ISSN 0868–5886 *НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2012, том 22, № 2, с. 90–97*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 534.213

© Б. П. Шарфарец

АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ УПРУГОГО ШАРИКА В ВЯЗКОЙ ИЗОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

На основе линеаризации системы уравнений Навье—Стокса без учета тепловых эффектов получена СЛАУ четвертого порядка, позволяющая в конечном итоге вычислять амплитуду рассеяния однородного упругого шарика в вязкой жидкости в линейном приближении с произвольной точностью (до мультиполей произвольного порядка). Это в свою очередь позволит в дальнейшем применить процедуру вычисления радиационного давления через амплитуду рассеяния в линейном приближении, разработанную ранее для идеальных жидкостей, и в случае слабовязких жидкостей. Описанная процедура получения амплитуды рассеяния в линейном приближении является универсальной и не зависит от величины вязкости жидкости.

Кл. сл.: вязкая жидкость, упругий шарик, амплитуда рассеяния

ВВЕДЕНИЕ

В идеальной жидкой среде задача расчета радиационного давления (рд) сводится к решению линейной задачи рассеяния на включении. Случай включений с потерями в идеальной жидкой среде сводится также к решению такой же задачи рассеяния (см., например, [1]). Однако, как известно, отсутствие учета вязкости внешней среды может приводить к сильному искажению реальных значений рд вследствие возникновения пограничного слоя вокруг включения даже при небольшой вязкости. Общие методы расчета рд при учете вязкости достаточно трудоемки. Следующим по сложности после идеальной жидкости является случай маловязких окружающих жидкостей. При больших числах Рейнольдса R, соответствующих малой вязкости, жидкость может рассматриваться как идеальная, но только вне пограничного слоя вокруг твердого включения [2]. Тогда задача расчета радиационного давления на одиночном включении сводится к случаю идеальной жидкости при условии того, что в качестве включения выступает совокупный объем, состоящий из реального твердого включения и прилегающего к нему пограничного слоя. Эта идея не является оригинальной. Она высказывалась еще в работе [3], а в работе [4] она реализована точно в такой же постановке, как и в работе [5], только с добавлением пограничного слоя. При этом авторы [4], как и в [5], получают частное решение, ограничиваясь при описании включения мультиполями только нулевого и первого порядка. Вместе с тем в идеальной жидкости эта теория распространена на включения с произвольной амплитудой рассеяния (ар) (см., например, работы [6–8]). Необходимость этого видна хотя бы из работы [1], когда нужно учитывать произвольное количество мультиполей.

Как известно, в идеальной жидкости при расчете рд достаточно вычислять ар включения в линейном приближении [5]. Тогда при работе с маловязкими жидкостями, когда вне пограничного слоя жидкость можно считать идеальной вне пограничного слоя, очевидно так же, что для расчета рд достаточно вычислить ар в линейном приближении. Поскольку вязкая жидкость описывается нелинейным уравнением Навье—Стокса, необходима его линеаризация с последующим вычислением ар в линейном приближении. Поскольку эта процедура расчета ар не связана с величиной вязкости жидкости, то она будет универсальной вне зависимости от величины вязкости.

В литературе есть примеры расчетов ар включений, находящихся в вязкой среде. Так, в работе [9] вычисляется ар бесконечного полого цилиндра, покрытого вязкоупругой оболочкой, находящегося в идеальной жидкости. Оболочку в известном смысле можно интерпретировать как пограничный слой. В работе [10] рассчитывается ар заполненной водой полой сферы, находящейся в вязкоупругом однородном пространстве. В отличие от [9, 10], где учитываются причины затухания звука связанные только с вязкостью, в работе [11] рассчитывается ар на упругом шарике с учетом только тепловых эффектов как в окружающей среде, так и в шарике. Здесь следует отметить похожесть молекулярного механизма поглощения звука как под влиянием вязкости, так и под влиянием теплопроводности, что проявляется в симметричной зависимости коэффициента поглощения от коэффициентов, характеризующих оба этих эффекта [2, выражение (79.6)].

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В настоящей работе рассматривается простейшая осесимметричная задача рассеяния: на упругий шарик радиусом a, помещенный в вязкую однородную жидкость, падает плоская потенциальная волна, распространяющаяся вдоль положительного направления оси Oz. Центр шарика помещен в начало координат O.

Пусть жидкость и упругое включение характеризуются следующими константами соответственно: параметрами Ламе λ, μ и λ_1, μ_1; скоростями звука c в жидкости, и продольной $c_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}$, и поперечной $c_2 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\rho_1}}$ в упругом шарике.

