ISSN 0868–5886 *НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2012, том 22, № 1, с. 55–67*

ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 681.519

© Е. Ю. Бутырский

ФИЛЬТРАЦИЯ-ОБНАРУЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫ́Х СИГНАЛОВ

В статье рассматривается обобщенный алгоритм пространственно-временно́й фильтрации сигналов, основанный на методах теории нелинейной фильтрации. Синтез алгоритмов проводится с учетом теоретико-групповых преобразований сигнала во временно́й области. Предложен метод согласования симметрии сигнала и средств обработки.

Кл. сл.: функция, аппроксимация, динамическая система, сигнал, процесс, алгоритм, матрица, представления, симметрия, фильтрация

ВВЕДЕНИЕ

Совокупность операций, осуществляемая над наблюдаемыми значениями поля на апертуре приемной антенны и над сигналами на выходе антенны, принято называть пространственно-временно́й обработкой сигналов. Структура трактов пространственно-временно́й обработки (ПВО) зависит от многих факторов: целевого предназначения, условий функционирования, круга решаемых задач, элементной базой технических средств и т. д. В связи с этим техническое воплощение различных средств пространственно-временно́й обработки сигналов может значительно различаться между собой. Однако теорию ПВО интересует не техническое решение тех или иных задач, а формальное математическое описание выполняемых операций в виде некоторых функционалов относительно наблюдаемых данных. Выбор оптимальной в соответствии с выбранным критерием структуры этих функционалов и составляет основное содержание теории ПВО. В классических работах [1, 7–9] по теории проверки статистических гипотез показано, что оптимальный по критерию Неймана—Пирсона алгоритм обработки пространственно-временны́х сигналов вытекает из функционала отношения правдоподобия (ФОП). Несмотря на фундаментальность этого результата, его практическое применение наталкивается на ряд проблем, связанных в первую очередь с тем, что вычисление ФОП требует полного вероятностного описания полей, воздействующих на приемную антенну. Между тем в реальных условиях информация о помехосигнальной обстановке носит, как правило, ограниченный характер и содержит значительную неопределенность о законах распределения сигнала и помехи. В этом случае ФОП уже нельзя использовать для синтеза структуры оптимального обнаружителя, т. к. полученный таким образом алгоритм не будет оптимальным. Попытки дополнить недостающую априорную информацию некоторыми субъективными предположениями о математических моделях сигнала и помехи для нахождения ФОП имеют практически значимый результат только для простых моделей. Как показано в целом ряде работ [1, 7, 10, 11], в этом случае более конструктивным и эффективным является подход, основанный на сведении задачи обнаружения к задаче оценивания (фильтрации) параметра обнаружения, который принимает значение 1 при наличии сигнала в принятом наблюдении и 0 — в его отсутствие. Указанный подход назван авторами ε-критерием [7, 10]. В целом, предлагая структурную схему оптимальной обработки, авторы оставляют за скобками, как проводится сам алгоритм фильтрации, ограничиваясь лишь формальным указанием проводимой операции. Но сама идея фильтрации параметра обнаружения (собственно, сведения задачи обнаружения к задаче фильтрации) является очень плодотворной. В случае, когда имеется полная информация о моделях сигнала и помехи, такой подход идентичен определению ФОП.

Существует два принципиально различных подхода к решению задач анализа выходного сигнала линейной системы, на вход которой действует линейный стохастический сигнал.

Первый подход базируется на интегральном представлении линейного стохастического сигнала. Известно, что класс линейных сигналов замкнут относительно линейных (системных) преобразований. Поэтому выходной сигнал линейной системы, на вход которой поступает линейный сигнал, также является линейным. Это свойство позволяет достаточно просто получить как прямое, так и косвенное описание сигнала на выходе линейной системы [10].

Второй подход использует математический аппарат марковских процессов. Предполагается, что входной сигнал и система являются независимо друг от друга компонентами векторных марковских процессов. Вместе они представляются как компоненты более общего, векторного марковского процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ). Компонентой этого процесса является и выходной сигнал системы. Косвенное описание (вероятностные характеристики) получают путем решения уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова или Колмогорова—Феллера. Этот подход широко используется при описании систем в пространстве состояний. Описание системы в пространстве состояний с помощью СДУ является наиболее полным и дает возможность с единых позиций рассматривать задачи управления, обнаружения и оценивания и решать их на базе теории условных марковских процессов, разработанной Р.Л. Стратоновичем, и возможно для любых систем — непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных. Кроме того, описание с помощью СДУ не ограничивается рамками линейных сигналов [2–7, 9, 10, 12–16]. Сущность представления случайного процесса СДУ состоит в том, что он интерпретируется как выходной сигнал некоторой гипотетической динамической системы (формирующий фильтр), возбуждаемый стандартным случайным процессом с известными характеристиками, в качестве которого обычно выбирается белый шум. Формирующий фильтр относится к моделям феноменологического типа, т.е. он отражает не реальный физический механизм формирования случайного процесса, а лишь его наблюдаемые статистические свойства.

С развитием теории условных марковских процессов появилась возможность существенно развить теорию оптимального приема и обработки сигналов, решить задачи оптимальной фильтрации для весьма большого класса сигналов, которые раньше принципиально не могли быть решены. Это объясняется тем, что марковская теория оптимальной нелинейной фильтрации свободна от существенных ограничений, налагаемых другими теориями [1, 4, 5, 9–16].

Методы марковской теории оптимальной нелинейной фильтрации позволяют определить оптимальные алгоритмы обработки сигналов, когда последние нелинейно зависят от передаваемых сообщений, что характерно для сигналов. Налагаемые же методами оптимальной нелинейной фильтрации ограничения на марковость совокупности наблюдаемых и оцениваемых процессов не являются жесткими, т. к. многие реальные случайные процессы можно с достаточной степенью точности аппроксимировать многомерными марковскими процессами. К примеру, всякий гауссовский случайный процесс, спектральная плотность которого представима дробно-рациональной функцией, являет собой компоненту многомерного марковского процесса. В частном случае, когда уравнения состояния и наблюдения линейны относительно вектора состояния, уравнения марковской теории оптимальной фильтрации вырождаются в соответствующие уравнения оптимальной линейной фильтрации Калмана—Бьюси. Высокая эффективность марковских моделей сигналов и помех известна из работ по марковской теории нелинейной фильтрации. На основе последней построена теория обнаружения сигналов, использующая понятие условного марковского процесса. Использование только марковских моделей не ограничивает круг решаемых задач, т. к. они позволяют с требуемой точностью аппроксимировать практически любой случайный процесс [1, 4, 5, 9–16].

СОГЛАСОВАНИЕ СИММЕТРИИ СРЕДСТВ ОБРАБОТКИ С СИММЕТРИЕЙ СИГНАЛОВ

Для решения задач обнаружения, обеспечения связи и телеметрии наиболее перспективным классом сигналов является класс широкополосных и сложных сигналов, обладающих большой информативностью, помехоустойчивостью и позволяющих наиболее эффективно проводить операцию сжатия. Платой за эти преимущества служат более сложные математические модели и обработка. К примеру, для описания узкополосных сигналов в основном используется пространство параметров, координатами которого являются амплитуда, фаза, частота. В случае сложных и широкополосных сигналов мы имеем дело уже с функциями (амплитудный и фазовый спектр, текущая частота), т. е. пространство описания становится бесконечномерным или многомерным (соответственно непрерывным и дискретным сигналам). Сложность описания широкополосных сигналов и стимулирует исследования, направленные на поиск базисных функций, в координатном пространстве которых эти сигналы можно представлять как узкополосные. Одним из таких направлений является теоретико-групповой подход, получивший свое развитие в работах [3, 7].

