

УДК 537.533.7:537.534.7:621.319.7

© Ю. К. Голиков, Н. К. Краснова, И. А. Марциновский

## ОБ АППАРАТНОЙ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ

В статье критически изучается понятие аппаратной функции электронных спектрометров, его генезис; строится безразмерная математическая модель, с помощью которой выводится строго определенная и однозначная интегральная связь между энергетическим спектром источника  $f(E)$  и регистрируемым на детекторе током  $J(U)$  в зависимости от энергии настройки прибора  $U$ . Показано, что аппаратная функция всегда зависит только от отношения  $(E/U)$ , а не от разницы  $(E-U)$  и не от обратной величины  $(U/E)$ , как это декларируется в ряде публикаций. Кроме того, показано, что возникающее уравнение по своей математической природе относится к типу Вольтерра I рода, а не Фредгольма I рода. В статье приводится ряд конкретных конструкций аппаратной функции и описываются их общие качественные свойства.

*Кл. сл.:* энергоанализ, электронный спектрометр, аппаратная функция, интегральное уравнение Вольтерра I рода, истинный спектр, восстановление спектра, однородное поле, энергоанализатор "Туганхамон"

### ОБЗОР ПРОБЛЕМЫ

Предметом исследования данной статьи является аппаратная функция электростатических электронных спектрометров. Следуя монографии [1], аппаратную функцию  $A(E,U)$  можно определить как зависимость выходного тока энергоанализатора от энергии настройки  $U$  при условии, что источник ионов моноэнергетический,  $E = \text{const}$ . Ценность этой функции состоит в том, что с ее помощью можно записать явную связь между реальным электрическим током  $J(U)$  на детекторе спектрометра и энергетическим спектром  $f(E)$  выбранного физического источника электронов в виде некоего интегрального соотношения. Из него, в принципе, можно найти точную форму спектра  $f(E)$  по экспериментально измеренной функции  $J(U)$ , как решение соответствующего интегрального уравнения, в котором аппаратная функция  $A(E,U)$  играет роль ядра. Несмотря на очевидную пользу от самого понятия "аппаратная функция", в большинстве работ по теории спектрометров в первую очередь изучаются такие электронно-оптические параметры, как порядок угловой фокусировки, линейная энергетическая дисперсия, удельная энергетическая дисперсия, светимость, пропускание, разрешающая способность, чувствительность, и где-то на обочине, вскользь упоминается аппаратная функция [1–3].

Причина такого пренебрежения, по-видимому, объясняется слабым интересом физиков к кон-

кретной форме энергетических спектров. До сих пор их вполне устраивало знание точного места пиков на шкале энергий, амплитуды и полуширины. Однако положение вещей постепенно меняется, и уже появился целый ряд работ, посвященных вычислению аппаратной функции для различных систем энергоанализа и решению задачи восстановления истинного спектра по измеренному току на детекторе прибора. В этих статьях мы вдруг обнаруживаем значительные расхождения во мнениях. Факт несколько неожиданный. Так, в работах [1, 4, 5] связь функций  $J(U)$  и  $A(E,U)$  постулируется без всякой мотивировки в виде классической свертки

$$J(U) = C \int_0^{\infty} A(E-U) f(E) dE, \quad (1)$$

и предлагаются свои алгоритмы для вычисления  $f(E)$ . В статье [6] приводится без вывода другая формула связи

$$J(U) = C \int_0^{\infty} A\left(\frac{U}{E}\right) f(E) dE, \quad (2)$$

и предлагается свой рецепт приближенного восстановления  $f(E)$ . В работах [7, 8] используется выражение (2), но уже с некоторой долей физического обоснования. Так, в статье [7] довольно убедительно показано, что свертка (1) принципиально неприменима к спектрометрам, т. к. она несовместима с механическим принципом подобия. В свою очередь уравнение (2) предлагается из общих со-

ображений, как более логичная конструкция, подчиняющаяся физическим правилам подобия траекторий, но также без сколь-нибудь строгого математического доказательства. На базе уравнения (2) авторы предлагают и свой метод определения  $f(E)$ , который, по сути, является небольшим видоизменением подхода из [6]. Авторы [7] полагают свой алгоритм весьма общим, точным и универсальным. Мы эту высокую оценку, отнюдь, не разделяем по следующей причине. Если свертка (1), в принципе, не отражает работу спектрометров, то связь (2), хоть и ближе к делу, но тоже не верна и требует изрядных уточнений.

Более корректно в литературе поставлен вопрос о вычислении собственно аппаратных функций, хотя и здесь общие свойства до конца не выяснены. Например, в [1] в весьма громоздкой форме исследована аппаратная функция плоского конденсатора, но до решения обратных задач восстановления спектра  $f(E)$  дело, конечно, не дошло. Интересной попыткой вычисления конкретных аппаратных функций численными методами является работа [9]. Она проясняет и возможную геометрию аппаратных функций. Подводя итоги этого обсуждения, мы вправе заключить, что вопрос об аппаратной функции достаточно запутан и нуждается в тщательном математическом рассмотрении. Заметим еще, что аппаратная функция не характеризует энергоанализатор сам по себе, но непременно в связке с типом используемого электронного источника. В самом общем случае стационарный источник электронов можно описать плотностью эмиссии  $j$ , которая зависит от координат рождения электронов  $\xi, \eta, \lambda$ , кинетической энергии  $E = mV^2/2$  и углов  $\theta, \gamma$ , определяющих направление вектора скорости  $\mathbf{V}$  вылета электронов

$$j = F(\xi, \eta, \lambda, \theta, \gamma, E). \quad (3)$$

Если электроны рождаются в некоторой области пространства с различными направлениями скорости, то при каждом конкретном наборе чисел  $\xi, \eta, \lambda, \theta, \gamma$  будет получаться свой энергетический спектр. Об энергетическом спектре  $f(E)$  такого интегрального источника можно говорить только в том случае, если  $F$  распадается на множители вида

$$j = F = R(\xi, \eta, \lambda, \theta, \gamma) \cdot f(E). \quad (4)$$

Именно с такими источниками имеют дело в обычном энергоанализе, исключение составляют специальные задачи, как, например электронная спектроскопия с угловым разрешением. Характер функций  $R$  играет исключительную роль в гене-

зисе аппаратных функций, какую бы электродную конфигурацию мы не использовали в качестве энергоанализатора. Легко представить, сколь неозрима эта область. Упомянутые выше работы вообще игнорируют данные факты, и, может быть, поэтому аппаратная функция выглядит несколько загадочным объектом.

Цель данной статьи заключается в том, чтобы математически более корректно разобраться в структуре и классификации аппаратных функций, выводе правильного интегрального соотношения между током  $J(U)$  и спектром  $f(E)$ , а также в выработке общих подходов к решению возникающих интегральных уравнений.

В нашей работе мы будем пользоваться безразмерной моделью описания полей и траекторий, введенной в [10], которая минимизирует число символов и существенно упрощает как математические выкладки, так и физическую интерпретацию. Для наглядности изложим ее кратко, но достаточно полно для понимания.

### БЕЗРАЗМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Введем в декартовом физическом пространстве  $X, Y, Z$  не определенный пока линейный масштаб  $\ell$  (в метрах) и безразмерные декартовы координаты  $x, y, z$ , связав их равенствами

$$X = \ell x, \quad Y = \ell y, \quad Z = \ell z. \quad (5)$$

Кроме того, введем временной масштаб  $T$  (в секундах) и свяжем реальное время  $t$  с безразмерным текущим параметром времени  $\tau$  выражением

$$t = T \tau. \quad (6)$$

Введем физический потенциал электрического поля формулой

$$\Phi = \Phi_0 \cdot \phi(x, y, z) + \Phi_1, \quad (7)$$

где  $\phi(x, y, z)$  — безразмерный лапласов потенциал, а  $\Phi_0, \Phi_1$  — физические постоянные с размерностью потенциала (в вольтах). Функция  $\phi$  характеризует эквипотенциальный портрет поля — его геометрию — безотносительно к размерам и физическим значениям эквипотенциалей. Пусть по каким-то соображениям мы выбрали две эквипотенциали с номерами  $\phi_1$  и  $\phi_2$  в качестве ползающих, окаймляющих рабочую камеру анализатора. Если домножить координаты  $x, y, z$  на этих поверхностях на выбранный масштаб  $\ell$ , то получатся формы реальных электродов. Запитаем их реальными электрическими напряжениями, полагая, например, на эквипотенциали  $\phi_1$  потенциал

нулевым, а на  $\phi_2$  подадим потенциал  $Q$ , тогда получим из (7) следующие связи:

$$\begin{cases} \Phi_0 \phi_1 + \Phi_1 = 0, \\ \Phi_0 \phi_2 + \Phi_1 = Q. \end{cases} \quad (8)$$

Решая эту систему относительно  $\Phi_0, \Phi_1$ , получим:

$$\Phi_0 = \frac{Q}{\phi_2 - \phi_1}, \quad \Phi_1 = Q \frac{\phi_1}{\phi_1 - \phi_2}. \quad (9)$$

Тем самым мы всегда можем связать параметры электрического питания с характерным потенциалом  $\Phi_0$ , который определяет силовое воздействие поля на частицы. Наиболее проста эта связь, если  $\phi_1$  и  $\phi_2$  выбраны из условия

$$\phi_2 - \phi_1 = 1, \quad (10)$$

тогда

$$\Phi_0 = Q. \quad (11)$$

Обратимся теперь к динамике частицы с зарядом  $q$  и массой  $m$  и запишем функцию Лагранжа в физических переменных  $X, Y, Z, t$  и безразмерных переменных  $x, y, z, \tau$ , обозначив производные по  $\tau$  точкой,

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \left\{ \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dY}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dZ}{dt} \right)^2 \right\} - \\ &\quad - q\Phi_0 \phi(x, y, z) = \\ &= \frac{m\ell^2}{T^2} \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - q\Phi_0 \phi(x, y, z). \end{aligned} \quad (12)$$

Постоянную  $\Phi_1$  в потенциале мы отбрасываем, т. к. она исчезает в уравнениях Лагранжа.

Пусть для удобства  $q\Phi_0 > 0$ , ибо нужный знак, определяющий направление силы, действующей на частицу, всегда можно ввести в состав безразмерного потенциала  $\phi(x, y, z)$ . Линейный масштаб  $\ell$  можно подчинить практическим соображениям, например связав его с габаритами предлагаемой электродной конфигурации или с базой осевой траектории. Выбор временного масштаба  $T$  остается на нашем усмотрении, подчиним его условию

$$m \frac{\ell^2}{T^2} = q\Phi_0. \quad (13)$$

Из выражения (12) тогда выделяется общий множитель, который можно сократить в силу инвариантности уравнений Лагранжа относительно операции умножения функции Лагранжа на про-

извольную постоянную. В результате можно написать безразмерную функцию Лагранжа, свободную от лишних символов

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - \phi(x, y, z). \quad (14)$$

Характерная единица времени  $T$  при этом имеет величину

$$T = \ell \sqrt{\frac{m}{q\Phi_0}}. \quad (15)$$

Дифференциальные уравнения движения для  $L$  из (14):

$$\ddot{x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (16)$$

Физические начальные данные движения  $(X_0, Y_0, Z_0, V_1, V_2, V_3)$  при переходе к безразмерным величинам преобразуются, как

$$x_0 = \frac{X_0}{\ell}, \quad y_0 = \frac{Y_0}{\ell}, \quad z_0 = \frac{Z_0}{\ell}, \quad (17)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{T}{\ell} V_1, \quad \dot{y}_0 = \frac{T}{\ell} V_2, \quad \dot{z}_0 = \frac{T}{\ell} V_3. \quad (18)$$

Введем в (18)  $\frac{T}{\ell}$  из условия (15), тогда

$$\dot{x}_0 = \sqrt{\frac{m}{q\Phi_0}} V_1, \quad \dot{y}_0 = \sqrt{\frac{m}{q\Phi_0}} V_2, \quad \dot{z}_0 = \sqrt{\frac{m}{q\Phi_0}} V_3. \quad (19)$$

Составим еще величину  $W = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}{2}$  — безразмерную кинетическую энергию. С помощью (19) получим для  $W$  выражение

$$W = \frac{1}{q\Phi_0} \cdot \frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}{2} = \frac{E}{q\Phi_0}. \quad (20)$$

Таким образом, параметр  $W$  выражает начальную кинетическую энергию  $E$  частицы в долях характерной потенциальной энергии поля  $(q\Phi_0)$ . Итак, мы осуществили преобразование реальной физической системы (поле, частица) в абстрактный математический образ — безразмерную модель. Она отличается максимальной лаконичностью и позволяет изучать все нужные "энергоанализирующие характеристики" в форме, свободной от реальных размеров и величин напряженности реальных полей. В эту сторону переход вполне однозначен, когда  $m, q, \ell, \Phi_0, E$  выбраны конкретно, однако обратный путь от абстрактной математической траектории в физический мир мно-

гозначен и допускает различные физические интерпретации. Предположим, что мы "заморозили" числа  $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ , тогда в пространстве  $x, y, z, \tau$  образуется строго одна кривая — траектория со своей кинематикой частиц вдоль нее. В физическом мире этой кривой соответствует бесконечное множество взаимно подобных кривых, т. к. в силу (17) мы можем пропорционально менять  $X_0, Y_0, Z_0$  и  $\ell$  лишь бы сохранялись левые части. Точно так же в правых частях (19) мы можем менять  $m, q, \Phi_0, V_1, V_2, V_3$  без изменения левых частей, а в соотношении (20) можно пропорционально менять энергию  $E$  и величину  $q\Phi_0$  при неизменном  $W$ . Из всего этого легко прочитываются все стандартные правила подобия, которые изучаются в физике и электронной оптике с помощью менее наглядных рассуждений. Здесь же все происходит само собой. Первое, что немедленно из всего этого следует — принцип электрической развертки в электронных спектрометрах. Допустим, что в какой-то полевой структуре мы построили поток частиц с энергией  $E$  и разбросом  $\Delta E$ . Отображенный в безразмерное пространство он даст семейство траекторий с безразмерной энергией

$$W = \frac{E}{q\Phi_0} \quad (21)$$

и ее разбросом

$$\Delta W = \frac{\Delta E}{q\Phi_0}. \quad (22)$$

Если в физическом пространстве поток был сфокусирован при конкретном потенциале  $\Phi_0$  на реальную щель размера  $d$ , то в безразмерном пространстве он будет сфокусирован на щель

$$S = \frac{d}{\ell}. \quad (23)$$

Если рассматривать величину  $U = q\Phi_0$ , как энергию развертки, и пропорционально менять в (21), (22) величины  $E, \Phi_0$  и  $\Delta E$  так, чтобы левые части  $W, \Delta W$  сохранялись, то поток безразмерных траекторий  $x(\tau), y(\tau), z(\tau)$  останется неизменным, а вместе с ним остаются неизменными физические потоки при соответствующей перестройке энергий и потенциалов. За счет этого свойства и появляется возможность приводить электроны спектра последовательными группами на детектор за счет вариации потенциала настройки  $\Phi_0$ . Отсюда же следует и постоянство относительной ошибки измерения  $E$  вдоль всего спек-

тра, ибо из (21), (22)

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta E}{E} = \text{const}. \quad (24)$$

Таким образом, фокусирующие свойства системы, ее линейную и удельную дисперсии, разрешающую способность и светосилу удобно изучать и оптимизировать в построенной нами безразмерной модели. При конструировании реального прибора физические параметры легко получаются из безразмерных умножением на соответствующие характерные значения. На этой базе легко понять и математическую природу аппаратных функций.

### ВЫВОД ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО СООТНОШЕНИЯ

Генезис аппаратных функций лучше всего постигается при использовании самых простейших источников и полей, образующих простые дугообразные электронные струи. Мы остановимся на плоском варианте, полагая, что движение происходит под действием сил с безразмерным потенциалом  $\phi(x, z)$ . Эту плоскость можно ассоциировать и как основную плоскость двумерных полей так, что

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (25)$$

Либо это меридиональная плоскость осесимметричного поля, и потенциал  $\phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа для полей с круговой симметрией

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (26)$$

Либо  $(x, y)$  — плоскость симметрии трехмерного поля с потенциалом  $\psi(x, y, z)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (27)$$

$$\psi|_{y=0} = \phi(x, z). \quad (28)$$

Для простоты рассуждений положим, что

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x>0} > 0. \quad (29)$$

Тогда для частиц, стартующих из области начала координат  $x = z = 0$ , электронные траектории образуют дуги, пересекающие ось  $z$ . Здесь мы и расположим селектирующую щель и детектор частиц  $B$  (рис. 1).

