ISSN 0868–5886 *НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2012, том 22, № 2, с. 82–89*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 534.213

© Б. П. Шарфарец

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ НА РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЯХ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена задача расчета поля рассеяния на однородном, радиально-слоистом и непрерывно радиально-неоднородном упругом шарике. В каждом случае векторное уравнение упругих колебаний решается с помощью сведения последнего к независимым скалярным уравнениям для скалярных потенциалов. В силу малой практической пригодности такого подхода в случае непрерывной радиальной неоднородности шарика предложено использовать ее аппроксимацию радиальной кусочно-постоянной неоднородностью, что позволит достаточно просто решать задачу для общего характера радиальной неоднородности упругих параметров шарика.

Кл. сл.: амплитуда рассеяния, упругий шарик, идеальная жидкость, тензор напряжений, смещение

ВВЕДЕНИЕ

В терминах амплитуд рассеяния включений решается широкий круг задач, в том числе и задачи расчета радиационного давления в различных первичных полях [1–3]. Библиография, посвященная тематике рассеяния на различных включениях, обширна (см., например, обзор в работе [4]).

Наиболее популярным видом неоднородностей в задачах вычисления радиационного давления являются однородные жидкие и упругие шарообразные включения. Несмотря на это, в большом количестве работ, посвященных, например, упругому однородному шарообразному включению, отсутствует подробное решение и единообразие в представлении конечных результатов, часто они количественно отличаются, что приводит к неопределенности. Анализу этих публикаций на предмет степени их совпадения будет посвящена другая работа, а в настоящей работе сначала предполагается подробный разбор решения задачи рассеяния на упругом однородном шарике, а затем с помощью примененного в этом разборе аппарата — решение такой задачи также в кусочно-слоистом радиально-симметричном и непрерывно радиально-неоднородном шариках.

ОДНОРОДНЫЙ УПРУГИЙ ШАРИК

Линейное уравнение движения в векторной форме для идеально упругого однородного изотропного тела при отсутствии объемных сил имеет вид [5–7]

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0. \qquad (1)$$

Если вектор перемещений $\mathbf{u}$ представить в виде суммы продольной $\mathbf{u}_l$ (потенциальное поле) и сдвиговой $\mathbf{u}_t$ (соленоидальное поле) составляющих

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t;$$
$$\mathbf{u}_l = \nabla\Phi; \quad \mathbf{u}_t = \nabla\times\mathbf{\Psi}; \quad \nabla\mathbf{\Psi} = 0,$$

то уравнение (1) распадается на два волновых уравнения — скалярное и векторное:

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_1^{\,2}}\ddot{\Phi} = 0; \quad \Delta\mathbf{\Psi} - \frac{1}{c_2^{\,2}}\ddot{\mathbf{\Psi}} = 0. \qquad (2)$$

Для гармонических колебаний $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{-i\omega t}$ волновые уравнения (2) сводятся к скалярному и векторному уравнениям Гельмгольца соответственно:

$$\Delta\Phi + k_1^{\,2}\Phi = 0; \quad \Delta\mathbf{\Psi} + k_2^{\,2}\mathbf{\Psi} = 0. \qquad (3)$$

В (3) под Φ и $\mathbf{\Psi}$ уже понимаются амплитуды соответствующих колебаний.

Выше приняты обозначения: $c_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ — скорости, а k_1, k_2 — волновые числа продольных и поперечных волн соответственно; λ, μ — постоянные Ламе; Φ и $\mathbf{\Psi}$ — соответственно скалярный и векторный потенциалы векторного поля $\mathbf{u}$ ($\mathbf{U}$). Векторное поле $\mathbf{\Psi}$ допускает разложение на три векторных поля [7, т. 2]:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{L} + \mathbf{M} + \mathbf{N}. \quad (4)$$