Для обработки широкополосных сигналов важное значение имеет согласование симметрии средств обработки и симметрии сигналов. В частности, известно [3], что для измерения скорости движения объекта можно использовать гиперболические сигналы, т. к. они позволяют операцию сжатия вследствие эффекта Доплера представить в виде аддитивного сдвига. С другой стороны, применение этих сигналов, обладающих свойством инвариантности относительно сжатия с точностью до фазы, позволяет использовать методы квадратурной обработки на мультипликативной группе. Аналогичная задача возникает и при приеме сигнала с произвольной симметрией. Важным фактором при обработке является выбор базиса представления, при котором размерность пространства представления является минимальной, соответственно вычислительные и емкостные затраты при этом будут минимальны. Инвариантность сигнала относительно групповой операции и минимальное представление связаны между собой, т. к. они определяются через неприводимые представления группы.

Базовой операцией при реализации оптимальных методов обработки является корреляционное сравнение. Для осуществления операции корреляционного сравнения на произвольной группе, определяющей симметрию сигнала, необходимо использовать соответствующую ей меру. С другой стороны, для преобразования параметра группы в аддитивный совершенно не обязательно применять сигналы специального типа (к примеру, для измерения доплеровского параметра использование гиперболических сигналов не является необходимым условием). Можно поступить и по другому: излучить широкополосный сигнал произвольного типа, а затем после его приема, применяя операцию масштабирования времени в соответствии с отображением, устанавливающим изоморфизм между мультипликативной и аддитивной группами преобразований (в данном случае экспонирование), перевести параметр сжатия в сдвиг. Далее следует провести корреляционное сравнение по мультипликативной мере [3, 7]. В первом случае за счет формирования сигнала специального класса удается избежать такой трудоемкой в вычислительном отношении операции, как преобразование масштаба носителя сигнала. Преимуществом такого подхода является также то, что возможно провести обработку в реальном масштабе времени. Для второго случая эта задача является более сложной, в силу того что между отсчетами принимаемого сигнала кроме операций, связанных с непосредственной его обработкой, требуется проведение операции интерполирования, являющейся сложной в вычислительном отношении.

Произвольный закон умножения в локальной однопараметрической группе (ЛОПГ) может быть приведен в соответствии с теоремой об изоморфизме к аддитивному сдвигу [3, 7]. Если обозначить через $\varphi(a,\ b)=c$ закон композиции элементов преобразования сигналов, задаваемых в ЛОПГ G, то канонический параметр a', удовлетворяющий простейшему уравнению Ли, определяется из выражения [9]

$$a'=\int_0^a A(a)\,\mathrm{d}a, \quad \text{где: } \frac{\partial\psi(a,b)}{\partial b}\Big|_{b=0}=\frac{1}{A(a)},$$

а само уравнение Ли имеет вид: $\partial t'/\partial a'=\xi(t')$.

Уравнения Ли определяют операцию, устанавливающую изоморфизм между произвольной ЛОПГ и группой с аддитивным законом композиции параметров. С другой стороны, эта же операция определяет преобразование, которое необходимо произвести над носителем сигнала, чтобы групповое умножение стало сложением.

Рис. 1. Согласование, основанное на формировании сигнала с заданной формой симметрии

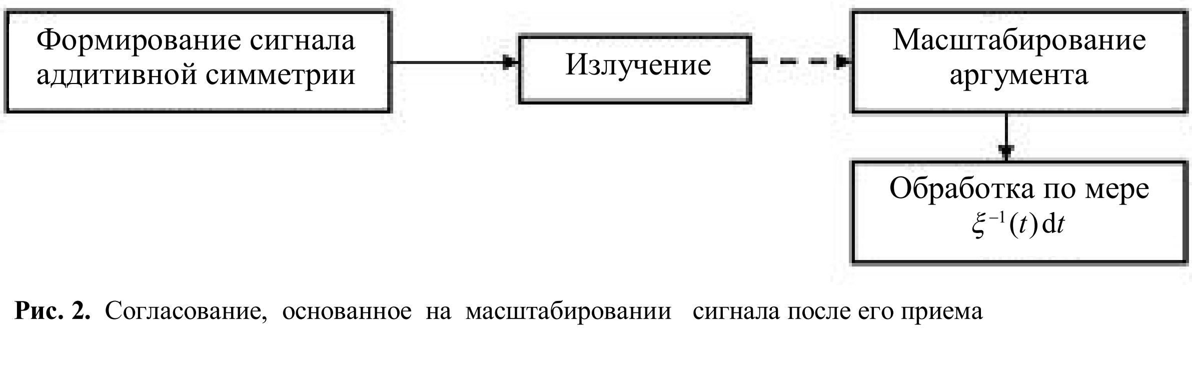

Рис. 2. Согласование, основанное на масштабировании сигнала после его приема

К примеру, изоморфизм между мультипликативной M и аддитивной A группами преобразований времени устанавливается отображением, задаваемым операцией логарифмирования (а для преобразований самого сигнала — соответственно операцией экспонирования). Операцию изоморфизма можно получить также непосредственно из оператора инфинитезимального преобразования, решая уравнение:

$$t' = \int \xi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Таким образом, под согласованием симметрии сигнала и средств его обработки понимается комплекс операций, позволяющих перевести групповой параметр в аддитивный и как следствие корреляционное сравнение на группе преобразовать в аддитивное корреляционное сравнение. Два возможных подхода к согласованию сигналов с выделенной симметрией и систем их обработки представлены соответственно на рис. 1 и 2.

Задача построения классов сигналов, обладающих свойством перевода групповой операции в аддитивный сдвиг, решается на основе неприводимых представлений однопараметрических непрерывных групп преобразований. Необходимо отметить, что класс сигналов, удовлетворяющих указанным выше свойствам, является более широким, вследствие отсутствия ограничений на ширину полосы и сложность, чем класс инвариантных сигналов, которые являются узкополосными в соответствующем базисе.

Сложные сигналы, обладающие свойством переводить операции на группе в аддитивный сдвиг, можно получить линейной суперпозицией неприводимых представлений, преобразованием масштаба аддитивных сигналов в соответствии с выделенной симметрией, модулированием и т. д. А именно.

1. ***Линейная суперпозиция неприводимых представлений***

$$s_g(t) = \sum_j^K A_j \exp\left\{ i\omega_j \int_G \xi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \right\},$$

где A_j, ω_j — амплитуда и частота j-го группового сигнала. Получаемые при этом сигналы имеют дискретный спектр в базисе неприводимых представлений группы. Сложность суммарного сигнала определяется числом K. Суммарный сигнал сохранил важнейшее свойство ГЧМ-сигналов, переводит сжатия в аддитивные сдвиги. Если суммируемые сигналы имеют $\gamma \geq 0.1$, то мы приходим к понятию широкополосного сигнала в базисе Меллина.

2. ***Преобразование масштаба носителя сигнала (времени)***

$$s(t) \to s\left[\int \xi^{-1}(t)\mathrm{d}t\right].$$

Выполнение операции масштабирования в этом случае производится иначе, чем на приемном конце, где она связана с операцией интерполирования. Здесь масштабирование проводится путем изменения интервалов времени между отсчетами в соответствии с выбранным законом. Масштабирование сигнала перед излучением не приводит также к потере отсчетов или их избыточности, что неизбежно сопровождает при масштабировании в системе обработки.