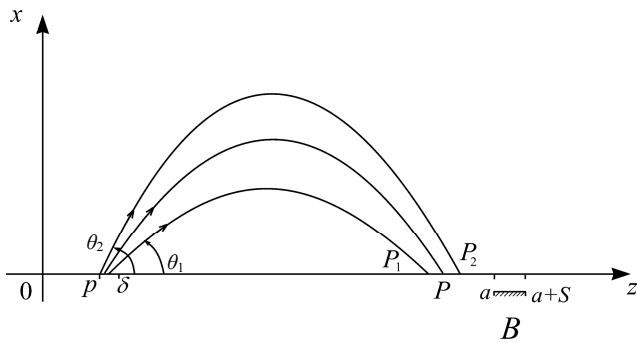


Рис. 1. Схема работы электронного спектрометра на базе двумерного поля.

$[p, \delta]$  — источник;  $[P_1, P_2]$  — пятно засветки;  $[a, a+S]$  — селектирующая щель;  $B$  — детектор

Динамика частиц описывается здесь системой с начальными данными

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, & x|_{\tau=0} = 0, & \left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \dot{x}_0 = \sqrt{2W} \sin \theta; \\ \dot{z} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, & z|_{\tau=0} = p, & \left. \frac{dz}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \dot{z}_0 = \sqrt{2W} \cos \theta, \end{cases} \quad (30)$$

$$W = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{z}_0^2}{2} = \frac{E}{U}, \quad U = q\Phi_0. \quad (31)$$

Интегрируя эти уравнения, получим зависимости

$$x = x(\tau, p, \theta, W), \quad z = z(\tau, p, \theta, W). \quad (32)$$

Полагая  $x=0$ , находим момент встречи  $\tau^*$  траектории с осью  $z$ ; это значение далее встраиваем в зависимость  $z(\tau, p, \theta, W)$  и получаем основную функцию такого абстрактного энергоанализатора

$$z|_{\tau=\tau^*} = P(p, \theta, W). \quad (33)$$

В ней содержится вся основная информация об энергоанализирующих свойствах системы: о качестве фокусировки, о величине дисперсии  $D = W \frac{\partial P}{\partial W}$ , о разрешающей способности  $\frac{W}{\Delta W}$ , светимости и светосиле, но, конечно, в рамках этой плоской модели. Все это можно изучить только при конкретном задании потенциала  $\phi(x, z)$ , однако нас интересует общая ситуация и вносить какую-либо конкретность нам нежелательно.

Энергоанализ заключается в том, что через щель  $S$  мы пропускаем поток траекторий со средним значением  $W_0$  и разбросом  $\Delta W$  возле него. В силу соотношения (31), меняя  $\Phi_0$ , мы сможем приводить на детектор  $B$  последовательными группами все электроны спектра  $f(E)$  заданного источника с функцией эмиссии

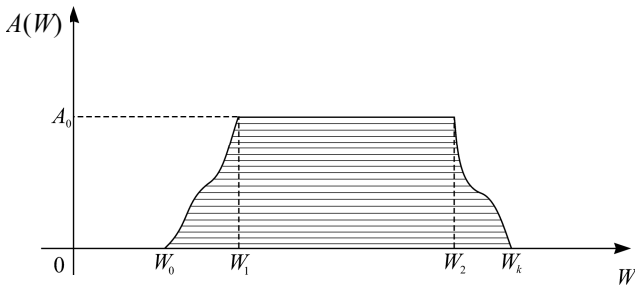
$$j = R(p, \theta) \cdot f(E). \quad (34)$$

Абсолютное значение разброса  $\Delta E$ , пропускаемого щелью, линейно нарастает вместе с основной энергией  $E$ . Здесь сразу же обнаруживается свойство практически любых систем такого типа, заключающееся в том, что мы обязаны заранее обрезать интервалы изменения начальных данных на источнике, ибо вполне может оказаться, что при любой энергии  $W$  найдется набор начальных данных, гарантирующий пролет через щель. Следовательно, в этом случае ни о каком энергоанализе не может быть и речи. Положение можно исправить только ценой ограничения на стартовые условия. В нашем варианте они таковы:

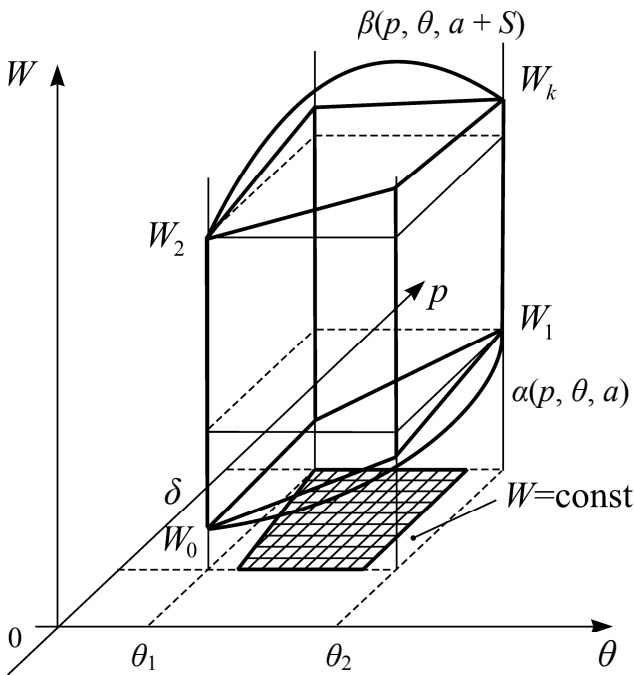
$$\begin{cases} 0 \leq p \leq \delta, \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2. \end{cases} \quad (35)$$

Пусть  $W = \text{const}$  — фиксированная величина. Поток частиц, удовлетворяющий условиям (35), создаст на оси  $z$  сплошной отрезок  $P_1 P_2$  — пятно засветки. Линейная плотность потока вдоль этого отрезка может меняться весьма прихотливым образом в зависимости от характера функции  $R(p, \theta)$ , но это для нас пока неважно. При вариации  $W$  пятно засветки движется как целое и, кроме того, оно может меняться по размерам. Конечно, желательно, чтобы центр пятна засветки с ростом  $W$  перемещался монотонно вдоль  $z$  в положительном направлении. Тогда можно найти область значений, при которых пятно пересекает щель  $S$ .

Теперь настал момент ввести понятие аппаратной функции. Рассуждаем следующим образом: Пусть  $E$  в (31) — фиксированная величина, то есть источник стал моноэнергетичным. Будем менять энергию настройки  $U$  (или потенциал настройки  $\Phi_0$ ), тогда  $W$  будет меняться за счет  $U$ , причем малым  $U$  отвечают большие  $W$ . Теперь можно проследить эволюцию пятна засветки  $P_1 P_2$  вдоль оси в процессе вариации энергии настройки  $U$ , то есть и в процессе изменения  $W$ . Заметим попутно, что линейное во времени изменение  $U$  сопровождается нелинейным изменением  $W$ , причем при каждом значении  $E$  темп этого изменения различный. Однако на данном этапе рассмотрения это не столь уж и важно. Итак, наращивая  $W$  от малых значений за счет изменения  $U$ , мы добьемся, что



**Рис. 2.** Вид аппаратной функции спектрометра в общем случае, когда щель гораздо больше пятна засветки  $S \gg \delta$



**Рис. 3.** Объемная область в пространстве параметров  $p, \theta, W$ , которая определяется их вариациями

при каком-то  $W_0$  граница пятна засветки  $P_2$  достигнет левого края щели  $z = a$  и пучок начнет "проваливаться" на детектор, создавая ток  $A(W)$ . Если щель достаточно велика по сравнению с отрезком  $P_1P_2$ , то ток  $A(W)$  будет расти монотонно, пока точка  $P_1$  не "упрется" в левый край щели  $z = a$  при  $W = W_1 > W_0$ . После этого некоторое время (изменения  $W$ ) ток на детекторе будет постоянен  $A(W) = \text{const}$ , пока точка  $P_2$  не достигнет правого края щели  $z = a + S$  при  $W = W_2$ , и пятно

засветки начинает уходить за пределы щели, и ток  $A(W)$  начинает монотонно падать до момента, пока  $P_1$  не достигнет точки  $z = a + S$  при  $W = W_k$ . В результате эпюра тока  $A(W)$  принимает вид трапеции с криволинейными боками (рис. 2).

