOR DESCRIPTION OF THE AVERAGED MOTION OF THE CHARGED PARTICLES. PART 5. COMMENTS TO A GENERAL EXPRESSION FOR TIME-DEPENDENT PSEUDOPOTENTIALS

A. S. Berdnikov

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg

The previous series of publications describes a new method to control the movement of the charged particles by high frequency electric fields. The paper considers some non-trivial aspects of the derived expression for slowly evolving pseudopotentials which were not outlined in previous publications with necessary details.

Keywords: mass spectrometric devices, radio frequency devices, pseudopotentials, Hamiltonian dynamics, Hamiltonian dynamic systems, averaging techniques for Hamiltonian dynamics, high frequency electric fields, radio frequency electric fields, spectral analysis of time-dependent signals