3. ***Модулирование неприводимых представлений группы***

Для получения сложных сигналов на группе преобразований можно воспользоваться процедурой модулирования параметров базисных функций группы. К примеру, можно ввести понятие частотной модуляции на группе. Аналогично можно ввести понятия фазовой и амплитудной модуляций в базисе неприводимых представлений произвольной однопараметрической группы [7].

Таким образом, оптимальные алгоритмы обработки сигналов, деформация аргументов которых определяется (или с достаточной точностью может быть аппроксимирована) непрерывной группой, должны обязательно включать в себя операции согласования симметрии средств обработки и симметрии сигналов. Последнее достигается проведением таких преобразований сигнала, при которых параметр группы становится аддитивным. В целом согласование симметрий средств обработки и сигнала позволяет сократить вычислительные затраты и повысить эффективность решения поставленных задач.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

В соответствии с математической формулировкой для решения задачи обнаружения сигналов на фоне помех необходимо проверить гипотезу H_0 отсутствия сигнала в принятой реализации $u(t,\,\mathbf{r})$

$$u(t,\,\mathbf{r}) = V\left[N(t,\,\mathbf{r});\; t,\,\mathbf{r}\right] + n(t,\,\mathbf{r}) \qquad (1)$$

против альтернативной гипотезы H_1 — наличия сигнала

$$u(t,\,\mathbf{r}) = \\ = \Phi\left[s\big(t,\,\mathbf{r};\,\mathbf{a}(t,\,\mathbf{r})\big);\; N(t,\,\mathbf{r});\; t,\,\mathbf{r}\right] + n(t,\,\mathbf{r}). \qquad (2)$$

Здесь $N(t,\ \mathbf{r})$ — поле, создаваемое на приемной антенне внешними помехами (шумы моря и его поверхности, реверберация, шумы обтекания и т. д.); $n(t,\ \mathbf{r})$ — пространственно-временнóй белый шум, описывающий внутренние шумы тракта обнаружения сигналов; Ф(.), V(.) — детерминированные функции; $\mathbf{a}(t,\ \mathbf{r})$ — вектор параметров сигналов.

Для того чтобы вынести решение в пользу той или иной гипотезы, выбирается алгоритм обработки поля $u(t,\ \mathbf{r})$, т. е. функционал $F(u)$ от $u(t,\ \mathbf{r})$, значения которого, сравниваются с некоторым порогом П. Если $F(u) \geq \Pi$, то принимается решение о наличии сигнала, в противном случае $F(u) < \Pi$ — о его отсутствии.

Введем случайный параметр θ, принимающий значение, равное нулю при гипотезе H_0 и единице при гипотезе H_1. Тогда выражения (1) и (2) можно объединить в одно, записав:

$$u(t,\ \mathbf{r}) = \theta\left[\Phi(s,\ N) - V(N)\right] + V(N) + n(t,\ \mathbf{r}). \quad (3)$$

Из выражения (3) следует, что задачу обнаружения сигнала $s(t,\ \mathbf{r};\ \mathbf{a}(t,\ \mathbf{r}))$ на фоне помехи $V(N) + n(t,\ \mathbf{r})$ можно рассматривать как задачу оценивания случайной величины θ. Как правило, в задачах измерения случайных параметров в качестве оценки параметра используется байесовская оценка с квадратичной функцией потерь [3, 4, 6, 12–15]. Тогда оптимальный алгоритм обнаружения сигнала $s(t,\ \mathbf{r};\ \mathbf{a}(t,\ \mathbf{r}))$ — это функционал $F_0(u)$, минимизирующий среднеквадратическую ошибку измерения параметра θ

$$\varepsilon(F) = M\left\{\left[F(u) - \theta\right]^2\right\}, \quad (4)$$

где $M\{.\}$ — символ математического ожидания.

Таким образом, переформулировав задачу оптимального обнаружения в задачу оптимального оценивания случайного параметра, можно к синтезу оптимальных алгоритмов обнаружения применить результаты теории оптимальной фильтрации случайных процессов и полей [1, 9, 10]. При наличии полной априорной информации о помехосигнальной обстановке такой подход позволяет найти также структуру функционала отношения правдоподобия.

Детальное изложение теории фильтрации случайных процессов можно найти в монографиях [4, 12–16]. Однако необходимо отметить, что непосредственное использование результатов этой теории к оценке случайного параметра θ невозможно, поскольку здесь необходимо решать задачу фильтрации не случайных процессов, а случайных пространственно-временны́х полей.

МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Случайные поля, как и случайные процессы, описываются функциями распределения или соответствующими плотностями вероятности, моментными функциями и спектральными характеристиками. Но при этом необходимо отметить, что для случайных полей понятие плотности вероятности теряет обычный смысл и его следует рассматривать как некоторый функционал [1, 8–11]. Полное статистическое описание поля дает характеристический функционал. Через его вариационные производные выражают и моментные функции поля. Для описания моделируемого поля необходимо также располагать математической моделью его реализаций. В принципе, в основу такой модели может быть положено описание реального физического механизма формирования поля, но из-за его сложности наибольшее распространение при моделировании случайных сигналов и полей получил феноменологический подход, позволяющий избежать учета второстепенных факторов реального механизма формирования поля и построить более простые и в тоже время более общие модели [10].

Весьма плодотворным является подход, основанный на методе формирующих фильтров (ФФ), который для случайного поля представляет собой некоторую гипотетическую систему с распределенными параметрами, позволяющую получить поле с требуемыми характеристиками из стандартного (обычно дельта-коррелированного гауссовского) случайного поля. Хотя в простейшем случае такой фильтр может быть описан явным выражением, наибольший интерес представляют неявные модели ФФ в виде дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений.

Необходимо отметить, что в отличие от линейных представлений поля, описывающих отображение вход-выход, с помощью интегральных преобразований, метод ФФ описывает и нелинейные модели, которые представляют значительный интерес, т. к. они позволяют исследовать негауссовские поля [10]. Для случайных полей обычно рассматривают представления с помощью стохастических интегралов по винеровскому полю $W(t,\ \mathbf{r})$ [1, 10]. В зависимости от характера наблюдений можно выделить по крайней мере два различных подхода к определению указанных стохастических интегралов.

Первый подход применим в том случае, когда пространственная область наблюдения поля фиксирована и поле наблюдается во всех точках одновременно, что типично для задач обработки в гидроакустике. Этот подход связан с введением состояний, упорядоченных по времени, и базируется на представлении поля с непрерывными пространственными координатами в виде элемента гильбертова пространства функций от $\mathbf{r}$ в каждый фиксированный момент времени t [6, 8, 10, 16]. Винеровское поле при этом понимается как случайный процесс со значениями в гильбертовом пространстве, координаты которого в некотором ортонормированном базисе суть независимые одномерные стандартные винеровские процессы. В соответствии с этим вводится и понятие стохастического интеграла.

Второй подход к представлению полей стохастическими интегралами ориентирован на равноправный учет изменений поля по всем координатам и является естественным для статистических полей. Основан на введении отношения частичной упорядоченности и включает в себя наряду с обычными интегралами Лебега и стохастическими интегралами Ито и Стратоновича (интегралы первого рода) интегралы второго рода. Поэтому его практическое использование в задачах обработки сигналов и моделировании каналов распространения пока ограничено и наталкивается на ряд трудностей. В дальнейшем будем рассматривать только первый подход.