В этом представлении $\mathbf{L}$ — продольная часть вектора $\mathbf{\Psi}$: $\mathbf{L} = \nabla \psi_0$, которая не имеет физического смысла и при вычислении вектора $\mathbf{U}_t$ дает нуль. Два оставшихся вектора $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ в сферических координатах допускают разложение [6–9]

$$\mathbf{M} = \mathrm{rot}(\mathbf{r}\psi_2), \ \mathbf{N} = \mathrm{rotrot}\left(\mathbf{r}\psi_1\right). \quad (5)$$

А если учесть только составляющие этих векторов, ротор которых отличен от нуля, то

$$\mathbf{M} = \mathrm{rot}(\mathbf{r}\psi_2), \ \mathbf{N} = \mathbf{r}\psi_1. \quad (5а)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — вектор в сферической системе координат: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 r$, где $\mathbf{r}_0$ — единичный орт; $r = |\mathbf{r}|$. Для потенциалов Φ и ψ_i, $i = 1,2$ справедливо уравнение Гельмгольца в сферической системе координат

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi + k_1^2\Phi = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi_i\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_i\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi_i + k_2^2\psi_i = 0, \quad (7)$$

$i = 1,2.$

Частные однозначные решения последних уравнений Гельмгольца имеют вид

$$\begin{pmatrix}\Phi\\ \psi\end{pmatrix}(r,\theta,\varphi) = d_n(k_i r)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}; \quad i = 1,2;$$

$n = 0,1,2,\ldots$; $m = -n,\ldots,n$,

где $d_n(k_i r)$ — одна из сферических функций Бесселя $j_n(k_i r)$, Неймана $n_n(k_i r)$ или Ханкеля $h_n^{(1)\,(2)}(k_i r)$; $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра.

Общее решение уравнений (6), (7) определяется так:

$$\begin{pmatrix}\Phi\\ \psi\end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\begin{pmatrix}A_{nm}\\ B_{nm}\end{pmatrix} d_n(k_i r)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}. \quad (8)$$

В случае осевой симметрии, когда функции Φ и ψ_i, $i = 1,2$, не зависят от угла азимута, в (6), (7) исчезает член, содержащий оператор $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix}\Phi\\ \psi_i\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix}\Phi\\ \psi_i\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}k_1^2\\ k_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi\\ \psi_i\end{pmatrix} = 0, \quad (9)$$

а общее решение (8) преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix}\Phi\\ \psi_i\end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}A_n\\ B_{ni}\end{pmatrix} d_n(k_{1,2}r)P_n(\cos\theta). \quad (8а)$$

Здесь $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра.

Таким образом, в стационарном случае вектор смещения точек упругого тела в сферических координатах выражается через три скалярные функции следующим образом:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_l + \mathbf{U}_t = \mathrm{grad}\Phi + \mathrm{rot}(\mathbf{M} + \mathbf{N}), \quad (10)$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ выражаются из (5а) через скалярные функции ψ_1 и ψ_2, удовлетворяющие уравнению (7). Скалярный потенциал Φ удовлетворяет уравнению (6). С учетом (5) окончательно можно записать [6, 9]:

$$\mathbf{U} = \mathrm{grad}\Phi + \mathrm{rotrot}(\mathbf{r}\psi_2) + \mathrm{rot}(\mathbf{r}\psi_1). \quad (11)$$

Пусть составляющие вектора смещения в сферической системе координат равны $\mathbf{U} = (U_r, U_\theta, U_\varphi)$. Для дальнейших рассуждений необходимо выписать компоненту U_φ вектора смещения через скалярные потенциалы [6, 9]:

$$U_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi_2\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\psi_1. \quad (12)$$

Для случая осевой симметрии, когда отсутствует компонента смещения $U_\varphi = 0$ (тело не подвергается кручению), очевидно, что $\Phi = \Phi(r,\theta)$, $\psi_{1,2} = \psi_{1,2}(r,\theta)$, и из (12) видно, что либо $\psi_1 = 0$, либо $\psi_1 = \psi_1(r)$. В последнем случае $\psi_1(r)$ удовлетворяет уравнению (см. уравнение (9))