Ширина горизонтального участка определяется соотношением размера пятна засветки и ширины щели  $S$ . Если они совпадают, то края трапеции сближаются, горизонтальная часть исчезает и трапеция превращается в треугольник. Если и далее сокращать щель  $S$ , то высота треугольника и основание  $(W_k - W_0)$  будут сокращаться. Разрешение системы нарастает, но чувствительность падает. Построенный ток  $A(W)$  и есть искомая аппаратная функция. Самую большую сложность представляет вычисление формы криволинейных участков. Это легко сделать компьютерным способом в безразмерных координатах, но гораздо большую пользу приносят те случаи, когда эти берега аппаратной функции удастся найти в явной аналитической форме. Ниже мы построим такие примеры. Подчеркнем, что при монотонном движении пятна засветки с ростом  $W$  совершенно очевиден монотонный характер кривых боков трапеции (рис. 2). Этот факт весьма ценный для всей последующей теории.

Приведем теперь схему расчета аппаратной функции при заданной функции распределения электронов на эмиттере  $R(p, \theta)$ . Построим пространство параметров  $p, \theta, W$  (рис. 3). Неравенства (35) вырезают в полупространстве  $W > 0$  прямоугольную трубу. Далее мы должны подчинить функцию прилета  $P(p, \theta, W)$  условиям попадания в щель между  $z = a$  и  $z = a + S$ , что эквивалентно неравенствам

$$a \leq P(p, \theta, W) \leq a + S. \quad (36)$$

Беря в (36) знак равенства и разрешая соответствующие уравнения относительно  $W$ , мы получим две граничные поверхности

$$\begin{cases} W = \alpha(p, \theta, a), \\ W = \beta(p, \theta, a + S). \end{cases} \quad (37)$$

Они вместе с неравенствами (35) вырезают в фазовом пространстве источника  $p, \theta, W$  сложную объемную фигуру, которая в общем случае достаточно широкой щели состоит из центрального прямоугольного бруса и двух криволинейных наростов сверху и снизу (рис. 3). Чтобы вычислить аппаратную функцию системы с заданной плотностью  $R(p, \theta)$  мы должны пересечь фигуру на рис. 3 плоскостью  $W = \text{const}$  и при каждом ее по-

ложении фиксировать сечение ею допустимой области прилета  $\Omega(W)$  и далее интегрировать ее по  $\theta$  и  $p$ . Тогда для  $A(W)$  получим выражение

$$A(W) = \iint_{\Omega(W)} R(p, \theta) dp d\theta. \quad (38)$$

Двигаясь от значения энергии  $W_0$ , при которой, очевидно,  $\Omega(W_0) = 0$ , мы построим левый берег трапеции (рис. 2) вплоть до точки  $W_1$ , где сечение станет прямоугольником, неизменным вплоть до точки  $W_2$ . На этом участке функция  $A$  сохраняет постоянное значение, что отвечает горизонтальному участку трапеции. Двигаясь дальше к  $W_k$ , мы построим правый берег трапеции (аппаратной функции). Таким образом, в общем случае ход аппаратной функции всегда разрывной и состоит по крайней мере из трех ненулевых фрагментов

$$A = \begin{cases} 0, & 0 < W < W_0; \\ A_1(W), & W_0 < W < W_1; \\ A_0, & W_1 < W < W_2; \\ A_2(W), & W_2 < W < W_k; \\ 0, & W > W_k. \end{cases} \quad (39)$$

Сложность всех этих вычислительных процедур определяется характером функций  $P(p, \theta, W)$  и  $R(p, \theta)$ . Уменьшая  $S$ , мы можем добиться исчезновения центральной части бруса на рис. 3, так что  $W_1 = W_2$ . Аппаратная функция становится треугольной. Дальнейшее уменьшение  $S$  ведет к тому, что уже сами поверхности  $\alpha(p, \theta, a)$  и  $\beta(p, \theta, a + S)$  начинают пересекаться между собой и область  $(W, p, \theta)$ , определяющая пролет через щель начинает сокращаться. Падает чувствительность прибора. Можно предположить, что в каких-то особо сложных нетипичных случаях аппаратная функция распадается на более чем 3 фрагмента. Все определяется геометрией фигуры на рис. 3. Распространение данных рассуждений на пространственную ситуацию, когда потенциал явно зависит от всех трех координат  $x, y, z$ , электронная струя носит объемный характер, а выходная щель имеет форму круга, прямоугольника, эллипса и тому подобное, в действительности отличается только усложнением вычислительных элементов, но принцип остается тем же: Решается система (16), определяются координаты пересечения траекторий с плоскостью выходной щели, теперь их две  $P(\xi, \eta, \lambda, \theta, \gamma, W)$  и  $Q(\xi, \eta, \lambda, \theta, \gamma, W)$ . Далее

в пространстве начальных данных, ограниченных дополнительными условиями, строится гипертело пропускания, которое сечется гиперплоскостями  $W = \text{const}$ , и интегралы по этим сечениям от плотности на эмиттере  $R(\xi, \eta, \lambda, \theta, \gamma)$  как раз и дают искомые фрагменты аппаратной функции. Здесь обстановка неизмеримо более сложная по сравнению с плоскими потоками, ибо в игру еще вступает форма выходной щели. Однако и здесь типичной формой аппаратной функции будет трапеция с криволинейными боками, при малых размерах щели вырождающаяся в треугольник.

### ОСНОВНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Теперь остается вычислить ток через щель анализатора  $J(U)$  при наличии распределенного спектра  $f(E)$  на источнике. Как мы установили, аппаратная функция  $A$  зависит от отношения

$$W = \frac{E}{U}$$

$$A = A(W) = A\left(\frac{E}{U}\right), \quad (40)$$

и полный ток через щель, очевидно, можно записать в виде интеграла

$$J(U) = \int_0^{\infty} A\left(\frac{E}{U}\right) f(E) dE. \quad (41)$$

Однако специфика аппаратной функции такова, что она обращается в нуль на крыльях  $0 < W < W_0$  и  $W > W_k$ , следовательно, интегрирование имеет смысл только на интервале  $W_0 < W < W_k$ . Из условий

$$W_0 = \frac{E_0}{U}, \quad W_k = \frac{E_k}{U} \quad (42)$$

при каждом фиксированном  $U$  можно вычислить соответствующие значения  $E_0$  и  $E_k$ , определяющие концы интегрирования в (41):

$$E_0 = W_0 U, \quad E_k = W_k U. \quad (43)$$

В результате интеграл (41) приобретает форму

$$J(U) = \int_{W_0 U}^{W_k U} A\left(\frac{E}{U}\right) f(E) dE. \quad (44)$$

В общем случае, когда  $A$  имеет разное представление на трех фрагментах своей трапеции, интеграл представится суммой вида

$$J(U) = \int_{w_0 U}^{w_1 U} A_1 \left( \frac{E}{U} \right) f(E) dE + A_0 \int_{w_1 U}^{w_2 U} f(E) dE + \int_{w_2 U}^{w_3 U} A_2 \left( \frac{E}{U} \right) f(E) dE. \quad (45)$$

Подведем итоги. Мы окончательно продемонстрировали, что свертка (1) не имеет никакого отношения к теории электронных спектрометров. Кроме того, мы строго доказали, что аппаратная функция  $A$  явно зависит от отношения  $\left(\frac{E}{U}\right)$ , а не

от обратного отношения  $\left(\frac{U}{E}\right)$  как в (2) [6–8]. Может показаться, что эта разница несущественна и легко устраняется инверсией переменной, но это явное заблуждение, т. к. гладкая аналитическая функция относительно переменной  $W$  может оказаться разрывной относительно переменной  $\frac{1}{W}$ .