Примем, что $\mathbf{v}_0$, p_0, ρ_0 — невозмущенные значения скорости, давления и плотности жидкости; $\mathbf{v}$, p, ρ — возмущения этих значений вследствие колебаний жидкости. Примем, что жидкость является вязкой, сжимаемой и изначально неподвижной $\mathbf{v}_0 = 0$. Плотность шарика — ρ_1. Суммарное давление p' и плотность ρ' в жидкости тогда равны $p' = p + p_0$, $\rho' = \rho + \rho_0$.

При принятых допущениях движение изотропной вязкой жидкости описывается системой уравнений Навье—Стокса, в которую входят:

– собственно уравнение движения Навье—Стокса либо в терминах коэффициентов динамической вязкости λ и μ, являющихся соответственно первым и вторым параметрами Ламе [13, с. 206]

$$\rho'\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p' + \mu\Delta\mathbf{v} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{v}, \quad (1)$$

либо в терминах коэффициентов η сдвиговой и ς объемной (второй) вязкости [2, с. 73]

$$\rho'\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p' + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\varsigma + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{v}; \quad (1а)$$

– уравнение неразрывности [2, с. 15]

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho'\mathbf{v}) = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho'\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho' = 0; \quad (2)$$

– уравнение состояния, замыкающее систему; в случае баротропной жидкости записывается так [2, с. 351]:

$$p' = f(\rho') \text{ или } \quad p = c^2\rho, \quad (3)$$

в случае учета тепловых эффектов — так [14, с. 13]:

$$p = c^2\rho - \kappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\nabla\cdot\mathbf{v}. \quad (3а)$$

Здесь κ — коэффициент теплопроводности; c_v, c_p — удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно.

Ввиду малости коэффициента теплопроводности κ в жидкостях и газах вторым членом в (3а) часто пренебрегают [15, с. 22]. Это приводит уравнение состояния (3а) к (3). Поэтому в настоящей работе примем уравнение состояния в виде (3).

Из уравнений (1), (1а) видно, что выполняются соотношения между коэффициентами динамической вязкости λ, μ и коэффициентами η, ς

$$\eta = \mu, \qquad \varsigma = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (4)$$

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Для решения линейной задачи рассеяния необходима линеаризация системы уравнений Навье—Стокса (1), (2). Линеаризованная версия уравнения (1) имеет вид (см., например,[14–19], для (1а) — то же, просто необходимо учесть соотношение между постоянными (4))

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\lambda+\mu}{\rho_0}\nabla\nabla\cdot\mathbf{v} + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad (5)$$

а уравнение неразрывности (2) [2, с. 350]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \quad (6)$$

Далее принимается стандартное представление

$$\begin{gathered} \mathbf{v} = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_t, \\ \mathbf{v}_l = \nabla\Phi, \quad \mathbf{v}_t = \nabla\times\mathbf{\Psi}, \quad \nabla\mathbf{\Psi} = 0, \end{gathered} \quad (7)$$

где Φ — скалярный, а $\mathbf{\Psi}$ — векторный потенциалы вектора колебательной скорости. После несложных преобразований из (5)–(7) получены следующие соотношения [14–19]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi - c^2\left(1 + \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\Phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Psi} = \frac{\mu}{\rho_0}\Delta\mathbf{\Psi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{v}_l - c^2\left(1 + \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\mathbf{v}_l = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_t - \frac{\mu}{\rho_0}\Delta\mathbf{v}_t = 0\,,$$
$$p = -\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\Phi + (\lambda+2\mu)\Delta\Phi\,,$$
$$\rho = -\frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{(\lambda+2\mu)}{c^2}\Delta\Phi\,.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, который в случае осевой симметрии равен

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\,.$$

Рассмотрим стационарный гармонический процесс с временны́м фактором $e^{-i\omega t}$. Тогда для амплитуд вышеприведенных соотношений имеем (для удобства амплитуды обозначены теми же символами)

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\omega\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0 c^2}\right)^{-1}\Phi = 0\,, \qquad (8)$$

$$\Delta\mathbf{\Psi} + i\omega\frac{\rho_0}{\mu}\mathbf{\Psi} = 0\,, \qquad (9)$$

$$\Delta\mathbf{v}_l + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\omega\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0 c^2}\right)^{-1}\mathbf{v}_l = 0\,, \qquad (10)$$

$$-i\omega\mathbf{v}_t = \frac{\mu}{\rho_0}\Delta\mathbf{v}_t \qquad (11)$$

$$p = i\omega\rho_0\Phi + (\lambda+2\mu)\Delta\Phi\,, \qquad (12)$$

$$\rho = i\omega\frac{\rho_0}{c^2}\Phi + \frac{(\lambda+2\mu)}{c^2}\Delta\Phi\,. \qquad (13)$$