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi_1\right) + k_2^2\psi_1 = 0,$$

решением которого являются функции $\frac{e^{\pm ik_2 r}}{r}$ (уходящие и приходящие сферические волны). Последние решения не годятся, т. к. они неограничены при $r = 0$. Остается решение $\psi_1 = 0$. Решение (11) с учетом этого перепишется в виде

$$\mathbf{U} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}\psi_2), \tag{13}$$

В случае, когда упругий шарик находится в идеальной жидкости, граничные условия на поверхности упругого шара таковы [10, 11]:

– радиальная компонента смещения в жидкости $u_{ir} + u_{sr}$ и в упругом теле U_r на поверхности шара равны

$$u_{ir} + u_{sr}\big|_{r=a} = U_r\big|_{r=a}; \tag{14}$$

– суммарное давление падающей p_i и рассеянной p_s волн в жидкости равны с обратным знаком нормальному напряжению σ_r на поверхности шара

$$p_i + p_s\big|_{r=a} = -\sigma_r; \tag{15}$$

– касательная компонента напряжения на поверхности рассеивателя в невязкой жидкости равна нулю (величина $\sigma_{r\varphi}$ тождественно равна нулю вследствие осевой симметрии задачи)

$$\sigma_{r\theta} = 0. \tag{16}$$

Выпишем нужные величины, выраженные через соответствующие отличные от нуля потенциалы. Поскольку выражения для σ_r не совпали в работах [6, с. 41] и [9, с. 111], то автором были самостоятельно выведены все нужные величины. Для этого использовалось выражение (13) для вектора смещения, а также следующие выражения для определения нужных напряжений. Согласно [12, с. 367], имеем

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi), \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta},$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{\partial}{\partial r}U_r, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}U_\theta + U_r\right),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}\left(U_\theta \operatorname{ctg}\theta + U_r\right),$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}U_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}U_r - U_\theta\right)\right);$$

ε — соответствующие компоненты тензора деформаций.

Окончательно нужные величины имеют вид:

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r}\Phi - \frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_2\right), \tag{17}$$

$$\sigma_r = 2\mu\left[\left(-bk_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi + \right.$$
$$\left. + \left(k_2^2 + k_2^2 r\frac{\partial}{\partial r} + 3\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial^3}{\partial r^3}\right)\psi_2\right], \tag{18}$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\Phi + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}k_2^2\right)\psi_2\right], \tag{19}$$

что показало полное совпадение с результатами работы [6, с. 41]. Здесь $b = \dfrac{\lambda}{2\mu} = \dfrac{\sigma}{(1-2\sigma)}$; σ — коэффициент Пуассона материала шарика, который выражается через скорости продольных и сдвиговых волн следующим образом [13]:

$$\sigma = \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{2\left(c_1^2 - c_2^2\right)}.$$

Запишем известные выражения для падающего и рассеянного шариком полей в жидкой среде с плотностью ρ и скоростью звука c. Так, выражение для плоской волны единичной амплитуды и нулевой фазы, распространяющейся вдоль положительного направления оси Oz, при временно́м факторе $e^{-i\omega t}$ имеет вид [7]

$$p_i = e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta). \tag{20}$$

Выражение для поля рассеянной волны при падении волны (20) на рассеиватель с центром в начале координат имеет вид [14, 15]

$$p_s = \sum_{l=0}^{\infty}T_l(2l+1)i^l h_l^1(kr)P_l(\cos\theta) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}(e^{2i\delta_l} - 1)(2l+1)i^l h_l^1(kr)P_l(\cos\theta). \tag{21}$$

Здесь $(e^{2i\delta_l} - 1) = 2T_l = \alpha_l$; α_l, δ_l, T_l — некоторые коэффициенты, зависящие от волнового параметра $x = ka$; a — радиус сферы; $k = \omega / c$. В дальнейшем будем искать коэффициенты T_l.