В заключение рассмотрим вопрос о марковских свойствах случайных полей. Эти свойства тесно связаны с возможностью представления СДУ, порождающих поле, в форме уравнений состояния.

Простейшая параметрическая модель без "пространственной динамики" (нет производных по $\mathbf{r}$) порождает поле, являющееся совокупностью некоррелированных между собой марковских процессов, наблюдаемых в различных точках заданной области пространства, и, таким образом, не требует какого-либо обобщения марковости.

Модель с пространственной динамикой менее тривиальна. Из-за наличия "пространственной динамики" состояния уже нельзя задавать независимо в каждой точке. Состояние в момент t_i определяется функцией $\mathbf{x}(\mathbf{r}_i)$, где $\mathbf{r}_i$ принадлежит исследуемой области пространства. Например, для поля с одной пространственной координатой состояния задаются на прямых. В этом случае, по существу, и здесь $\mathbf{r}$ играет роль параметра.

Наиболее общим является понятие марковского поля, в основе которого лежит трактовка понятий "будущего" и "прошлого", используемых при определении марковского свойства как внешней и внутренней областей множества относительно некоторой границы. Марковским в указанном смысле является любое случайное поле, порождаемое СДУ с "пространственной динамикой" [6, 10].

Таким образом, с точки зрения математики, случайные поля $u(t,\mathbf{r})$ эквивалентны случайным процессам со значениями в гильбертовом пространстве функций от $\mathbf{r}$, интегрируемых с квадратом [6]. Следовательно, $u(t,\mathbf{r})$ можно идентифицировать с некоторым процессом u_t, но уже со значениями в пространстве функций от $\mathbf{r}$. Если положить, что функции $u(t,\mathbf{r})$ удовлетворяют условию

$$M\left\{\int |u(\mathbf{r}|^2 \mathrm{d}\mathbf{r}\right\} < \infty, \tag{5}$$

то это функциональное пространство можно считать гильбертовым со скалярным произведением (u_t, v_t) и нормой u_t, равным соответственно

$$(u_t, v_t) = \int u(t, \mathbf{r}) v(t, \mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r}\,; \quad u_t = \sqrt{(u_t, u_t)}\,. \tag{6}$$

Обобщение теории оптимальной фильтрации на бесконечномерный случай сделано в работах [1, 6, 10, 12, 16] и основано на ряде важных теорем теории случайных процессов со значениями в гильбертовых пространствах. Это позволяет синтезировать оптимальный алгоритм обнаружения сигнала $s(t,\mathbf{r})$ на фоне помехи и шума при аддитивной модели их взаимодействия [1, 5, 11, 15].

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМНИКА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СИГНАЛОВ

Получим решение задачи обнаружения в случае, когда в области определения сигнала действует некоторая группа преобразований, а модель взаимодействия сигнала и помехи определяется детерминированным оператором $\Phi(.)$. Введем в рассмотрение поле

$$\tilde{u}(t, \mathbf{r}) = \int_t u(\tau, \mathbf{r}) \mathrm{d}\tau\,, \qquad \tau = [t_0, t], \tag{7}$$

которое удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ)

$$\mathrm{d}\tilde{u}(t, \mathbf{r}) = \left[\theta(\Phi - V) + V\right]\mathrm{d}t + \sqrt{G_n}\,\mathrm{d}w(t, \mathbf{r}), \tag{8}$$

где G_n — спектральная плотность белого гауссовского шума $n(t, \mathbf{r})$; $w(t,\mathbf{r})$ — винеровское поле, являющееся бесконечномерным аналогом стандартного винеровского процесса.

Винеровское поле определяется через пространственно-временной белый шум (ПВБШ) следующим образом:

$$w(t,\ \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{G_n}} \int_{t_0}^{t} n(\tau,\ \mathbf{r}) \mathrm{d}\tau. \tag{9}$$

Положим, что на сигнал $s(t,\ \mathbf{r})$ действует группа преобразований времени G с элементом преобразования g_a [7]. Тогда с учетом нормировки для преобразованного сигнала можно записать

$$g_a s(t,\ \mathbf{r}) = \sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}L^{-1}[L(t)+a]}{\mathrm{d}t}\right|} s\left[L^{-1}[L(t)+a,\ \mathbf{r}]\right] =$$
$$= s_1(t,\ \mathbf{r}). \tag{10}$$

Оператор $L(.)$ определяется соотношением $L(t) = \int_G \xi^{-1}(t) \mathrm{d}t.$, а $\xi(t)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка (уравнения Ли) с начальным условием [7]

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \xi(f), \qquad f(a)\big|_{a=0} = t.$$

Преобразование времени задается соотношением, включенным в некоторое однопараметрическое семейство

$$\{T(a)\}\ \|\ t' = T(a)t = f(t,\ a),$$

где a — вещественный параметр преобразования.

С учетом последнего уравнение (8), имеющее меру, согласованную с группой преобразования сигнала, запишется в виде

$$\mathrm{d}\tilde{u}(t,\ \mathbf{r}) =$$
$$= \left[\theta\{\Phi(s_1, N) - V(N)\right] \mathrm{d}L(t) + V(N)\mathrm{d}L(t) +$$
$$+ \sqrt{G_n}\mathrm{d}w. \tag{11}$$

Необходимо отметить, что при условии (10) выражение (7) имеет меру $\mathrm{d}L(t) = \xi^{-1}(t)\mathrm{d}t$. Ниже, если это не будет оговорено отдельно, в целях сокращения записи под $\mathrm{d}t$ будем понимать меру $\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t$. В соответствии с теорией фильтрации, оптимальной по среднеквадратичному критерию оценкой случайного параметра θ является его апостериорное математическое ожидание, вычисленное при условии наблюдения поля на временно́м интервале $[t_0,\ t_0+t]$:

$$\hat{\theta} = F_0^t(u) = M\{\theta / \tilde{u}),\ \tau \in [t_0,\ t_0+t]\}. \tag{12}$$

Оптимальная оценка (12) является мартингалом [1], т. е. случайным процессом, который при $\tau < t$, удовлетворяет соотношению

$$M\{F_0^t(u) / \tilde{u}),\ \tau \in [t_0,\ t_0+t]\} = F_0^s(u). \tag{13}$$

Оптимальная оценка (13) интегрируема с квадратом, и поэтому, в соответствии с теоремой о представлении квадратично-интегрируемых мартингалов [1], для нее справедливо представление

$$F_0^t(u) = \int_\Omega \int_{t_0}^{t_0+t} \psi(t,\ \mathbf{r})\mathrm{d}v(t,\ \mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{14}$$

где $v(t,\ \mathbf{r})$ — случайное поле со стохастическим дифференциалом вида

$$v(t,\ \mathbf{r})\ \mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{G_n}}[\mathrm{d}\tilde{u} - \hat{\varsigma}\mathrm{d}t], \tag{15}$$

$$\hat{\varsigma}(t,\ \mathbf{r}) = M\{\varsigma(t,\ \mathbf{r}) / \tilde{u}(\tau,\ \mathbf{r}),\ \tau \in [t_0,\ t_0+t]\}, \tag{16}$$

$$\varsigma(t,\ \mathbf{r}) = \theta\{\Phi[s_1,\ N] - V(N)\} + V(N). \tag{17}$$

Здесь $\hat{\varsigma}(t,\ \mathbf{r})$ — оптимальная оценка поля $\varsigma(t,\ \mathbf{r})$.