Таким образом, формула (2) объективно неверна. И, наконец, связь  $J(U)$  и  $f(E)$  всегда трактовалась относительно  $f(E)$  как уравнение Фредгольма I рода, но теперь в окончательной форме (44) это уравнение следует отнести к типу уравнений Вольтерра I рода, в силу того что пределы интегрирования переменные. Разумеется, существует математическая точка зрения, что уравнение Вольтерра можно рассматривать, как частный случай уравнения Фредгольма с "треугольным ядром", но тут же указывается, что в силу переменности пределов интегрирования для них приходится развивать особую технику решения, отличную от случая уравнений Фредгольма [11]. С этим обстоятельством в нашем случае приходится считаться со всей серьезностью, когда решается задача восстановления истинного спектра  $f(E)$

по измеренному току  $J(U)$ . Можно ли найти какие-то общие формулы для решения уравнения (44) без всякой конкретизации аппаратной функции  $A(W)$ ? На наш взгляд, это бессмысленно и чревато радикальными ошибками. Здесь все определяется нюансами поведения ядра интегрального уравнения  $A\left(\frac{E}{U}\right)$ , поэтому нас несколько не убеждает опыт работ [6, 7], в которых авторы пытаются строить общие алгоритмы и без всяких оснований настаивают на их точности. Конечно, если предполагать, например, что эпюра аппаратной функции имеет вид прямолинейной трапеции и треугольника, то можно построить точные или

приближенные решения относительно  $f(E)$ , но имеют ли они ценность? Следует еще добавить, что на практике сама форма тока  $J(U)$  обычно ассоциируется с формой истинного спектра  $f(E)$ , и это соответствие тем ближе, чем выше разрешающая способность прибора. Однако при очень малых токах определяющую роль начинает играть отношение сигнал/шум, и значение уравнения (44) как источника информации об истинном спектре  $f(E)$  существенно возрастает. Как нам кажется, за счет раскрытия щели (увеличения  $S$ ) можно поднять полезный ток, увеличив отношение сигнал/шум и при этом без утраты информации о спектре, если достаточно точно решать уравнение (44) относительно  $f(E)$ . Для того чтобы составить верное суждение о трансформирующем действии конкретного анализатора с выбранным типом источника (вид функции  $R$ ), желательно вычислить ток для ряда типичных форм спектра  $f(E)$ . На этом пути легко найти и ключ к решению обратной задачи — определению  $f(E)$ , поскольку станет ясно, какими функциями надо аппроксимировать сигнал  $J(U)$ , чтобы получить  $f(E)$  в явном выражении.

В этой статье мы ограничимся только некоторыми наметками общего подхода, поскольку эта тема большого отдельного исследования. Построенная общая схема нуждается в иллюстрациях конкретного характера. Несмотря на разрывной характер аппаратной функции в целом, каждый фрагмент ее в (39) обычно аналитичен, поэтому все интегральные операторы в (45) порознь аналитичны и отображают гладкую дифференцируемую функцию  $f(E)$  в сигналы  $J_1(U)$ ,  $J_2(U)$  и  $J_3(U)$  такой же гладкой природы. Этот факт сильно облегчает аналитическую теорию решения уравнения (44). Обратимся к примерам из теории плоского электростатического зеркала в самых простых режимах работы. Несмотря на кажущуюся тривиальность, мы обнаружим в этом материале много нового, если смотреть на него с позиций нашей теории.

### ОДНОРОДНОЕ ПОЛЕ

Положим

$$\phi = x. \quad (46)$$

Интегрируя уравнения

$$\ddot{x} = -1, \quad \ddot{z} = 0 \quad (47)$$

с учетом начальных данных



$$\begin{aligned} x_0 = 0, \quad z_0 = p, \quad \dot{x}_0 = \sqrt{2W} \sin \theta, \\ \dot{z}_0 = \sqrt{2W} \cos \theta, \end{aligned} \quad (48)$$

получим

$$x = -\frac{\tau^2}{2} + \sqrt{2W} \sin \theta \cdot \tau, \quad z = \sqrt{2W} \cos \theta \cdot \tau + p. \quad (49)$$

Отсюда находим функцию прилета  $P$  на ось  $z$ :

$$P = 2W \sin 2\theta + p. \quad (50)$$

Щель расположена в области  $a \leq z \leq a + S$ . Варьируя характер функции эмиссии  $R(p, \theta)$ , мы получим разные профили аппаратной функции.

### Режим 1

Простейший идеализированный источник электронов можно представить себе в виде бесконечно тонкой струйки интенсивности  $J_0$ , распределенной по энергиям с плотностью  $f(E)$ , нормированной так, что

$$\int_0^{\infty} f(E) dE = J_0. \quad (52)$$

Струйка впрыскивается в плоский конденсатор через точку  $x = z = 0$  под углом  $\theta_0$ . Очертив дугу, частицы вернутся на ось в точках

$$P = K \cdot W, \quad K = 2 \sin 2\theta. \quad (53)$$

Моноэнергетичный источник  $E = \text{const}$  той же интенсивности  $J_0$  можно описать  $\delta$ -функцией Дирака. В этом случае при  $U = \text{const}$ , т. е.  $W = \text{const}$ , пятно засветки суть точка с координатой (53), движущаяся вправо по оси  $z$  с ростом  $W$ , если энергия настройки  $U$ , напротив, меняется от больших значений к меньшим. Пока точка засветки  $P$  не достигнет левого края щели  $z = a$ , ток на детекторе за щелью есть нуль. Как только точка сместится чуть правее, при

$$W_0 = \frac{a}{K}, \quad (54)$$

ток достигает максимального значения  $J_0$  и сохраняет эту величину вплоть до

$$W_k = \frac{a + S}{K}, \quad (55)$$

когда точка достигнет правого края щели  $z = a + S$ , после чего ток на детекторе исчезает. Таким образом, аппаратная функция  $A$ , каковой является наблюдаемый нами ток, в данном случае имеет вид прямоугольника, дополненного "нуле-

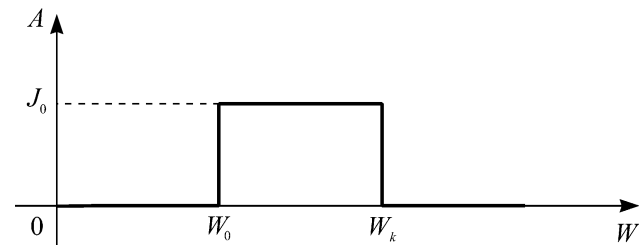


Рис. 4. Аппаратной функции от точечного источника в плоском электростатическом зеркале

выми крыльями" (рис. 4). С помощью этих величин составляем интегральное выражение тока  $J(U)$  в предположении, что теперь спектр  $f(E)$  — произвольная, обычно гладкая функция, нормированная условием (52). Следуя формуле (44), можно записать

$$J(U) = J_0 \int_{W_0 U}^{W_k U} f(E) dE. \quad (56)$$

По-видимому, это самый простой тип интегрального уравнения, который вообще можно встретить в теории энергоанализаторов. Если продифференцировать данное уравнение Вольтерра по  $U$ , то оно превращается в функциональное уравнение вида

$$J'(U) = J_0 [W_k f(W_k U) - W_0 f(W_0 U)]. \quad (57)$$

Это уравнение можно решить точно разными способами, сведя например с помощью экспоненциальной замены переменной к уравнению в конечных разностях и далее применяя стандартный фурье-анализ.