Скалярный и векторный потенциалы представим формулами

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty}A_l(2l+1)i^l j_l(k_1 r)P_l(\cos\theta), \tag{22}$$

$$\psi_2 = \sum_{l=0}^{\infty}B_l(2l+1)i^l j_l(k_2 r)P_l(\cos\theta), \tag{23}$$

вид которых обусловлен осевой симметрией и конечностью потенциалов в начале координат.

Выражение для амплитуды рассеяния получается из (21) подстановкой асимптотики функции Ханкеля $h_l^1(z) \sim \frac{1}{z} i^{-l-1} e^{iz}$ при $z \to \infty$ и вычленением множителя $\frac{e^{ikr}}{r}$. Имеем окончательно [16]:

$$f(\theta,x) = \frac{1}{ik}\sum_{l=0}^{\infty} T_l(x)(2l+1)P_l(\cos\theta) =$$
$$= \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l(x)(2l+1)P_l(\cos\theta) =$$
$$= \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty} (e^{2i\delta_l(x)} - 1)(2l+1)P_l(\cos\theta). \qquad (24)$$

Отметим, что в случае наличия множителя p_0 в падающей волне, все остальные характеристики поля в силу линейности задачи также приобретут этот постоянный мультипликативный коэффициент.

Выпишем условия на границе (14)–(16) для парциальных коэффициентов разложений (20)–(23). Условие (14) в парциальном виде с учетом выражения (17) и дифференциального уравнения Лежандра

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P_l(\cos\theta)\right) + l(l+1)P_l(\cos\theta) = 0$$

можно переписать в виде

$$A_l \frac{\partial}{\partial r} j_l(k_1 r)\Big|_{r=a} + \frac{1}{r} B_l l(l+1) j_l(k_2 r)\Big|_{r=a} =$$
$$= \frac{1}{\rho\omega^2}\frac{\partial}{\partial r}(T_l h_l(kr) + j_l(kr))\Big|_{r=a}.$$

Здесь справа стоит парциальное радиальное смещение жидкости. Или окончательно из равенства смещений имеем

$$A_l x_1 j_l{}'(x_1) + B_l l(l+1) j_l(x_2) - \frac{x}{\rho\omega^2} T_l h_l{}'(x) =$$
$$= \frac{x}{\rho\omega^2} j_l{}'(x). \qquad (25)$$

Здесь и далее $x_i = k_i a$, $i = 1,2$. Для условия равенства на границе нормальных напряжений (15) имеем

$$2\rho_1 c_2^2 \Bigg[A_l k_1^2 \left(-\frac{\sigma}{(1-2\sigma)} j_l(x_1) + j_l{}''(x_1) \right) +$$
$$+ B_l k_2^2 \left(j_l(x_2) + x_2 j_l{}'(x_2) + 3 j_l{}''(x_2) + x_2 j_l{}'''(x_2) \right) \Bigg] +$$
$$+ T_l h_l^1(x) = -j_l(x). \qquad (26)$$

При обработке условия (16) учтем в касательном напряжении $\sigma_{r\theta}$ (19) следующее равенство [17]:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} P_l(\cos\theta) = P_l^1(\cos\theta).$$

Тогда, учитывая последнее равенство и ортогональность системы функций $P_l^1(\cos\theta)$, $l = 1,2,...$ на интервале $[0,\pi]$ с весом $\sin\theta$, имеем для парциальных коэффициентов равенство

$$r^2 \Bigg[\frac{1}{r} A_l \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) j_l(k_1 r) +$$
$$+ B_l \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}k_2^2 \right) j_l(k_2 r) \Bigg]\Bigg|_{r=a} = 0.$$