Задачам (8) и (10) соответствует комплексное волновое число

$$k_l = \frac{\omega}{c}\left(1 - i\omega\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0 c^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{\omega}{c}\left(1 + i\omega\frac{\lambda+2\mu}{2\rho_0 c^2}\right) = \\ = k_l' + ik_l'', \qquad k_l' = \frac{\omega}{c}, \qquad k_l'' = \omega^2\frac{\lambda+2\mu}{2\rho_0 c^3}, \qquad (14)$$

где приближение (14), очевидно, справедливо при условии

$$\frac{\omega(\lambda+2\mu)}{c^2\rho_0} \ll 1,$$

что физически всегда выполняется в случае, когда амплитуда волнового процесса на расстояниях порядка длины волны изменяется слабо [19, с. 23].

Задачам (9) и (11) соответствует комплексное волновое число

$$k_t = (i+1)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = \\ = k_t' + ik_t'', \qquad k_t' = k_t'' = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0}. \qquad (15)$$

В работах [16, 17] и других публикациях автора этих работ показано, что решение задачи (7), в частности, в сферических координатах (r,θ,φ) можно искать через три разделяющихся по уравнениям и краевым условиям скалярных потенциала Φ, ψ_1 и ψ_2:

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{r}\psi_1 + \nabla\times\nabla\times\mathbf{r}\psi_2\,. \qquad (16)$$

В случае осевой симметрии, когда отсутствует зависимость решения от угла азимута φ, потенциал ψ_1 равен нулю и последнее выражение принимает вид [20]

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi + \nabla\times\nabla\times\mathbf{r}\psi_2\,. \qquad (17)$$

Здесь Φ удовлетворяет уравнению (8), а ψ_2 — уравнению типа (9)

$$-i\omega\psi_2 = \frac{\mu}{\rho_0}\Delta\psi_2\,. \qquad (18)$$

Разложим осесимметричные потенциалы по полиномам Лежандра. Для жидкости имеем:

$$\Phi_i = e^{ik_l z} = e^{ik_l r\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n j_n(k_l r)P_n(\cos\theta) \qquad (19)$$

— для падающей волны и

$$\Phi_s = \sum_{n=0}^{\infty}A_n(2n+1)i^n h_n^1(k_l r)P_n(\cos\theta) \qquad (20)$$

— для потенциальной части рассеянной волны (j_n, h_n^1 — сферические функции Бесселя). Для соленоидальной составляющей рассеянной волны

$$\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty}B_n(2n+1)i^n h_n^1(k_t r)P_n(\cos\theta)\,. \qquad (21)$$

Скалярный и векторный потенциалы в упругом шарике имеют вид [9]:

$$\Phi^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty}C_n(2n+1)i^n j_n(k_1 r)P_n(\cos\theta)\,, \qquad (22)$$

$$\psi_2^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty}D_n(2n+1)i^n j_n(k_2 r)P_n(\cos\theta)\,, \qquad (23)$$

где $k_i = \dfrac{\omega}{c_i}$ — волновые числа продольных $i=1$ и поперечных $i=2$ волн в шарике; A_n, B_n, C_n, D_n — искомые постоянные. Потенциалы $\Phi^{(1)}$ и $\psi_2^{(1)}$ удовлетворяют следующему уравнению Гельмгольца [9]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix}\Phi^{(1)}\\ \psi_2^{(1)}\end{pmatrix}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix}\Phi^{(1)}\\ \psi_2^{(1)}\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}k_1^2\\ k_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi^{(1)}\\ \psi_2^{(1)}\end{pmatrix}=0.$$

Выражение для ар $f(\theta)$ получается из (20) (потенциал (21) участия в формировании ар не принимает вследствие его быстрого затухания) подстановкой асимптотики функции Ханкеля $h_n^1(z) \sim \frac{1}{z} i^{-n-1} e^{iz}$ при $z \to \infty$ и вычленением множителя $\frac{e^{ik_l r}}{r}$. Имеем окончательно

$$f(\theta)=\frac{1}{ik_l}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(2n+1)P_n(\cos\theta). \qquad (24)$$

Таким образом, для вычисления ар $f(\theta)$ необходимо знать коэффициенты A_n. Это достигается в общем виде путем вычисления всех коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n при удовлетворении краевых условий на поверхности шарика.