### Режим 2

Обобщим предыдущую ситуацию и рассмотрим непрерывный ряд параллельных струек, заполняющих полосу

$$0 < p < \delta \quad (58)$$

с однородной плотностью

$$j = \frac{J_0}{\delta}. \quad (59)$$

Полагая сначала струю моноэнергетической  $E = \text{const}$ , проследим динамику пятна засветки, которое здесь имеет неизменную ширину  $\delta$  в процессе развертки  $U$ . Пятно движется как целое с ростом  $W$  по закону

$$P = K \cdot W + p \quad (60)$$

и достигает края щели  $z = a$  при

$$W_0 = \frac{a - \delta}{K}. \quad (61)$$

В этот момент на детекторе начинает нарастать ток, очевидно, по линейному закону относительно  $W$ . Если щель много шире струи  $S \gg \delta$ , то ток  $A(W)$  будет расти, пока струя полностью не войдет в щель при  $P|_{p=0} = a$ , или

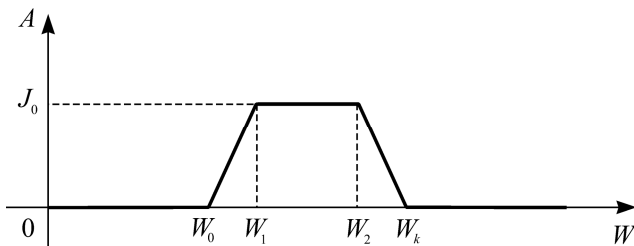
$$W_1 = \frac{a}{K}. \quad (62)$$

Ток при этом достигает своего максимума  $J_0$  и сохраняется при росте  $W$  до значения

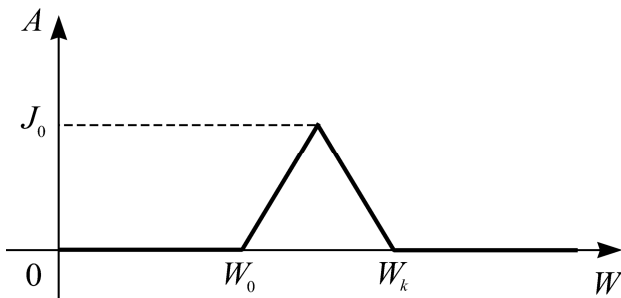
$$W_2 = \frac{a + S - \delta}{K}, \quad (63)$$

когда правый край струи  $p = \delta$  не достигнет правого края щели  $z = a + S$ , после чего ток будет падать по линейному закону до значения  $W_k$

$$W_k = \frac{a + S}{K}, \quad (64)$$



**Рис. 5.** Аппаратная функция от моноэнергетического источника с параллельным вводом пучка небольшой протяженности  $\delta$  в плоском электростатическом зеркале



**Рис. 6.** Видоизмененная аппаратная функция при совпадении размеров пятна засветки  $\delta$  и выходной щели  $S$

когда и левая граница струи  $p = 0$  уйдет за пределы щели, и на детекторе ток  $A(W)$  исчезнет. В результате аппаратная функция имеет график в виде симметричной трапеции с нулевыми крыльями справа и слева (рис. 5).

Будем теперь уменьшать щель  $S$  до тех пор, пока она не совпадет по ширине с поперечником струи  $\delta$

$$S = \delta. \quad (65)$$

В этом случае  $W_1 = W_2$  и горизонтальный участок трапеции исчезает. Она превращается в треугольник (рис. 6).

Дальнейшая эволюция профиля аппаратной функции при уменьшении щели по сравнению со струей ( $S < \delta$ ) заключается в том, что аппаратная функция снова превращается в трапецию с уменьшающейся высотой, причем, чем уже щель  $S$ , тем меньше высота, но основание трапеции ( $W_k - W_0$ ) плавно уменьшается вместе с  $S$  в соответствии с формулой

$$W_k - W_0 = \frac{\delta + S}{K}. \quad (66)$$

В пределе при  $S = 0$  ширина неразрешенного интервала

$$\Delta W = \frac{\delta}{K} \quad (67)$$

определяется только шириной струи, но высота трапеции  $A$  при этом стремится к нулю. С точки зрения функционирования такого анализатора наилучшим следует признать вариант треугольника (рис. 6) при  $\delta = S$ .

Запишем интегральное уравнение для спектра  $f(E)$  в общем случае широкой щели  $S \gg \delta$ ; для этого запишем аналитически аппаратную функцию:

$$A = \begin{cases} 0, & 0 < W < W_0; \\ \frac{J_0}{W_1 - W_0} \cdot (W - W_0), & W_0 < W < W_1; \\ J_0, & W_1 < W < W_2; \\ \frac{J_0}{W_k - W_2} \cdot (W_k - W), & W_2 < W < W_k; \\ 0, & W > W_k. \end{cases} \quad (68)$$

Тогда формула (45) дает уравнение

$$J(U) = \frac{J_0}{W_1 - W_0} \int_{W_0}^{W_1 U} \left( \frac{E}{U} - W_0 \right) f(E) dE +$$

$$+J_0 \int_{W_1 U}^{W_2 U} f(E) dE + \frac{J_0}{W_k - W_2} \int_{W_2 U}^{W_k U} \left( W_k - \frac{E}{U} \right) f(E) dE. \quad (69)$$

Если (69) рассматривать как уравнение Вольтерра относительно  $f(E)$  при известной (измеренной) функции  $J(U)$ , то вопрос о его точном решении требует особых подходов и отдельного исследования, что выходит за рамки нашей статьи.

**Режим 3. Фокусировка при  $\theta = \frac{\pi}{4}$**

Рассмотрим теперь классический случай точечного изотропного источника в начале координат, стреляющего в интервале углов

$$\frac{\pi}{4} - \nu < \theta < \frac{\pi}{4} + \nu, \quad (70)$$

при полной интенсивности  $J_0$ . Здесь мы должны положить

$$P = 2 \sin 2\theta \cdot W. \quad (71)$$

При  $\theta = \frac{\pi}{4}$  точка  $P$  удаляется на максимальное

расстояние, а точки  $\theta = \frac{\pi}{4} - \nu$  и  $\theta = \frac{\pi}{4} + \nu$  стоят ближе к началу координат

$$P|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = P_k = 2W, \quad (72)$$

$$P|_{\theta=\frac{\pi}{4}-\nu} = P|_{\theta=\frac{\pi}{4}+\nu} = P_0 = 2 \cos 2\nu \cdot W. \quad (73)$$

Пятно засветки здесь

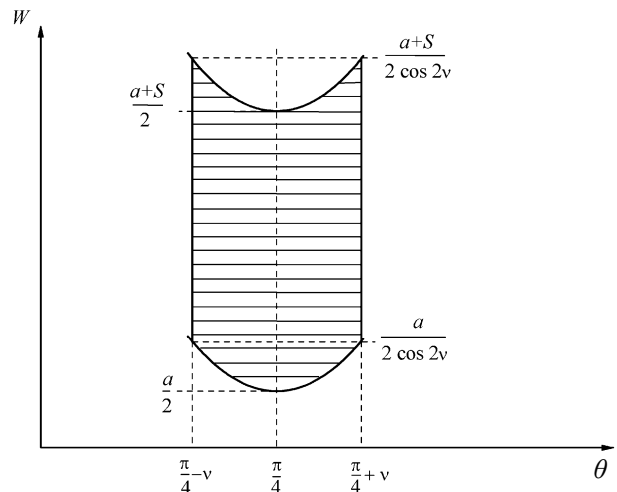
$$P_k - P_0 = 2(1 - \cos 2\nu) \cdot W. \quad (74)$$

С ростом  $W$  оно расплывается и одновременно удаляется по оси  $z$  от точки старта  $x = z = 0$ .