С учетом того, что $v(t,\ \mathbf{r})$ является винеровским полем [1], найдем ядро $\psi(t,\ \mathbf{r})$ преобразования в выражении (14). Для этого введем вспомогательный процесс $z(t)$, допускающий, как и оценка (12), представление (14):

$$z(t) = \int_\Omega \int_{t_0}^{t_0+t} \Theta(\tau,\ \mathbf{r})\mathrm{d}v(\tau,\ \mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{18}$$

Умножим обе части выражения (16) на параметр θ и усредним:

$$M\{\theta z(t)\} = M\left\{\int_\Omega \int_{t_0}^{t_0+t} \theta\,\Theta(\tau,\ \mathbf{r})\mathrm{d}v\mathrm{d}\mathbf{r}\right\}. \tag{19}$$

Выражение (19) преобразуем следующим образом. Винеровское поле $v(t,\ \mathbf{r})$ определяется выражением

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{G_n}}[\varsigma - \hat{\varsigma}]\mathrm{d}t + \mathrm{d}w. \tag{20}$$

С учетом формулы (20) и того, что оптимальная оценка является мартингалом, отношение (19) можно записать в виде

$$M\{\theta z(t)\} = M\left\{\int_\Omega \int_{t_0}^{t_0+t} \theta\,\Theta(\varsigma - \hat{\varsigma})\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mathbf{r}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{G_n}} M\left\{\int_\Omega \int_{t_0}^{t_0+t} \Theta M\{\theta(\varsigma - \hat{\varsigma}) / \tilde{u}\}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mathbf{r}\right\}. \tag{21}$$

Для винеровских полей имеет место равенство

$$M\{\mathrm{d}v(t,\ \mathbf{r})\mathrm{d}v(t_1,\ \mathbf{r}_1)\} = \delta(t-t_1)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1). \quad (22)$$

Поэтому математическое ожидание $M\{\theta z(t)\}$ представляется в виде:

$$M\{\theta z(t)\} = \frac{1}{\sqrt{G_n}} M\left\{\int\limits_{\Omega}\int\limits_{t_0}^{t_0+t} M\{\theta(\varsigma-\hat{\varsigma})/\tilde{u}\}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mathbf{r}\right\}. \quad (23)$$

Но выражение (23) можно записать также следующим образом:

$$M\{\theta z(t)\} = M\{z(t)M\{\theta/\tilde{u}\}\} = M\{zF_0^t\}. \quad (24)$$

Сопоставляя (24) с (23) и (14), находим $\psi(t,\ \mathbf{r})$:

$$\psi(\tau,\ \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{G_n}} M\{\theta(\varsigma-\hat{\varsigma})/\tilde{u}\}. \quad (25)$$

Но поскольку имеет место соотношение $M\{\theta\hat{\varsigma}/\tilde{u}\} = M\{\theta/\tilde{u},\ \hat{\varsigma}\}$, после подстановки получаем формулу, определяющую $\psi(t,\ \mathbf{r})$ через апостериорное математическое ожидание оценки параметра обнаружения θ:

$$\psi(\tau,\ \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{G_n}}[M\{\theta\varsigma/\tilde{u}\} - F_0^t\hat{\varsigma}]. \quad (26)$$

Полученное выражение нетрудно преобразовать, если подставить в него соотношение (17):

$$\psi(\tau,\ \mathbf{r}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{G_n}}\left\{M\left\{\theta^2\left[\Phi(s_1,N) - V(N)\right] + \theta V(N)\right\} - \right. \\ \left. -F_0^t(u)M\{\theta[\Phi(s_1,N) - V(N)] + V(N)\}\right\}. \quad (27)$$

Для получения выражений, определяющих тракт пространственно-временнóй обработки, найдем фигурирующие в (27) условные математические ожидания. Так как параметр $\theta = 0,\ 1$, все высшие моменты будут выражаться через его первый момент. Учитывая этот факт, можно записать

$$M\left\{\theta^2\left(\Phi - V\right)\right\} = M\left\{\theta\left(\Phi - V\right)\right\}. \quad (28)$$

Далее, используя определение среднего значения и формулу Байеса, можно получить выражение

$$M\{\theta^2(\Phi - V)\} = F_0^t(u)(\hat{\Phi} - \hat{V}_1), \quad (29)$$

где $\hat{\Phi}$ — оптимальная по СКО-критерию оценка Φ при гипотезе H_1; $\hat{V}_1$ — оптимальная по СКО-критерию оценка V_1 при гипотезе H_1.

Аналогично находим и условное математическое ожидание помехи $M\{\theta V(t,\ \mathbf{r})\}$:

$$M\{\theta V\} = F_0^t(u)\hat{V}_1, \quad (30)$$

$$\hat{V}_1 = M\{V/\tilde{u}, \tau = [t_0,\ t_0+t];\ \theta = 1\}. \quad (31)$$

Определим фигурирующее в формуле (31) апостериорное среднее $M\{V(t,\ \mathbf{r})\}$. Для преобразования (31), воспользуемся формулой Байеса. В результате имеем:

$$M\{V\} = \int V\mu[\mathrm{d}V/\tilde{u};\theta=1]P[\theta=1/\tilde{u}] + \\ + \int V\mu[\mathrm{d}V/\tilde{u};\theta=0]P[\theta=0/\tilde{u}].$$

Откуда:

$$\begin{cases} M\{V\} = F_0^t(u)\hat{V} + [1 - F_0^t(u)]\hat{V}_0, \\ \hat{V}_o = M\{V/\hat{u};\ \tau = [t_0,\ t_0+t];\ \theta = 0\}, \end{cases} \quad (32)$$

$\hat{V}_0$ — оценка помехи, вычисленная при H_0. Подставим соотношения (30) и (32) в формулу (27):

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{G_n}}\left\{F_0^1(u)[(\hat{\Phi} - \hat{V}_1) + F_0^t(u)\hat{V}_1] - \right. \\ \left. -F_0^t(u)[F_0^t(u)(\hat{\Phi} - \hat{V}_1) + F_0^t(u) + [1 - F_0^t(u)]\hat{V}_0]\right\}.$$

Проведя несложные преобразования, находим окончательное выражение для $\psi(t,\ \mathbf{r})$:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{G_n}} F_0^t(u)[1 - F_0^t(u)](\hat{\Phi} - \hat{V}_0 + \hat{V}_1). \quad (33)$$

Через оценки функции Φ и V можно выразить и стохастический дифференциал (20). Для этого необходимо снова воспользоваться соотношениями (30) и (32) и записать

$$\hat{\varsigma} = M\{\theta(\Phi - V) + V\} = F_0^t(u)\hat{\Phi} + [1 - F_0^t(u)]\hat{V}. \quad (34)$$

С учетом выражения (34) и в силу (12) для (20) имеем:

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{G_n}}\left\{u - F_0^t(u)\hat{\Phi} + [1 - F_0^t(u)]\hat{V}_0\right\}\mathrm{d}t. \quad (35)$$

Подставим формулы (33) и (35) в представление (15) и продифференцируем его по переменной t. В результате (с учетом $\mathrm{d}t \to \xi^{-1}(t)\mathrm{d}t$) приходим к СДУ для апостериорного математического ожидания параметра θ:

$$\mathrm{d}F_0^t(u) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G_n}}[1 - F_0^1(u)] \times$$
$$\times \int_G \int_\Omega (\hat{\Phi} - \hat{V}_0) \left\{ u - F_0^t(u)\hat{\Phi} + [1 - F_0^t(u)]\hat{V}_0 \right\} \times$$
$$\times \mathrm{d}\mathbf{r} \xi^{-1}(t)\mathrm{d}t. \quad (36)$$