В случае, когда упругий шарик находится в вязкой жидкости, на границе раздела между ними должны быть непрерывны векторы скорости и попарно нормальные и касательные компоненты тензоров напряжений в шарике и в жидкости [21]. С учетом осевой симметрии задачи это означает:

– радиальная компонента скорости в жидкости $v_{ir}+v_{sr}$ и в упругом теле $v^{(1)}{}_r$ на поверхности шара равны

$$v_{ir}+v_{sr}\big|_{r=a}=v^{(1)}{}_r\big|_{r=a}; \qquad (25)$$

– полярная компонента скорости в жидкости $v_{i\theta}+v_{s\theta}$ и в упругом теле $v^{(1)}{}_\theta$ на поверхности шара равны

$$v_{i\theta}+v_{s\theta}\big|_{r=a}=v^{(1)}{}_\theta\big|_{r=a}; \qquad (26)$$

– равны попарно одноименные компоненты тензоров напряжений, отличных от нуля:

$$\sigma_r\big|_{r=a}=\sigma_r{}^{(1)}\big|_{r=a}, \qquad (27)$$
$$\sigma_{r\theta}\big|_{r=a}=\sigma_{r\theta}{}^{(1)}\big|_{r=a}. \qquad (28)$$

Здесь верхний индекс $^{(1)}$ указывает принадлежность к шарику; азимутальные компоненты скоростей и касательных напряжений на поверхности шарика в силу осевой симметрии равны нулю.

В работах [21, 22] приведены выражения для компонент скорости и напряжений для изотропной покоящейся вязкой жидкости, а в работах [23, 24] — для смещений и напряжений однородного упругого тела через соответствующие скалярные потенциалы. Поскольку результаты в [23] и [24] для случая упругого тела отличаются, автором в работе [9] соответствующие выкладки были перепроверены, и результаты совпали с результатами работы [23]. Формализму постановки задачи в настоящей работе соответствуют выражения, полученные в [22], однако во избежание ошибок полученные там выражения также были перепроверены. Детали вычислений изложены в Приложении. Результатом являются формулы:

$$v_r=\frac{\partial}{\partial r}\Phi-\left(r\Delta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_2=$$
$$=\frac{\partial}{\partial r}\Phi+\left(rk_t^2+2\frac{\partial}{\partial r}+r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\psi_2, \qquad (29)$$

$$v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_2+\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\psi_2, \qquad (30)$$

$$\sigma_r=2\mu\left\{\left(k_l^2(b+1)-\frac{i\rho_0\omega}{2\mu}\right)\Phi+\left[\left(-bk_l^2+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(k_t^2+k_t^2r\frac{\partial}{\partial r}+3\frac{\partial^2}{\partial r^2}+r\frac{\partial^3}{\partial r^3}\right)\psi_2\right]\right\}=$$
$$=2\mu\left\{\left(k_l^2-\frac{i\rho_0\omega}{2\mu}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi+\right.$$
$$\left.+\left(k_t^2+k_t^2r\frac{\partial}{\partial r}+3\frac{\partial^2}{\partial r^2}+r\frac{\partial^3}{\partial r^3}\right)\psi_2\right\}, \qquad (31)$$

$$\sigma_{r\theta}=2\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\Phi+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{2}k_t^2\right)\psi_2\right]. \qquad (32)$$

Здесь $b=\frac{\lambda}{2\mu}$. Выражения (29)–(32) совпали с выражениями (3.4), (3.5) работы [22].

Выпишем в парциальном виде условие (25). Для этого вначале перепишем оператор в (29), воздействующий на ψ_2 в следующем виде:

$$r\Delta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}=$$
$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}=$$
$$=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Далее, учитывая уравнение для полиномов Лежандра, получаем

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P_n(\cos\theta)\right)=-n(n+1)P_n(\cos\theta).$$

Тогда воздействие упомянутого оператора на парциальный полином Лежандра приводит к следующему равенству

$$\left(r\Delta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)P_n(\cos\theta)=-\frac{1}{r}n(n+1)P_n(\cos\theta).$$

С учетом всего перечисленного из условия (25) в парциальном виде получаем следующее равенство

$$x_l h_n{}'(x_l)A_n+n(n+1)h_n(x_t)B_n+i\omega x_1 j_n{}'(x_1)C_n+$$
$$+i\omega n(n+1)j_n(x_2)D_n=-x_l j_n{}'(x_l). \qquad (33)$$

Здесь $x_l=k_l a$, $x_t=k_t a$, $x_1=k_1 a$, $x_2=k_2 a$; штрих означает дифференцирование по аргументу функции.