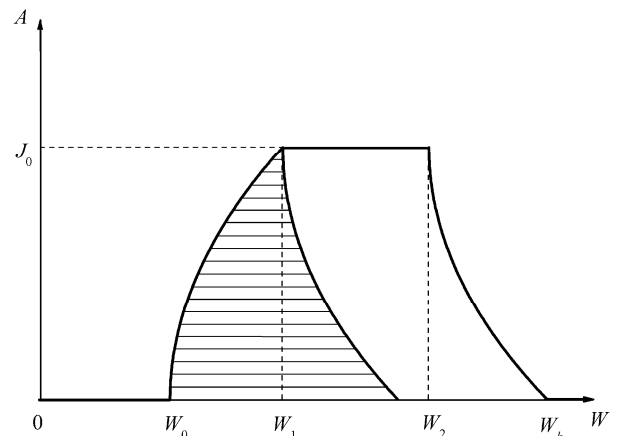
Плотность потока на пятне засветки распределена неравномерно, при увеличении  $W$  характер ее зависимости от  $\theta$  сохраняется, но интенсивность в каждой точке падает. Все это значительно усложняет картину прохождения потока через щель и генезис аппаратной функции. Здесь имеет смысл действовать по общей методике, изложенной выше, ибо одного созерцания динамики пятна уже недостаточно. На фазовой плоскости источника  $(W, \theta)$  определим область пропускания потока щелью, полагая

$$a \leq P(W, \theta) \leq a + S, \quad (75)$$

$$\frac{\pi}{4} - \nu \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} + \nu. \quad (76)$$



**Рис. 7.** Фигура пропускания на плоскости параметров  $(\theta, W)$  для точечного изотропного источника в электростатическом зеркале в режиме фокусировки I порядка  $\theta = 45^\circ$



**Рис. 8.** Аппаратная функция от точечного источника в электростатическом зеркале в режиме фокусировки I порядка  $\theta = 45^\circ$

Из (75) и (71) можно записать

$$\frac{a}{2 \sin 2\theta} \leq W \leq \frac{a + S}{2 \sin 2\theta}. \quad (77)$$

Взяв из (77) граничные кривые, с помощью (76) начертим на плоскости  $(W, \theta)$  фигуру пропускания (рис. 7), полагая, что щель  $S$  широкая. Далее мы должны пересечь фазовое пространство и проинтегрировать поток по заштрихованному фрагменту. Ввиду изотропности источника все сводится к умножению вариации угла  $\theta$  на плотность тока  $J/2\nu$ . Двигаясь по  $W$  снизу от 0, получим

нулевой фрагмент аппаратной функции. Далее, двигаясь от  $W_0 = a/2$  до  $W_1 = a/(2 \cos 2\nu)$ , построим левый берег криволинейной трапеции. Выше по  $W$  угловой размах сохраняется вплоть до  $W_2 = (a+S)/2$  и появляется полка трапеции  $A_2 = J_0$ . Продолжение движения вверх до  $W = W_k$  дает разорванный фрагмент сечения, и здесь выстраивается правый берег трапеции, падающий до нуля в точке  $W_k = \frac{a+S}{2 \cos 2\nu}$ , вслед за которой выстраивается правое нулевое крыло. Аналитически все это записывается формулой

$$A = \begin{cases} A_0 = 0, & 0 < W < W_0; \\ A_1 = \frac{J_0}{2\nu} \cdot \arccos \frac{a}{2W}, & W_0 < W < W_1; \\ A_2 = J_0, & W_1 < W < W_2; \\ A_3 = \frac{J_0}{2\nu} \cdot \left( 2\nu - \arccos \frac{a+S}{2W} \right), & W_2 < W < W_k; \\ A_4 = 0, & W > W_k. \end{cases} \quad (78)$$

Графически аппаратная функция выглядит как кривобокая асимметричная трапеция с нулевыми крыльями, и этим она существенно отличается от предыдущих вариантов (рис. 8). Если пятно засветки совпадает по ширине со щелью  $S$ , то трапеция превращается в заштрихованный треугольник. Более сложные типы электронных источников в случае плоского зеркала, конечно, дают видоизмененные берега аппаратной функции, но вполне можно предположить, что радикальных характеристических перестроек не произойдет.

**ЭНЕРГОАНАЛИЗАТОР "ТУТАНХАМОН" [12]**

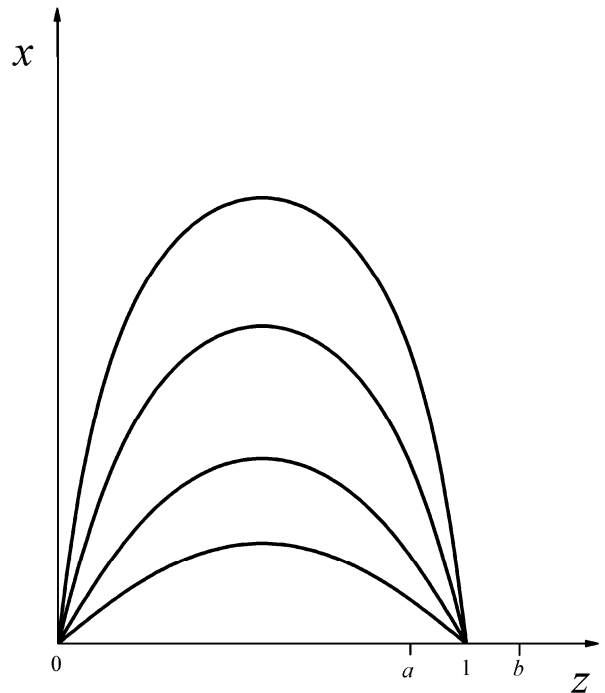
Теперь для сравнения рассмотрим энергоанализатор с идеальной фокусировкой в плоскости  $(x, z)$  для точечного источника в начале координат  $x = z = 0$  (рис. 9). Ход потенциала в плоскости  $(x, z)$  задается выражением

$$\phi|_{y=0} = \text{th}^2 \pi x. \quad (79)$$

Функция прилета  $P(\theta, W)$  здесь имеет вид [13, 14]

$$P = \cos \theta \cdot \sqrt{\frac{W}{1 - W \sin^2 \theta}}. \quad (80)$$

В отличие от плоского зеркала здесь зависимость от безразмерной энергии  $W$  сугубо нелинейная, причем при  $W = 1$  зависимость от угла  $\theta$  ис-



**Рис. 9.** Траектории в электростатическом энергоанализаторе "Тутанхамон" с идеальной фокусировкой по углу в плоскости симметрии

чезает, и система идеально фокусирует весь поток в интервале углов  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$  в одну точку

$$z_f = P|_{W=1} = 1. \quad (81)$$

Следует еще отметить быстрый рост энергетической дисперсии при  $\theta \rightarrow \pi/2$  по формуле

$$D = W \frac{\partial P}{\partial W} = \frac{1}{2 \cos^2 \theta}. \quad (82)$$

Идеальная фокусировка (рис. 9) вносит свои нюансы в профиль аппаратной функции. Не разбирая все мыслимые режимы работы этой системы, рассмотрим 3 варианта расположения щели  $S$  вблизи точки идеальной фокусировки  $z_f = 1$ : при щели, примыкающей к этой точке либо слева, либо справа, либо при положении точки фокусировки в середине щели. Это наиболее практичные режимы работы "Тутанхамона".

Пусть  $z = a$  и  $z = b$  — координаты краев щели и  $a < b$ . Условие пропускания частиц щелью состоит в неравенстве

$$a \leq \cos \theta \sqrt{\frac{W}{1 - W \sin^2 \theta}} \leq b, \quad (83)$$

или

$$\frac{a^2}{1+(a^2-1)\sin^2\theta} \leq W \leq \frac{b^2}{1+(b^2-1)\sin^2\theta}. \quad (84)$$

Взяв знак равенства, мы построим граничные кривые, окаймляющие на плоскости  $(\theta, W)$  область пропускания. Но к ним надо еще добавить две вертикали  $\theta_1 = \text{const}$  и  $\theta_2 = \text{const}$ , задающие сектор вылета частиц из источника. Наиболее типичная ситуация при  $a < 1, b > 1$ , когда точка фокусировки внутри щели (рис. 10). Кроме этих ограничений следует еще подчинить связь  $W$  и  $\theta$  условию положительности подрадикального выражения в (80)

$$W \leq \frac{1}{\sin^2\theta}. \quad (85)$$

Вырезает ли это неравенство что-либо из фигуры пропускания?