Или окончательно:

$$2\left(x_1 j_l{}'(x_1) - j_l(x_1)\right) A_l +$$
$$+ \left(x_2^2 j_l{}''(x_2) + (l^2 + l - 2) j_l(x_2)\right) B_l = 0. \qquad (27)$$

В последнем случае для приведения выражения к укороченному виду использовалось уравнение для сферических функций

$$\left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial}{\partial r} + \left(k_2^2 r^2 - l(l+1)\right) \right] j_l(k_2 r) = 0.$$

Таким образом, получена система трех уравнений (25)–(27) для определения бесконечной цепочки из трех неизвестных $\left(A_l, B_l, T_l\right)$, $l = 0,1,2,...$

Выпишем ее в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 j_l'(x_1) & l(l+1)j_l(x_2) & -\frac{x}{\rho\omega^2}h_l^1{}'(x) \\ 2\rho_1 c_2^2 k_1^2\left(-\frac{\sigma}{(1-2\sigma)}j_l(x_1)+j_l''(x_1)\right) & 2\rho_1 c_2^2 k_2^2\left(j_l(x_2)+x_2 j_l'(x_2)+3j_l''(x_2)+x_2 j_l'''(x_2)\right) & h_l^1(x) \\ 2\left(x_1 j_l'(x_1)-j_l(x_1)\right) & \left(x_2^2 j_l''(x_2)+(l^2+l-2)j_l(x_2)\right) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_l \\ B_l \\ T_l \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{x}{\rho\omega^2}j_l'(x) \\ -j_l(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

В результате решения этой системы коэффициент T_l определяется так:

$$T_l=-\frac{F_l j_l(x)+xj_l'(x)}{F_l h_l^1(x)+xh_l^1{}'(x)}, \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} F_l=&\left[j_l'(x_1)x_1(-2j_l(x_1)j_l(x_2)l(l+1)+\right.\\ &\left.+j_l'(x_1)x_1(j_l(x_2)(2+l+l^2)-j_l''(x_2)x_2^2))\rho\omega^2\right]\times\\ &\times\left\{2c_2^2\rho_1\left(-k_1^2\left(2j_l(x_1)j_l(x_2)l(l+1)+\right.\right.\right.\\ &\left.+j_l'(x_1)x_1(-j_l(x_2)(2+l+l^2)+j_l''(x_2)x_2^2)\right)\times\\ &\times\left(j_l(x_1)\frac{\sigma}{-1+2\sigma}+j_l''(x_1)\right)+\\ &+2\left(-j_l(x_1)+j_l'(x_1)x_1\right)\left[j_l'(x_1)x_1k_2^2\left(j_l(x_2)+\right.\right.\\ &+3j_l''(x_2)+\left(j_l'(x_2)+j_l'''(x_2)x_2\right)-j_l(x_2)k_1^2l(1+l)\times\\ &\left.\left.\left.\times\left(j_l''(x_1)+\frac{j_l(x_1)\sigma}{-1+2\sigma}\right)\right)\right]\right\}^{-1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Замечания.

– Выражение (29) можно переписать в виде

$$T_l(x)=-\frac{j_l(x)+\frac{1}{F_l}xj_l'(x)}{h_l^1(x)+\frac{1}{F_l}xh_l^1{}'(x)},$$

и коэффициенты при производных уже с точностью до констант можно трактовать как импедансы, помноженные на парциальные колебательные скорости.

– Штрих в верхнем индексе функций означает дифференцирование по параметру x.

СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫЙ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ УПРУГИЙ ШАРИК

Речь идет о физической модели шарика, состоящего из плотно соприкасающихся друг с другом однородных упругих сферических оболочек различной толщины с различными упругими свойствами общим числом n. В центре общего шарика может находиться либо упругий, либо газообразный или жидкий шарик и имеет номер $m=1$. Радиус первого шарика a_1, радиус общего шарика a, толщина m-й оболочки H_m. Все упругие постоянные в каждом слое также имеют соответствующий номер. Эта задача является близкой рассмотренной выше, за исключением ряда нюансов, которые необходимо отметить.