Для дискретной приемной антенны, состоящей из N элементов, имеем дискретный по пространству аналог формулы (36):

$$\mathrm{d}F_0^t = \frac{1}{\sqrt{G_n}} F_0^t(u)[1 - F_0^t] \times$$
$$\times \sum_i^N (\hat{\Phi} - \hat{V}_0)_i \{u - F_0^t(u)\hat{\Phi} + [1 - F_0^t(u)]\hat{V}_0\}_i \xi^{-1}(t)\mathrm{d}t. \quad (37)$$

Структурная схема тракта обнаружения пространственно-временны́х сигналов, реализующего алгоритм оценки апостериорного математического ожидания параметра θ, показана на рис. 1. Согласно этой схеме, напряжения $u(t, \mathbf{r}_i)$ с выходов элементов приемной антенны подаются на два основных устройства, определяющих структуру оптимального тракта обнаружения: подсистему пространственно-временно́й фильтрации и подсистему фильтрации параметра θ и вынесения решения. В подсистеме пространственно-временно́й фильтрации формируются оптимальные оценки Φ_i, V_{0i}, V_{1i}. Полученные оценки совместно с реализацией $u(t, \mathbf{r}_i)$ обрабатываются в соответствии с алгоритмом (37). В результате чего вычисляется апостериорная оценка параметра θ, которая затем сравнивается с порогом П в решающем устройстве (блок П). Необходимо отметить, что процедура интегрирования при реализации алгоритмов (36) и (37) выполняется с весом $\xi^{-1}(t)$, учитывающим преобразование временно́й координаты пространственно-временно́го сигнала.

Особенностью, полученного обнаружителя является то, что структура подсистемы фильтрации параметра θ и вынесения решения инвариантна относительно законов распределения сигнала и помехи. Законы распределения влияют лишь на вид подсистемы фильтрации сигнала и помехи.

Таким образом, сведя задачу обнаружения к задаче оценки параметра θ, удалось синтезировать тракт пространственно-временно́й обработки сигналов и помех с произвольными законами распределения. Очевидно, что при конкретизации математических моделей сигналов и помех, а также функций Ф и V структуру тракта оптимальной обработки можно упростить.

ПРИЕМНИК ПРИ АДДИТИВНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СИГНАЛА И ПОМЕХИ

Важным частным случаем рассмотренной выше задачи синтеза, является ситуация обнаружения, когда помеха и сигнал взаимодействуют аддитивно:

$$u(t, \mathbf{r}) = \theta s_1(t, \mathbf{r}_i) + N(t, \mathbf{r}) + n(t, \mathbf{r}), \ \theta = 0{,}1. \quad (38)$$

Используя выражение (37), нетрудно получить формулы для апостериорной вероятности оценки параметра θ в непрерывном и дискретном вариантах:

$$\mathrm{d}F_0^t(u) = \frac{1}{\sqrt{G_n}} F_0^t(u)\left[1 - F_0^t(u)\right] \times$$
$$\times \int_G \hat{s}_2 \left[u - \hat{V} - F_0^t(u)\hat{s}_2 \right] \xi^{-1}(t)\mathrm{d}t. \quad (39)$$

Структурная схема, реализующая алгоритм (39) отличается от общей структурной схемы только подсистемой фильтрации сигнала и помехи и совпадает со схемой, полученной в работе [1].

При полной априорной информации о сигнале и помехе оптимизация алгоритма обнаружения в соответствии с интерпретацией задачи обнаружения как задачи оценки параметра θ приводит к тем же результатам, что и критерий Неймана—Пирсона. Для этого положим, что вероятность наличия сигнала в принятой реализации (вероятность того, что $\theta = 1$) равна p_s, а, следовательно, вероятность отсутствия сигнала — $(1 - p_s)$. Тогда выражение для среднеквадратической ошибки может быть записано в виде

$$\varepsilon(F) = p_s \int [F_0^t(u) - 1]^2 \mu(\mathrm{d}u / 1) +$$
$$+ (1 - p_s) \int [F_0^t(u)]^2 \mu(\mathrm{d}u / 0). \quad (40)$$

Для определения взаимосвязи между отношением правдоподобия и ε-оптимальным функционалом проварьируем выражение (40):

$$\delta\varepsilon(F) = p_s \int [F_0^t(u) - 1] \delta[F_0^t(u)] \mu(\mathrm{d}u / 1) +$$
$$+ (1 - p_s) \int F_0^t(u) \delta[F_0^t(u)] \mu(\mathrm{d}u / 0),$$

где $\delta\left[F_0^t(u)\right]$ — вариация функционала $F_0^t(u)$; $\delta\varepsilon(F)$— вариация среднеквадратической ошибки измерений параметра $\varepsilon(F)$.

Учитывая определение отношения правдоподобия, преобразуем последнее соотношение к виду

$$\delta\varepsilon(F)=\int\{p_s[F_0^t(u)-1]\delta[F_0^t(u)]\Lambda(u)+(1-p_s)F_0^t(u)\}\delta[F_0^t(u)]\mu(\mathrm{d}u/H_0).$$

Отсюда получаем решение уравнения $\mathrm{d}\varepsilon(F)=0$:

$$\begin{cases} F_0^t(u)=\dfrac{p_s\Lambda(u)}{1-p_s[1-\Lambda(u)]}, \\ \Lambda(u)=\dfrac{(1-p_s)F_0^t(u)}{p_s[1-F_0^t(u)]}. \end{cases} \quad (41)$$

Следовательно, при полной априорной информации о сигнале и помехе, ε-критерий эквивалентен критерию Неймана—Пирсона. Однако ε-критерий в отличие от традиционных критериев качества может быть использован не только для простой констатации факта оптимальности функционала отношения правдоподобия, но и для определения его структуры.

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ФОП И ε-КРИТЕРИЕМ

Покажем взаимосвязь между эволюционным уравнением апостериорного математического ожидания параметра θ и отношением правдоподобия. Положим $(1-p_s)/p_s=1$, продифференцируем второе уравнение (41) по t и учтем (15). В результате получим

$$\mathrm{d}\Lambda(u)=\frac{1}{[1-F_0^t(u)]^2}\int_\Omega\psi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}\mathbf{r}+$$
$$+\frac{1}{[1-F_0^t(u)]^3}\int_\Omega\psi^2\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

После подстановки в последнюю формулу выражений (27) и (29) для ФОП получаем следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\mathrm{d}\Lambda(u)=\frac{1}{\sqrt{G_n}}\Lambda(u)\times$$
$$\times\int_\Omega[1-F_0^t(u)](u-\hat{V}_0)(\hat{\Phi}-\hat{V}_0)\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t. \quad (42)$$

Введем функцию логарифма отношения правдоподобия $L(u)$, тогда, обобщая результаты [1], нетрудно получить:

$$\mathrm{d}L=\frac{1}{G_n}\times$$
$$\times\int_\Omega\left\{\left[\theta(\Phi-V)+V-\hat{V}_0\right](\hat{\Phi}-\hat{V}_0)-\frac{1}{2}(\hat{\Phi}-\hat{V})^2\right\}\times$$
$$\times\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t+\sqrt{G_n}\int_\Omega(\hat{\Phi}-\hat{V}_0)\mathrm{d}w\mathrm{d}\mathbf{r}. \quad (43)$$

Дифференцируем $\Lambda(u)=\exp\{L(u)\}$ по времени и, учитывая (43), находим выражение для $L(u)$:

$$\mathrm{d}L=\frac{1}{G_n}\int_\Omega(u-\hat{V}_0)(\hat{\Phi}-\hat{V}_0)\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t-$$
$$-\frac{1}{2G_n}\int_\Omega(\hat{\Phi}-\hat{V}_0)^2\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t. \quad (44)$$

Алгоритм (44) определяет структуру оптимальных обнаружителей произвольных сигналов и помех при наличии аддитивного белого шума. Общность этих алгоритмов является следствием их инвариантности относительно конструкции марковских процессов и аппроксимирущих свойств последних. Какой бы ни была эта конструкция вид формул и входящих в них оценок обеспечивают минимум СКО измерения параметра θ. Из указанной инвариантности и возможности замены произвольного сигнала компонентой марковского процесса непосредственно следует общность алгоритмов.

