

УДК 534.29

© Б. П. Шарфарец

РАДИАЦИОННОЕ ДАВЛЕНИЕ НА НЕОДНОРОДНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В ПОЛЕ БЕГУЩЕЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЕ

Рассмотрен вопрос расчета радиационного давления на неоднородное включение на струне в поле бегущей волны. Показано, что это давление выражается через плотности энергии на границах включения и равнополуразности средней плотности энергии перед включением и средней плотности энергии за ним. Показано, что полученные соотношения верны при определенной гладкости смещения струны и его первых двух производных. По аналогии с квантовой механикой приведены свойства элементов матрицы рассеяния получившейся одномерной задачи в терминах коэффициентов отражения и преломления по поперечной силе. Проанализирован физический смысл соотношений между элементами матрицы рассеяния. Результаты могут иметь существенное прикладное значение.

Кл. сл.: струна, радиационное давление, коэффициент отражения, коэффициент преломления, бегущая плоская волна, неоднородное включение

ВВЕДЕНИЕ

Радиационным давлением на неоднородных включениях на струне давно занимаются ученые и прикладники. Изначально исследованной неоднородностью было колечко, скользящее по струне. Впервые радиационным давлением на колечко, как это часто бывало, заинтересовался Рэлей [1]. Из следующих ранних работ упомянем работы [2, 3] и другие. Из достаточно современных публикаций отметим работу [4].

Однако расчет радиационного давления на струне на неоднородное включение общего вида, насколько известно автору, в достаточно общей постановке изучено не было. Рассмотрение этого вопроса представляет самостоятельный научный и практический интерес. Ранее в работах [5–7] рассматривалось радиационное давление плоской бегущей волны на плоских границах в трехмерном акустическом случае, который в силу геометрии сводился к одномерной задаче, похожей по формализму на случай со струной. В работе [8] в сводящейся к одномерной акустической задаче была решена проблема о радиационном давлении на произвольном включении.

Представляется необходимым, учитывая особенности формализма колебания струны, решить задачу о радиационном давлении конкретно в терминах теории колебания струн.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Пусть бесконечная струна состоит из двух однородных полубесконечных отрезков: первый

$x \in (-\infty, -L]$ характеризуется скоростью звука c_1 и плотностью ρ_1 и второй $x \in [L, \infty)$ — c_2 и ρ_2 соответственно. Между ними находится неоднородный участок струны $x \in [-L, L]$ с переменной плотностью и скоростью звука. Учитывая, что скорость распространения волн по струне, плотность и натяжение струны T связаны соотношением $c^2(x) = \frac{T(x)}{\rho(x)}$, то указанные распределения можно представить следующим образом:

$$c(x) = \begin{cases} c_1 = \text{const}, & x < -L, \\ \tilde{c}(x), & x \in [-L, L], \\ c_2 = \text{const}, & x > L; \end{cases}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 = \text{const}, & x < -L, \\ \tilde{\rho}(x), & x \in [-L, L], \\ \rho_2 = \text{const}, & x > L; \end{cases} \quad (1)$$

$$T(x) = \begin{cases} T_1 = \text{const}, & x < -L, \\ \tilde{T}(x), & x \in [-L, L], \\ T_2 = \text{const}, & x > L. \end{cases}$$

Уравнение малых (с точностью до величин первого порядка малости) колебаний струны с параметрами (1) описывается следующим уравнением [9, с. 128, 129]:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Здесь $u(x,t)$ — функция поперечных смещений струны относительно состояния равновесия. В случае гармонических колебаний струны $u(x,t) = U(x)e^{-i\omega t}$ из (2) получаем для амплитуды поперечных колебаний

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \rho(x) \omega^2 U = 0, \quad (3)$$

или в развернутом виде

$$TU'' + T'U' + \rho(x)\omega^2 U = 0.$$

Учитывая, что $T \neq 0$, последнее выражение переписывается в виде

$$\begin{aligned} U'' + \frac{T'(x)}{T(x)} U' + \frac{\rho(x)}{T(x)} \omega^2 U &= \\ = U'' + \frac{T'(x)}{T(x)} U' + \frac{\omega^2}{c^2(x)} U &= 0. \end{aligned} \quad (3a)$$

Известно [10, с. 276], что уравнения вида (3a) заменой

$$U(x) = v(x) e^{-\frac{1}{2} \int_b^x p(\xi) d\xi}$$

(где b — некоторая точка на прямой) сводятся к уравнению

$$v'' + J(x)v = 0, \quad (4)$$

где

$$J(x) = q(x) - \frac{1}{2} \frac{dp(x)}{dx} - \frac{1}{4} p^2(x). \quad (5)$$

Здесь

$$q(x) = \frac{\omega^2}{c^2(x)}, \quad p(x) = \frac{T'(x)}{T(x)}. \quad (6)$$

После соответствующих подстановок имеем

$$U(x) = v(x) T^{1/2}(x). \quad (7)$$

Далее будем исходить из наиболее правдоподобного рассуждения о том, что $T' = 0$, что означает постоянство натяжения струны $T = \text{const}$. Тогда уравнение (3a) приводится к каноническому виду (4)

$$U'' + \frac{\omega^2}{c^2(x)} U = 0. \quad (8)$$

Из выражения (8) видно, что при непрерывной функции $c(x)$ решение U остается дважды непрерывнодифференцируемой функцией, а при наличии у функции $c(x)$ разрывов первого рода нулевая и первая производные функции U остаются

непрерывными функциями, а вторая производная U'' также имеет разрыв первого рода. Отметим также, что в работе [11] приводится достаточно много решений задачи (8), (1) для различных распределений параметров (1).