Рассмотрим условие (26). Здесь, учитывая выражение (30), для полярной составляющей скорости необходимо воспользоваться равенством $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_n(\cos\theta)=P_n^1(\cos\theta)$. Тогда условие (26) в парциальном виде можно записать так

$$h_n(x_l)A_n+\left(h_n(x_t)+x_t h_n{}'(x_t)\right)B_n+i\omega j_n(x_1)C_n+$$
$$+i\omega\left(j_n(x_2)+x_2 j_n{}'(x_2)\right)D_n=-j_n(x_l). \qquad (34)$$

Далее рассмотрим условие (27). Выпишем в парциальном виде σ_r, следуя (31), и $\sigma_r^{(1)}$, следуя выражению (18) работы [9] с учетом обозначений настоящей работы. Для σ_r:

$$2\mu\left(\left(k_l^2-\frac{i\rho_0\omega}{2\mu}\right)j_n(k_l r)+k_l^2 j_n{}''(k_l r)\right)+$$
$$+2\mu\left(\left(k_l^2-\frac{i\rho_0\omega}{2\mu}\right)h_n(k_l r)+k_l^2 h_n{}''(k_l r)\right)A_n+$$
$$+2\mu k_t^2\left(h_n(k_t r)+x_t h_n{}'(k_t r)+3h_n{}''(k_t r)+x_t h_n{}'''(k_t r)\right)B_n;$$

для $\sigma_r^{(1)}$:

$$2\mu^{(1)}k_1^2\left(-\frac{\sigma}{(1-2\sigma)}j_n(x_1)+j_n{}''(x_1)\right)C_n+$$
$$+2\mu^{(1)}k_2^2\left(j_n(x_2)+x_2 j_n{}'(x_2)+3j_n{}''(x_2)+x_2 j_n{}'''(x_2)\right)D_n.$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона материала шарика. Приравнивая эти выражения, получаем третье уравнение системы

$$\left(\left(k_l^2-\frac{i\rho_0\omega}{2\mu}\right)h_n(x_l)+k_l^2 h_n{}''(x_l)\right)A_n+$$
$$+k_t^2\left(h_n(x_t)+x_t h_n{}'(x_t)+3h_n{}''(x_t)+x_t h_n{}'''(x_t)\right)B_n-$$
$$-\frac{\mu^{(1)}k_1^2}{\mu}\left(-b^{(1)}j_n(x_1)+j_n{}''(x_1)\right)C_n-\frac{\mu^{(1)}k_2^2}{\mu}\times$$
$$\times\left(j_n(x_2)+x_2 j_n{}'(x_2)+3j_n{}''(x_2)+x_2 j_n{}'''(x_2)\right)D_n=$$
$$=-\left(\left(k_l^2-\frac{i\rho_0\omega}{2\mu}\right)j_n(x_l)+k_l^2 j_n{}''(x_l)\right). \qquad (35)$$

Здесь $\frac{\sigma}{(1-2\sigma)}=\frac{\lambda^{(1)}}{2\mu^{(1)}}=b^{(1)}$.

Далее найдем четвертое уравнение системы из условия (28). Напряжение $\sigma_{r\theta}$ (32) переписываем в парциальном виде, учитывая равенство $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_n(\cos\theta)=P_n^1(\cos\theta)$:

$$\frac{2\mu}{a^2}\left(\left(x_l j_n{}'(x_l)-j_n(x_l)\right)+\left(x_l h_n{}'(x_l)-h_n(x_l)\right)A_n\right)+$$
$$+\frac{2\mu}{a^2}\left(x_t^2 h_n{}''(x_t)+x_t h_n{}'(x_t)+\left(\frac{1}{2}x_t^2-1\right)h_n(x_t)\right)B_n.$$

Напряжение $\sigma_{r\theta}^{(1)}$ с учетом принятых здесь обозначений получается из выражения (2.45') работы [23]:

$$\frac{2\mu^{(1)}}{a^2}\left(\left(x_1 j_n{}'(x_1)-j_n(x_1)\right)C_n\right)+$$
$$+\frac{2\mu^{(1)}}{a^2}\left(x_2^2 j_n{}''(x_2)+x_2 j_n{}'(x_2)+\left(\frac{1}{2}x_2^2-1\right)j_n(x_2)\right)D_n.$$