Выражению (44) можно придать другую форму, если учесть некоррелированность Ф и V. Для этого раскроем интегралы и приведем подобные члены. В результате получим следующее выражение для отношения правдоподобия в форме интеграла Ито:

$$\mathrm{d}L=\frac{1}{G_n}\int_\Omega u(\hat{\Phi}-\hat{V}_0)\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t-$$
$$-\frac{1}{2G_n}\int_\Omega[(\hat{\Phi})^2-(\hat{V}_0)^2]\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t. \quad (45)$$

Необходимо подчеркнуть, что указанная инвариантность алгоритмов касается только их структуры и смысла оценок. Конкретный же вид оценок свойством инвариантности относительно статистических характеристик сигнала не обладает.

Используя взаимосвязь между интегралами Ито и Стратоновича, выражение для логарифма отношения правдоподобия (45) запишем в симметризованной форме [3, 8, 11]:

$$\mathrm{d}L = \frac{1}{G_n}\int_\Omega u(\hat{\Phi} - \hat{V}_0)\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t - $$
$$- \frac{1}{2G_n}\int_\Omega (\hat{\Phi}^2 - \hat{V}_0^2)\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t. \qquad (46)$$

Здесь $\hat{\Phi}^2$ — апостериорное математическое ожидание квадрата функции Ф при H_0; $\hat{V}_0^2$ — апостериорное математическое ожидание квадрата функции V при H_0.

В случае аддитивной помехи, когда

$$\Phi(s,\, N,\, t,\, \mathbf{r}) = s_1(t,\, \mathbf{r}) + V(N,\, t,\, \mathbf{r}), \qquad (47)$$

формула (46) принимает следующий вид:

$$\mathrm{d}L = \frac{1}{G_n}\int_\Omega (\hat{s}_1 + \hat{V}_1 - \hat{V}_0)u\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}\mathrm{d}t - $$
$$- \frac{1}{2G_n}\int_\Omega [(\hat{s}_1 + \hat{V}_1)^2 - \hat{V}_0]\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}\mathrm{d}t. \qquad (48)$$

Апостериорные математические ожидания случайных функций Ф, V и s являются их оценками по минимуму среднеквадратической ошибки, получающимися в результате наблюдения реализаций $u(t,\, \mathbf{r})$ при наличии и отсутствии сигнала соответственно. Отметим также, что в полученные алгоритмы при любой из ситуаций $\theta = 0,\, 1$, входят как оценки, так и псевдооценки [3].

Согласно алгоритмам (45), (46) и (47), схемы оптимальных обнаружителей являются двухканальными ($\theta = 0,\ \theta = 1$), при этом в каждом из каналов осуществляется фильтрация помехи, которая затем компенсируется при помощи вычитания оценок помехи при наличии и отсутствии сигнала. Эти алгоритмы определяют оценочно-корреляционно-компенсационный (ОКК) метод обработки сигналов на фоне помех. Если помеха отсутствует, то ОКК-алгоритмы переходят в оценочно-корреляционные (ОК).

Положим $V(N,\, t,\, \mathbf{r}) = N(t,\, \mathbf{r})$, ($\bar{u} = u - \hat{V}_0$). Тогда

$$\mathrm{d}L = \frac{1}{G_n}\int_\Omega (\hat{s}_1 + \hat{N}_1 - \hat{N}_0)\bar{u}\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}\mathrm{d}t - $$
$$- \frac{1}{2G_n}\int_\Omega [(\hat{s}_1 + \hat{N}_1)^2 - \hat{N}_0]\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}\mathrm{d}t. \qquad (49)$$

Формулу (49) можно записать иначе. Выделяя в подынтегральном выражении второго интеграла (49) полный квадрат и включая оставшиеся члены в стохастический интеграл, получим

$$\mathrm{d}L = \frac{1}{G_n}\int_\Omega (\hat{s}_1 + \hat{N}_1 - \hat{N}_0)\bar{u}\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}\mathrm{d}t - $$
$$- \frac{1}{2G_n}\int_\Omega (\hat{s}_1 + \hat{N}_1 - \hat{N}_0)^2\,\mathrm{d}\mathbf{r}\xi^{-1}\mathrm{d}t. \qquad (50)$$

Выражение (50) можно также получить непосредственно из формулы (45) подстановкой $\Phi(t,\, \mathbf{r}) = s_1(t,\, \mathbf{r}) + V(t,\, \mathbf{r})$.

Алгоритмы (49) и (50) обладают по сравнению с алгоритмом "оценка—обнаружение" одной характерной особенностью, а именно в них с помощью процедуры

$$n_0(t,\, \mathbf{r}) = u(t,\, \mathbf{r}) - \hat{N}_0(t,\, \mathbf{r}) \qquad (51)$$

осуществляется "отбеливание" помехи на апертуре приемной антенны. Иными словами, $n_0(t,\, \mathbf{r})$ — пространственно-временной белый шум с дельтаобразной корреляционной функцией. Чтобы доказать этот факт, рассмотрим поле $v_0(t,\, \mathbf{r})$, связанное с $n_0(t,\, \mathbf{r})$ простым соотношением

$$v_0(t,\, \mathbf{r}) = \sqrt{G_n}\int_{t_0}^{t_0+t} n_0(\tau,\, \mathbf{r})\mathrm{d}\tau. \qquad (52)$$

В силу (51) поле $n_0(t,\, \mathbf{r})$ имеет стохастический дифференциал

$$\mathrm{d}v_0 = \sqrt{G_n}(N - N_0)\xi^{-1}\mathrm{d}t + \mathrm{d}w, \qquad (53)$$

который, по структуре, совпадает с формулой (20). Следовательно, поле $v_0(t,\, \mathbf{r})$ является винеровским полем, а поле $n_0(t,\, \mathbf{r})$ дельта-коррелировано по пространству и времени.