На границе между упругими оболочками должны выполняться следующие краевые условия [11, 18]:

– разница нормальных и тангенциальных смещений вдоль орта θ (смещение вдоль орта φ равно нулю вследствие осевой симметрии задачи) на разных сторонах всех границ, а также разница нормальных напряжений и напряжений вида $r\theta$ равны нулю, а именно

$$\left[U_r\right]_m=0,\quad \left[U_\theta\right]_m=0,\quad \left[\sigma_{rr}\right]_m=0,\quad \left[\sigma_{r\theta}\right]_m=0,\quad m=\overline{1,n-1}; \tag{31}$$

– на границе общего шарика и идеальной окружающей жидкости выполняются условия (14)–(16). Аналогичные условия выполняются также и в случае, если в центре шарика находится идеальная жидкость.

Падающая волна по-прежнему определяется выражением (20), а рассеянная волна — выражением (21). Учитывая сохраняющуюся осевую симметрию задачи, можно утверждать, что скалярные Φ_m и векторные ψ_{2m} потенциалы (потенциалы ψ_{1m} в силу осевой симметрии равны нулю $\psi_{1m} \equiv 0$) определяются выражениями типа (22), (23), но только в слоях, за исключением первого, имеют несколько видоизмененный вид:

$$\Phi_m = \sum_{l=0}^{\infty} \left[(2l+1) i^l (A_{1ml} j_l(k_{1m} r) + A_{2ml} n_l(k_{1m} r)) P_l(\cos\theta) \right], \tag{32}$$

$$\psi_{2m} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[(2l+1) i^l (B_{1ml} j_l(k_{2m} r) + B_{2ml} n_l(k_{2m} r)) P_l(\cos\theta) \right], \tag{33}$$

$m = \overline{2, n}$.

В центральном шарике вследствие ограниченности поля для этих потенциалов сохраняются представления (22), (23). Далее с помощью соответствующих выражений для смещений и напряжений необходимо с помощью уравнений "сшить" все условия на границах, как это делалось в первой части статьи. Так как в слоях, кроме первого, число неопределенных коэффициентов удвоилось, задача решается введением условий на границах $\left[U_\theta\right]_m = 0$. Выпишем выражение для составляющей смещения U_θ в слое с постоянными упругими свойствами [6]:

$$U_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial\theta}\psi_2 \right).$$

Все остальные действия представляют собой рутинный повтор с учетом многослойности проделанных в первой части статьи действий.

РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫЙ УПРУГИЙ ШАРИК

Возможна ситуация, когда модули упругости и плотность материала включения являются кусочно-непрерывными функциями координат. Тогда упругие колебания включения описываются в рамках теории упругости неоднородных тел.

Уравнения теории упругости неоднородных тел рассмотрены в общем плане, например, в работах [19, 20], а применительно к радиально-неоднородной среде — в работе [21]. Согласно [19], обобщенный закон Гука, выражающий зависимость между тензорами напряжения и деформации, для неоднородных тел выполняется так же, как и для однородных тел; причем соотношения между напряжениями и деформациями будут отличаться от соответствующих соотношений для однородных тел лишь тем, что входящие в них модули упругости являются функциями координат. Кроме того, принимается предположение, что в областях непрерывности модулей упругости и плотности материала являются непрерывными и их первые две производные по координатам. Сохраняются также формулы Коши для однородного случая, связывающие тензор деформации с производными компонент вектора перемещений. Кроме того, сохраняется также зависимость между компонентами вектора перемещений и тензором напряжений такая же, как и в однородном случае.