Два последних выражения с помощью уравнения для сферических функций Бесселя $R_n(kr)$

$$\left[r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2r\frac{\partial}{\partial r}+\left(k^2r^2-n(n+1)\right)\right]R_n(kr)=0$$

приводятся соответственно к виду

$$\frac{2\mu}{a^2}\left(2\left(x_l j_n{}'(x_l)-j_n(x_l)\right)+2\left(x_l h_n{}'(x_l)-h_n(x_l)\right)A_n\right)+$$
$$+\frac{2\mu}{a^2}\left(x_t^2 h_n{}''(x_t)+(n^2+n-2)h_n(x_t)\right)B_n,$$

$$\frac{2\mu^{(1)}}{a^2}\left(2\left(x_1 j_n{}'(x_1)-j_n(x_1)\right)C_n\right)+$$
$$+\frac{2\mu^{(1)}}{a^2}\left(x_2^2 j_n{}''(x_2)+(n^2+n-2)j_n(x_2)\right)D_n.$$

Условие (28) в парциальном виде запишется следующим образом:

$$2\left(x_l h_n{}'(x_l)-h_n(x_l)\right)A_n+$$
$$+\left(x_t{}^2 h_n{}''(x_t)+(n^2+n-2)h_n(x_t)\right)B_n-$$
$$-\frac{\mu^{(1)}}{\mu}2\left(x_1 j_n{}'(x_1)-j_n(x_1)\right)C_n-$$
$$-\frac{\mu^{(1)}}{\mu}\left(x_2{}^2 j_n{}''(x_2)+(n^2+n-2)j_n(x_2)\right)D_n=$$
$$=-2\left(x_l j_n{}'(x_l)-j_n(x_l)\right). \qquad (36)$$

Окончательно запишем систему (33)–(36) в виде

$$\left(a_{ij}\right)_n\left(G_j\right)_n=\left(F_i\right)_n,\ \ i,j=\overline{1,4}. \qquad (37)$$

Здесь

$$\left(G_j\right)_n=\begin{pmatrix}A_n\\ B_n\\ C_n\\ D_n\end{pmatrix},$$

$$\left(F_i\right)_n=\begin{pmatrix}-x_l j_n{}'(x_l)\\ -j_n(x_l)\\ -\left(\left(k_l{}^2-\dfrac{i\rho_0\omega}{2\mu}\right)j_n(x_l)+k_l{}^2 j_n{}''(x_l)\right)\\ -2\left(x_l j_n{}'(x_l)-j_n(x_l)\right)\end{pmatrix}$$

— вектор-столбцы искомого вектора и правой части системы.

Для элементов матрицы $\left(a_{ij}\right)_n$ имеем:

$$a_{11}=x_l h_n{}'(x_l),\quad a_{21}=h_n(x_l),$$
$$a_{31}=\left(k_l{}^2-\frac{i\rho_0\omega}{2\mu}\right)h_n(x_l)+k_l{}^2 h_n{}''(x_l),$$
$$a_{41}=2\left(x_l h_n{}'(x_l)-h_n(x_l)\right),\quad a_{12}=n(n+1)h_n(x_t),$$
$$a_{22}=\left(h_n(x_t)+x_t h_n{}'(x_t)\right),$$
$$a_{32}=k_t{}^2\left(h_n(x_t)+x_t h_n{}'(x_t)+3h_n{}''(x_t)+x_t h_n{}'''(x_t)\right),$$
$$a_{42}=x_t{}^2 h_n{}''(x_t)+(n^2+n-2)h_n(x_t),$$
$$a_{13}=i\omega x_1 j_n{}'(x_1),\quad a_{23}=i\omega j_n(x_1),$$
$$a_{33}=-\frac{\mu^{(1)}k_1{}^2}{\mu}\left(-b^{(1)}j_n(x_1)+j_n{}''(x_1)\right),$$
$$a_{43}=-\frac{\mu^{(1)}}{\mu}2\left(x_1 j_n{}'(x_1)-j_n(x_1)\right),$$
$$a_{14}=i\omega n(n+1)j_n(x_2),\quad a_{24}=i\omega\left(j_n(x_2)+x_2 j_n{}'(x_2)\right),$$
$$a_{34}=-\frac{\mu^{(1)}k_2{}^2}{\mu}\times$$
$$\times\left(j_n(x_2)+x_2 j_n{}'(x_2)+3j_n{}''(x_2)+x_2 j_n{}'''(x_2)\right),$$
$$a_{44}=-\frac{\mu^{(1)}}{\mu}\left(x_2{}^2 j_n{}''(x_2)+(n^2+n-2)j_n(x_2)\right).$$

Для определения амплитуды рассеяния (24) необходимо отыскание лишь постоянных A_n, $n=0,1,2,...$ К сожалению, в описываемом четырехмерном случае в отличие от трехмерного, описанного в [9], не удалось получить компактное выражение для постоянных A_n. Однако не представляет проблем получение численных решений (37) для получения A_n в функции от волнового параметра $x_l=k_l a$.