В случае дискретной приемной антенны, состоящей из N элементов, алгоритм (50) имеет вид

$$Lu = \frac{1}{G_n}\sum_i^N \int_G u_i(\hat{\Phi} - \hat{V}_0)_i\xi^{-1}\mathrm{d}t - $$
$$- \frac{1}{2G_n}\sum_i^N \int_G \Big[(\hat{\Phi})^2 - (\hat{V}_0)^2\Big]_i \xi^{-1}\mathrm{d}t \qquad (54)$$

и обобщает результаты работы [1, 9] на случай пространственно-временнóй обработки сигналов и помех с произвольными законами распределения. Из него в частном случае отсутствия пространственной обработки получаем алгоритм временнóй обработки:

$$Lu = \frac{1}{G_n}\int_G u_i(\hat{\Phi} - \hat{V}_0)_i\xi^{-1}\mathrm{d}t - $$
$$- \frac{1}{2G_i}\int_G \Big[(\hat{\Phi})^2 - (\hat{V}_0)^2\Big]_i \xi^{-1}\mathrm{d}t, \qquad (55)$$

что совпадает с точностью до ξ^{-1} с результатами в [12].

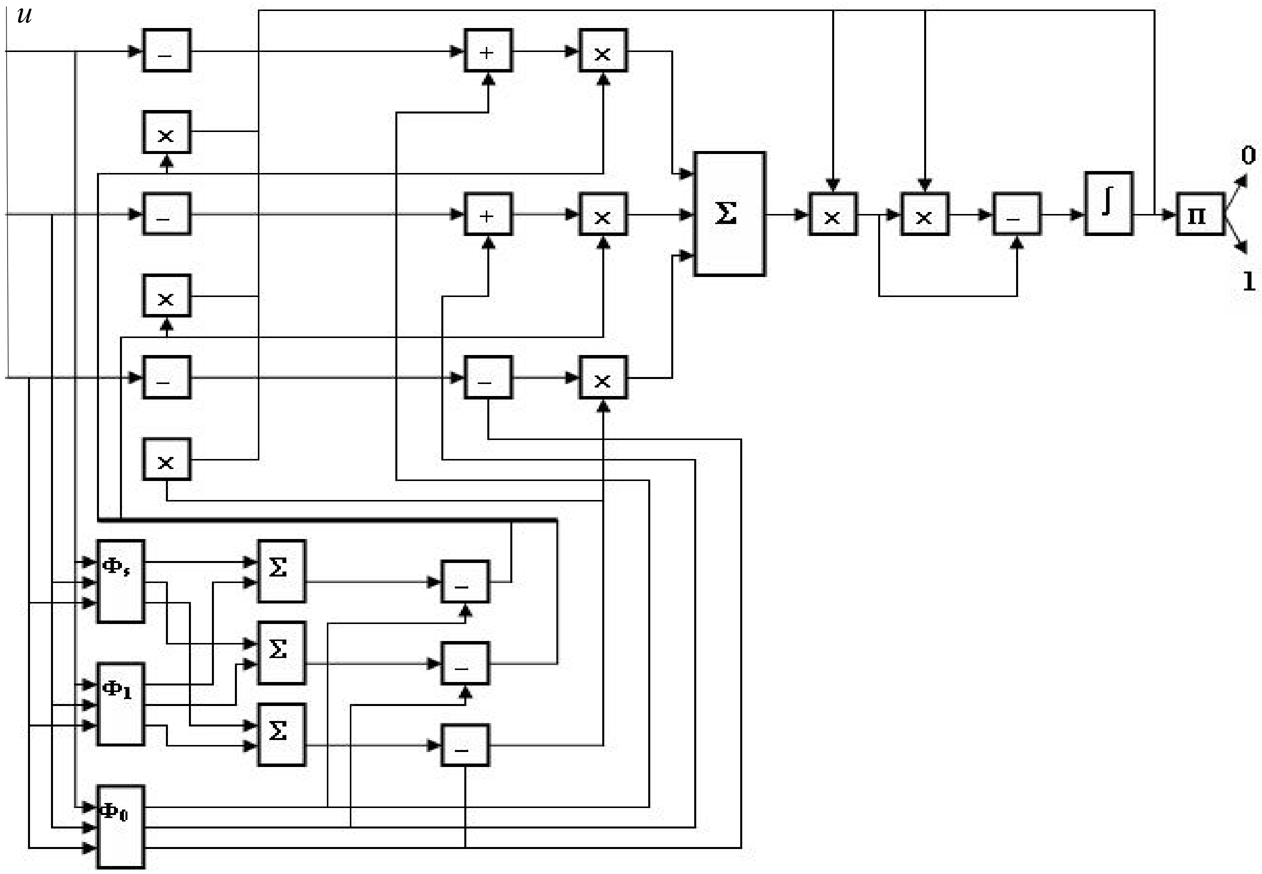

Рис. 3. Структурная схема обнаружителя, реализующего фильтрацию параметра обнаружения

Структурная схема оптимального тракта обнаружения, реализующего алгоритм (54), изображена на рис. 3. Интегратор осуществляет интегрирование по мере $\xi^{-1}(t)\mathrm{d}t$. Обнаружитель состоит из подсистемы оптимальной пространственно-временнóй фильтрации сигнала и помехи, а также подсистемы, реализующей вычисления в соответствии с выражением (54). В последней осуществляется процедура "обеливания" помехи, а затем взаимно-корреляционная обработка $n_0(t, \mathbf{r})$ с оценками сигнала и помехи и энергетическое накопление этих оценок. Структура подсистемы фильтрации во многом определяется объемом информации о помехосигнальной обстановке, который априори известен на этапе синтеза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильичев В.И., Калюжный А.Я., Красный Л.Г., Лапий В.Ю.* Статистическая теория обнаружения гидроакустических сигналов. М.: Наука, 1992. 413 с.
2. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1–3. М.: Сов. радио.
3. *Сапрыкин В.А., Рокотов С.П.* Теория обработки гидроакустической информации. Петродворец: ВВМУРЭ им. А.С. Попова, 1986. 308 с.
4. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975. 704 с.
5. *Левин Б.Р., Шварц В.* Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
6. *Розанов Ю.А.* Марковские случайные поля. М.: Наука, 1981. 256 с.
7. *Бутырский Е.Ю.* Основные понятия теории систем и сигналов на группах преобразований // Информация и космос. 2007. № 3. С. 67–80.
8. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова Думка, 1968. 354 с.
9. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований математической физики. М.: Наука, 1983. 280 с.
10. *Кловский Д.Д., Конторович В.Я., Широков С.М.* Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических уравнений. М.: Радио и связь, 1984. 247 с.
11. *Красный Л.Г.* Оптимальное обнаружение и раз-

личение сигналов как задача нелинейной фильтрации // Техническая кибернетика. 1978. № 3. С. 163.
12. *Сосулин Ю.Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978. 320 с.
13. *Сосулин Ю.Г., Паршин Ю.Н.* Оценочно-корреляционно-компенсационные алгоритмы обнаружения многомерных сигналов // Радиотехника и электроника. 1981. № 8.
14. *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: МГУ, 1966. 319 с.
15. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
16. *Ярлыков М.С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980. 358 с.

Военно-морской институт радиоэлектроники им. А.С. Попова, г. Петродворец

Контакты: *Бутырский Евгений Юрьевич*, evgenira88@mail.ru

Материал поступил в редакцию 30.06.2011.

FILTERING-FINDING SPACE-TEMPORARY SIGNAL

Eu. Yu. Butyrsky

Popov Higher Naval Academy of Radio Electronics, Petrodvorets

The article deals with the generalized algorithm space-time filtering signal, which is based on the methods of the theories of nonlinear filtering. The synthesis of the algorithms is done providing theory-group transformations of the signal in time area. The method for co-ordination of symmetries of the signal and facilities of the processing is suggested.

Keywords: function, aproximation, dynamic system, signal, process, algorithm, matrix, presentations, symmetry, filtering