Волновые процессы в неоднородной изотропной упругой среде с коэффициентами Ламе λ, μ и плотностью ρ описываются векторным уравнением [20]:

$$(\lambda + 2\mu)\mathrm{grad\,div}\mathbf{u} - \mu\mathrm{rot\,rot}\mathbf{u} + \mathrm{div}\mathbf{u}\ \mathrm{grad}\lambda + \mathrm{grad}\mu \times \mathrm{rot}\mathbf{u} + 2\mathrm{grad}\mu \cdot \mathrm{grad}\mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \tag{34}$$

Здесь под $\mathrm{grad}\mathbf{u}$ понимается тензор $\left(\mathrm{grad}\mathbf{u}\right)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. А для радиально-неоднородной среды (модули упругости и плотность являются функциями одной переменной: $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$, $\rho_1 = \rho_1(r)$) уравнение (34) преобразуется к виду [21]

$$(\lambda + 2\mu)\mathrm{grad}S - \mu\mathrm{rot\,rot}\mathbf{u} + \lambda' S\mathbf{r}_0 + \mu'(\mathbf{r}_0 \times \mathrm{rot}\mathbf{u} + 2\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \tag{35}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r; $S = \mathrm{div}\mathbf{u}$.

Обычно решение (35) пытаются, как и в однородном случае, искать, разделяя исходное векторное уравнение теории упругости (35) на независимые скалярные уравнения для обобщенных скалярных потенциалов. В работе [21] решение ищется в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_3, \tag{36}$$

где

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{f_1(r)}\operatorname{grad}(f_1\phi_1),$$
$$\mathbf{U}_2 = \frac{1}{f_2(r)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(r\mathbf{r}_0 f_2\phi_2), \qquad (37)$$
$$\mathbf{U}_3 = \operatorname{rot}(r\mathbf{r}_0\phi_3).$$

В работе [22] векторы (37) ищутся несколько иначе:

$$\mathbf{U}_1 = \psi_1(r)\operatorname{grad}(\Phi_1(r,\theta)),$$
$$\mathbf{U}_2 = \psi_2(r)\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}_0\Phi_2(r,\theta)), \qquad (38)$$
$$\mathbf{U}_3 = \operatorname{rot}(\mathbf{r}_0\Phi_3(r,\theta)).$$

Здесь $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$ соответствуют векторам смещения продольных ($\mathbf{U}_1$) и сдвиговых волн ($\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$); f_1, f_2, ψ_1, ψ_2 — скалярные функции от r; ϕ_i, Φ_i, $i = 1,2,3$ — некие скалярные потенциалы.

Как показано в [22], представления (37) и (11), (13) для однородного случая являются частными случаями представления (38). Однако для получения независимых скалярных уравнений для потенциалов ϕ_i, Φ_i, $i = 1,2,3$ в неоднородном случае в отличие от однородного, где они изначально являются независимыми, необходимо чтобы поведение функций $\psi_i(r)$, $i = 1,2$, $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$, $\rho_1 = \rho_1(r)$ удовлетворяло некоторым дополнительным условиям. В [22, 23] показаны примеры случаев, когда такое разделение возможно. Приведем один из них:

$$\rho_1 = \rho_{10}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-4},\ \mu = \mu_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2},\ \lambda = \mu(\gamma - 2),$$
$$\gamma(r) = \frac{c_1^2(r)}{c_2^2(r)},\ \psi_1 = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{4},\ \psi_2 = 1,\ \psi_1 = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{4}.$$

Здесь r_0 — некоторое фиксированное значение координаты r; ρ_0, μ_0 — значения соответствующих величин при $r = r_0$.

Отметим, что рассмотренный здесь способ решения задачи упругости сведением ее к независимым скалярным уравнениям для обобщенных потенциалов в радиально-неоднородном случае является достаточно трудоемким и пригодным лишь для избранных распределений параметров $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$, $\rho_1 = \rho_1(r)$. Уместнее, по всей вероятности, применять либо общие методы скалярного и векторного потенциалов, также трудоемкие, либо аппроксимировать задачу кусочно-слоистой моделью, описанной выше.