ВЫВОДЫ

Таким образом, на основе линеаризации системы уравнений Навье—Стокса без учета тепловых эффектов получена СЛАУ четвертого порядка, позволяющая в конечном итоге вычислять амплитуду рассеяния однородного упругого шарика в вязкой жидкости в линейном приближении с произвольной точностью (до мультиполей произвольного порядка). Это в свою очередь позволит применить процедуру вычисления радиационного давления через амплитуду рассеяния в линейном приближении, разработанную ранее для идеальных жидкостей, и в случае слабовязких жидкостей. Описанная процедура получения амплитуды рассеяния в линейном приближении является универсальной и не зависит от величины вязкости жидкости.

Для символьных вычислений в работе использовался пакет Mathematica-8, лицензия L3259-7547.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Как известно, определяющие уравнения, связывающие тензор напряжения с тензором скорости деформации для вязкой изотропной жидкости и с тензором деформации для изотропного упругого тела, весьма похожи. Для жидкости при небольших скоростях деформации имеем (см., например, [13, с. 199], [18, с. 350]):

$$\sigma_{ij}=\left(-p+\lambda\nabla\cdot\mathbf{v}\right)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij},$$
$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \qquad (\text{П}1)$$

Для упругого тела имеем (см., например, [18, с. 347], [25, с. 48]):

$$\sigma_{ij}{}^{(1)} = \lambda^{(1)}\nabla\cdot\mathbf{u}^{(1)}\delta_{ij} + 2\mu^{(1)}\varepsilon_{ij}{}^{(1)},$$
$$\varepsilon_{ij}{}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i{}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j{}^{(1)}}{\partial x_i}\right).$$

Здесь σ_{ij}, $\sigma_{ij}{}^{(1)}$ — тензоры напряжений; ε_{ij} — тензор скоростей деформаций в жидкости и $\varepsilon_{ij}{}^{(1)}$ — тензор деформации в упругом теле (индекс $^{(1)}$ относится к упругой среде); δ_{ij} — единичный тензор (дельта-символ Кронекера); v_i и $u_i^{(1)}$ — соответствующие компоненты вектора скорости и смещения в декартовой системе координат, $i=\overline{1,3}$. Учитывая известные выражения для тензора деформации упругого тела $\varepsilon^{(1)}$ в сферических координатах [18, с. 367] и его абсолютную схожесть с тензором скорости деформации ε с точностью до буквенных обозначений, можно для него воспользоваться теми же выражениями, поменяв $u^{(1)}$ на v. Поэтому имеем для компонент тензора скоростей деформации, необходимых для решения проблемы в случае осевой симметрии:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial}{\partial r}v_r, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_\theta + v_r\right),$$
$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}\left(v_\theta \operatorname{ctg}\theta + v_r\right),$$
$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}v_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r - v_\theta\right)\right).$$

Для нужных компонент тензора напряжений имеем из (П1):

$$\sigma_r = -p + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda\left(\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi\right),$$
$$\sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta}.$$

Подставляя соответствующие выражения для компонент тензора скоростей деформации, имеем для компонент напряжения:

$$\sigma_r = -p + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}v_r + $$
$$+\lambda\frac{1}{r}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_\theta + v_r\right) + \left(v_\theta\operatorname{ctg}\theta + v_r\right)\right), \qquad (П2)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial}{\partial r}v_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_r - v_\theta\right)\right). \qquad (П3)$$

Выразим все величины через скалярные потенциалы. Из (17) получаем

$$v_r = \frac{\partial}{\partial r}\Phi - \frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_2.$$

Учитывая, что лапласиан в случае осевой симметрии равен

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta},$$

а также тождество $\left(\Delta + k_t{}^2\right)\psi_2 = 0$, последнее выражение переписываем в виде (29). Для v_θ имеем (30). Для нормального напряжения (П2) воспользуемся связью давления с потенциалом (12) и тем, что $\Delta\Phi = -k_l{}^2\Phi$; получаем (31). Для касательного напряжения $\sigma_{r\theta}$ — (32).