Найдем пересечение граничной кривой из (85) с верхней кривой из (84), наложив условие

$$\frac{b^2}{1+(b^2-1)\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}. \quad (86)$$

Отсюда

$$\sin^2\theta = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (87)$$

Следовательно, единственная общая точка этих кривых лежит вне фигуры на рис. 10. Для вычисления аппаратной функции надо вычислить вариацию угла на параллельных секущих  $W = \text{const}$ , и в силу изотропности источника интенсивности  $J_0$  домножить на угловую плотность  $J_0/(\theta_2 - \theta_1)$ . Двигаясь снизу от  $W = 0$  до  $W_0$ , мы получим нулевое значение, далее на участке между  $W_0$  и  $W_1$  аппаратная функция монотонно растет, потом на участке между  $W_1$  и  $W_2$  она сохраняет постоянное значение  $J_0$ , и, начиная с  $W_2$  при движении к  $W_k$  она монотонно падает. После  $W_k$  мы имеем 0 тока на детекторе. В аналитическом выражении получается

$$A = \begin{cases} 0, & 0 < W < W_0; \\ \frac{J_0}{\theta_2 - \theta_1} \cdot \left[ \arcsin \sqrt{\frac{W - a^2}{W(1 - a^2)}} - \theta_1 \right], & W_0 < W < W_1; \\ J_0, & W_1 < W < W_2; \\ \frac{J_0}{\theta_2 - \theta_1} \cdot \left[ \arcsin \sqrt{\frac{b^2 - W}{W(b^2 - 1)}} - \theta_1 \right], & W_2 < W < W_k; \\ 0, & W > W_k. \end{cases} \quad (88)$$

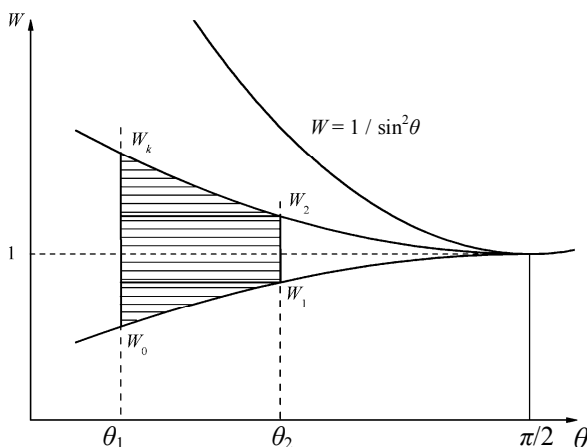


Рис. 10. Фигура пропускания на плоскости параметров  $(\theta, W)$  для точечного изотропного источника в энергоанализаторе "Тутанхамон" в плоскости симметрии

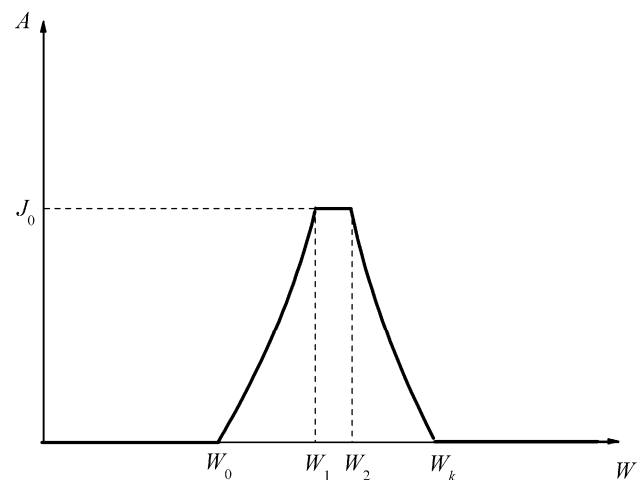


Рис. 11. Аппаратная функция от точечного изотропного источника в энергоанализаторе "Тутанхамон" в плоскости симметрии

На рис. 11  $A(W)$  образует трапецию с асимметричными берегами. Эта трапеция превращается в треугольник, если  $\theta_2 = \pi/2$  — случай физически нереальный.

Варианты расположения щели либо ближе точки фокусировки  $a < b < 1$ , либо дальше нее  $1 < a < b$  перемещают обе границы фигуры либо выше линии  $W = 1$  либо ниже нее, что дает свою форму аппаратной функции, существенно отличную от фигуры на рис. 11. Все эти детали приобретают особое значение не при нашем обзорном исследовании, а в задаче восстановления спектра, о чем в этой статье речи нет.

### ВЫВОДЫ

Наши общие математические рассуждения и конкретные расчеты позволяют сделать следующие принципиальные выводы.

1. Аппаратная функция  $A$  любого электростатического спектрометра является однозначной кусочно-аналитической функцией безразмерного аргумента  $W = \frac{E}{U}$ ,  $A = A\left(\frac{E}{U}\right)$ .

$$A = A\left(\frac{E}{U}\right).$$

2. График аппаратной функции при отсутствии фокусировки по углу либо наличии одной фокусировки для точечного источника имеет вид трапеции с криволинейными боками, которая может вырождаться в кривобокий треугольник при совпадении размеров пятна засветки и выходной щели.

3. Связь энергетического спектра  $f(E)$  с выходным током  $J(U)$  и аппаратной функцией  $A\left(\frac{E}{U}\right)$  всегда имеет вид интегрального уравнения Вольтерра I рода, а, отнюдь, не Фредгольма, и ни в коем случае не классической свертки, как это до сих пор не изжито в текущей литературе.

4. Разрывной характер аппаратной функции требует разработки особых алгоритмов для восстановления спектра  $f(E)$  по измеряемому току  $J(U)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В.П., Явор С.Я. Электростатические энергоанализаторы для пучков заряженных частиц. М.: Наука, 1978. 224 с.

2. Козлов И.Г. Методы энергетического анализа электронных потоков. М.: Атомиздат, 1971. 190 с.
3. Фридрихов С.А. Энергоанализаторы и монохроматоры для электронной спектроскопии. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 158 с.
4. Коротких В.Л., Косарев Е.Л., Ормонт А.Б., Коротких А.В. Улучшение энергетического разрешения фотоэлектронных спектров программной коррекцией на аппаратную функцию // ПТЭ. 1994. № 6. С. 88–95.
5. Горелик В.А., Яковенко А.В. Восстановление формы спектра без изменения аппаратной функции анализатора // ЖТФ. 1997. Т. 67, № 1. С. 110–114.
6. Жабров Г.И., Жданов С.К. Восстановление истинного энергетического распределения частиц, прошедших через спектрометр с известной аппаратной функцией // ЖТФ. 1979. Т. 49, № 11. С. 2450–2454.
7. Курнаев В.А., Урусов В.А. Влияние аппаратных функций электростатических и магнитных анализаторов на обработку экспериментальных результатов // ЖТФ. 1997. Т. 67, № 6. С. 86–91.
8. Курнаев В.А., Урусов В.А. Восстановление энергетических спектров для спектрометров с предварительным замедлением из диафрагм с круглыми отверстиями // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 10. С. 24–31.
9. Шевченко С.И. Метод вычисления аппаратной функции аксиальных электростатических энергоанализаторов // Научное приборостроение. 2010. Т. 20, № 2. С. 73–81.
10. Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 409 с.
11. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 303 с.
12. Электростатический энергоанализатор. А. с. 544307 СССР, № 2091369/25; заявл. 03.01.75.
13. Голиков Ю.К. Энергоанализирующие свойства электростатических полей с плоскостью симметрии. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1977. 105 с.
14. Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Григорьев Д.В. Обратные задачи теории электростатических энергоанализаторов // ЖТФ. 1999. Т. 69, № 9. С. 128–132.

*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

Контакты: Краснова Надежда Константиновна,  
n.k.krasnova@mail.ru

Материал поступил в редакцию 29.03.2011.

## ON THE INSTRUMENT FUNCTION OF ELECTROSTATIC ELECTRON SPECTROMETERS

**Yu. K. Golikov, N. K. Krasnova, I. A. Martsinovski**

*Saint-Petersburg Polytechnic State University*

The article critically analyses a conception of electron spectrometers instrument function. By means of a dimensionless mathematical model built here a strict defined integral correlation between a source energy spectrum  $f(E)$  and a current  $J(U)$  registered by detector in dependence of a device working energy  $U$  is defined. It is proved that the instrument function always depends only on a ratio  $(E / U)$ , but not a difference  $(E - U)$ , and not an inverse ratio  $(U / E)$  as it is declared in some articles. The main integral equation built in the article is of Volterra equation of I<sup>st</sup> type, but not one of Fredholm of I<sup>st</sup> type. Some concrete structures of instrument function are calculated and presented in the article. Their common features are described and discussed.

*Keywords:* energy analysis, electron spectrometer, instrument function, Volterra equation of I<sup>st</sup> type, real spectrum, restoration of spectrum, homogeneous field, energy analyzer "Tutanhamon"