ВЫВОДЫ

В статье последовательно рассмотрена задача расчета поля рассеяния на однородном, радиально-слоистом и непрерывно радиально-неоднородном упругом шарике. В каждом случае векторное уравнение упругих колебаний решалось с помощью сведения последнего к независимым скалярным уравнениям для обобщенных скалярных потенциалов. В силу малой практической пригодности такого подхода в случае непрерывной радиальной неоднородности шарика предложено использовать ее аппроксимацию радиальной кусочно-постоянной неоднородностью, что позволит достаточно просто решать задачу для произвольной радиальной неоднородности упругих параметров шарика.

Для вычислений в работе использовался пакет Mathematica-8 (лицензия L3259-7547).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* Связь радиационного давления с амплитудой рассеяния сложных включений в идеальной жидкости // ДАН. 2008. Т. 419, № 3. С. 324–327.
2. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н.* Радиационное давление в произвольном падающем поле. Связь с амплитудой рассеяния включения // ДАН. 2008. Т. 421, № 2. С. 186–189.
3. *Князьков Н.Н., Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* Радиационное давление на сферу в смешанном поле бегущей и стоячей плоских волн // ДАН. 2009. Т. 424, № 6. С. 751–754.
4. *Hackman R.* Acoustic scattering from elastic solids // Physical Acoustics. Underwater Scattering and Radiation. Volume XXII. N.Y.: Academic Press, 1993. P. 1–194.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
6. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наук. Думка, 1978. 308 с.
7. *Морс Ф.М. Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит-ры. Т. 1, 2. 1958, 1960. 930+886 с.
8. *Стрэттон Дж.Ф.* Теория электромагнетизма. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. 539 с.
9. *Гузь А.Н., Головчан В.Д.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 255 с.
10. *Faran J.J.* Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Am. 1951. V. 23, N 4. P. 405–418.
11. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
12. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 468 с.
13. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.

14. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике, т. 1. М.: Мир, 1974. 341 с.
15. *Шарфарец Б.П.* К вопросу о вычислении радиационного давления на сферических включениях // Научное приборостроение. 2008. Т. 18, № 3. С. 80–85.
16. *Flax L., Gaunaurd G., Uberall H.* Theory of resonance scattering // Physical Acoustics. Principles and Methods. Volume XV. N.Y.: Academic Press, 1985. P. 191–294.
17. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
18. *Pao Y.-H., Mow C.C.* Scattering of plane waves by a spherical obstacle // Journal of Applied Physics. 1963. V. 34, N 3. P. 493–499.
19. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.
20. *Karal F.S., Keller J.B.* Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media // J. Acoust. Soc. Am. 1959. V. 31, N 6. P. 694–705.
21. *Saugh S.J., Ben-Menahem A.B.* Decoupling of the vector wave equation of elasticity for radially heterogeneous media // J. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 46, N 3b. P. 665–660.
22. *Саакян С.Г.* Независимые скалярные уравнения движения некоторых радиально-неоднородных изотропных упругих сред // Докл. АН Арм. ССР. Механика. 1987. Т. 85, № 4. С. 152–156.
23. *Саакян С.Г.* Распространение волн в радиально-неоднородном упругом шаре // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990. Т. 43, № 1. С. 36–43.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 7.12.2011.

TO THE PROBLEM OF SCATTERING AMPLITUDE EVALUATION ON RADIALLY-SYMMETRIC ELASTIC INSERTS IN PERFECT FLUID

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg

The problem of calculation of a leakage field on the homogeneous, radially-layered and continuously radially-non-uniform elastic ball is discussed. In each case the vector equation of elastic oscillations is solved by means of reducing the last to the independent scalar equations for scalar potentials. Due to insignificant practical suitability of such approach in case of the continuous radial heterogeneity of a ball it is offered to use its approximation by radial piecewise constant heterogeneity that will allow to solve rather simply the problem for the general character of radial heterogeneity of ball elastic parameters.

Keywords: scattering amplitude, elastic ball, perfect liquid, tensor of tension, displacement