Далее приведем необходимые выражения для упругого шарика [9, 23]

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}\Phi^{(1)} - \frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_2{}^{(1)}\right), \qquad (П4)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi^{(1)} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_2{}^{(1)}\right), \qquad (П5)$$

$$\sigma_r{}^{(1)} = 2\mu^{(1)}\left[\left(-b^{(1)}k_1{}^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi^{(1)} + \right.$$
$$\left. +\left(k_2{}^2 + k_2{}^2 r\frac{\partial}{\partial r} + 3\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial^3}{\partial r^3}\right)\psi_2{}^{(1)}\right], \qquad (П6)$$

$$\sigma^{(1)}{}_{r\theta} = 2\mu^{(1)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\Phi^{(1)} + \right.$$
$$\left. +\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}k_2{}^2\right)\psi^{(1)}{}_2\right]. \qquad (П7)$$

Здесь $b^{(1)} = \dfrac{\lambda^{(1)}}{2\mu^{(1)}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарфарец Б.П., Князьков Н.Н., Курочкин В.Е.* Радиационное давление на сферу с потерями в квазистоячей плоской волне // Акуст. журн. 2012. Т. 58, № 2. С. 179–183.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
3. *Данилов С.Д., Миронов М.А.* О силе радиационного давления, действующей на малую частицу в звуковом поле // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 4. С. 467–473.
4. *Settnes M., Bruus* H. Forces acting on a small particle in an acoustical field in a viscous fluid // Phys. Rev. E. 2012. V. 85, N 1. 016327 (12 pages).
5. *Горьков Л.П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // ДАН СССР. 1961. Т. 140, № 1. С. 88–91.
6. *Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* Связь радиационно-

го давления с амплитудой рассеяния сложных включений в идеальной жидкости // ДАН. 2008. Т. 419, № 3. С. 324–327.
7. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н.* Радиационное давление на включение с заданной амплитудой рассеяния в произвольном внешнем поле // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 2. С. 147–152.
8. *Шарфарец Б.П.* Радиационное давление при рассеянии произвольного поля на включении сложной формы // Акуст. журн. 2010. Т. 56, № 6. С. 767–772.
9. *Шарфарец Б.П.* К вопросу о вычислении амплитуды рассеяния на радиально-симметричных упругих включениях в идеальной жидкости // Научное приборостроение. 2012. Т. 22, № 2. С. 82–89.
10. *Буланов В.А., Бьорно Л.* Рассеяние звука сферой с учетом поглощения энергии // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 2. С. 252–259.
11. *Gaunaurd G.* Sonar cross section of a coated hollow cylinder in water // J. Acoust. Soc. Am. 1977. V. 61, N 2. P. 360–368.
12. *Gaunaurd G., Überall H.* Theory of resonant scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63, N 6. P. 1699–1712.
13. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Иностр. литература, 1963. 256 с.
14. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
15. Акустика в задачах / Под ред. С.Н. Гурбатова и О.В. Руденко. М.: Наука, 1996. 336 с.
16. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
17. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости (обзор). I // Прикл. механика. 2000. Т. 36, № 1. С. 25–52.
18. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 468 с.
19. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
20. *Гузь А.Н., Жук А.П.* О силах, действующих на сферическую частицу в звуковом поле в вязкой жидкости // ДАН СССР. 1984. Т. 274, № 6. С. 1313–1316.
21. *Гузь А.Н.* Задачи гидроупругости для вязкой сжимаемой жидкости в сферических координатах // Прикл. механика. 1980. Т. 16, № 11. С. 3–10.
22. *Гузь А.Н.* Динамика твердых тел в сжимаемой вязкой жидкости (покоящаяся жидкость) // Прикл. механика. 1981. Т. 17, № 3. С. 3–22.
23. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 308 с.
24. *Гузь А.Н., Головчан В.Д.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 255 с.
25. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 336 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 19.03.2012.

SCATTERING AMPLITUDE OF THE ELASTIC BALL IN A VISCOUS ISOTROPIC FLUID

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg

On the basis of linearization of the combined Navier—Stokes equations without consideration of thermal effects, SLE of the fourth order, allowing finally to calculate a scattering amplitude of homogeneous elastic ball in a viscous fluid in the linear approach with arbitrary accuracy (to multipoles of arbitrary order) was obtained. In turn this will allow to apply further the procedure of evaluation of radiation pressure through a scattering amplitude in the linear approach, developed earlier to perfect fluids, and in case of weakly viscous fluids. The described procedure for obtaining scattering amplitude in the linear approach is universal and does not depend on the level of fluid viscosity.

Keywords: viscous liquid, elastic ball, scattering amplitude