Задачу рассеяния ставим таким образом: из $x = -\infty$ (u -задача) или из $x = \infty$ (v -задача) падает плоская волна, которая отражается и преломляется на неоднородности. Введем обозначения $k_j = \omega / c_j$, $j = 1, 2$ и будем рассматривать две подзадачи для уравнения (8), когда асимптотика решения U описывается при $|x| > L$ одной из следующих комбинаций функций.

i. В первой: слева из $x = -\infty$ набегают исходная плоская волна смещения $e^{ik_1 x}$, вызывающая на границе $x = -L$ отраженную волну $\tilde{V}_1 e^{-ik_1 x}$, а в полупространстве $x > L$ преломленную волну $\tilde{W}_1 e^{ik_2 x}$.

ii. Во второй: справа из $x = \infty$ набегают исходная плоская волна $e^{-ik_2 x}$, вызывающая на границе $x = L$ отраженную волну $\tilde{V}_2 e^{ik_2 x}$, а в полупространстве $x < -L$ преломленную волну $\tilde{W}_2 e^{-ik_1 x}$.

\tilde{V}_j , \tilde{W}_j — коэффициенты отражения и прозрачности для функций $u(x)$, $v(x)$, $j = 1, 2$.

Необходимо найти средние силы, вызванные этими полями, действующие на границы $x = -L$ и $x = L$.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Согласно пунктам i и ii, имеется два асимптотических решения для функции поперечного смещения струны:

$$u(x) \sim \begin{cases} e^{ik_1 x} + \tilde{V}_1 e^{-ik_1 x}, & x < -L, \\ \tilde{W}_1 e^{ik_2 x}, & x > L; \end{cases} \quad (9)$$

$$v(x) \sim \begin{cases} e^{-ik_2 x} + \tilde{V}_2 e^{ik_2 x}, & x > L, \\ \tilde{W}_2 e^{-ik_1 x}, & x < -L. \end{cases}$$

Определим матрицу рассеяния задач i и ii, записанных в виде (9)

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{W}_1 & \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_2 & \tilde{W}_2 \end{pmatrix}.$$

Согласно работе [11, с. 111], справедливы следующие соотношения:

$$k_2 \tilde{W}_1 = k_1 \tilde{W}_2, \quad (10)$$

$$k_2 \tilde{V}_2 = -k_1 \frac{\tilde{V}_1 \tilde{W}_2}{\tilde{W}_1}, \tag{11}$$

$$(1 - |\tilde{V}_1|^2) = \frac{k_2}{k_1} |\tilde{W}_1|^2, \tag{12}$$

$$(1 - |\tilde{V}_2|^2) = \frac{k_1}{k_2} |\tilde{W}_2|^2. \tag{13}$$

Отметим, что в выражениях (9)–(13), фигурируют коэффициенты отражения \tilde{V}_j и преломления \tilde{W}_j , $j=1,2$, по смещению U . Черта сверху означает усреднение по периоду колебаний. Поскольку энергетическими характеристиками процесса колебания являются возникающие в струне поперечные силы и скорости, связанные вне $|x| < L$ через соответствующие импедансы однородных полупространств $Z_j = \rho_j c_j$, $j=1,2$ [12, с. 127, 128], то целесообразно получить выражения вида (9)–(13) в терминах коэффициентов отражения и прозрачности, например, по поперечным силам.

Предварительно дадим краткую сводку энергетических характеристик гармонического колебания струны [12, с. 125–127]. Поперечная сила и скорость в точке x равны соответственно $-T \frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$. Например, для бегущей вправо волны $e^{ik_{1,2}x}$ отношение этих величин равно

$$-T \frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} c_1 \rho_1, & x < -L, \\ c_2 \rho_2, & x > L, \end{cases}$$

а для бегущей влево волны $e^{-ik_{1,2}x}$:

$$-T \frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial t} = - \begin{cases} c_1 \rho_1, & x < -L, \\ c_2 \rho_2, & x > L. \end{cases}$$

Получим далее из (9) выражения для поперечной силы:

$$-T \frac{\partial u}{\partial x} \sim -T \begin{cases} ik_1 (e^{ik_1 x} - \tilde{V}_1 e^{-ik_1 x}), & x < -L, \\ ik_2 \tilde{W}_1 e^{ik_2 x}, & x > L; \end{cases}$$

$$-T \frac{\partial v}{\partial x} \sim -T \begin{cases} -ik_2 (e^{-ik_2 x} - \tilde{V}_2 e^{ik_2 x}), & x > L, \\ -ik_1 \tilde{W}_2 e^{-ik_1 x}, & x < -L. \end{cases}$$

Или, приводя к стандартному в теории рассеяния виду, получаем

$$F_u \sim -Tik_1 \begin{cases} (e^{ik_1 x} - \tilde{V}_1 e^{-ik_1 x}), & x < -L, \\ \frac{k_2}{k_1} \tilde{W}_1 e^{ik_2 x}, & x > L; \end{cases} \tag{14}$$

$$F_v \sim -Tik_2 \begin{cases} (e^{-ik_2 x} - \tilde{V}_2 e^{ik_2 x}), & x > L, \\ \frac{k_1}{k_2} \tilde{W}_2 e^{-ik_1 x}, & x < -L. \end{cases}$$

Представим (14) в стандартном виде (9) через коэффициенты отражения и прозрачности по поперечной силе $V_j, W_j, j=1,2$:

$$F_u \sim -Tik_1 \begin{cases} (e^{ik_1 x} + V_1 e^{-ik_1 x}), & x < -L, \\ W_1 e^{ik_2 x}, & x > L; \end{cases} \tag{15}$$

$$F_v \sim -Tik_2 \begin{cases} (e^{-ik_2 x} + V_2 e^{ik_2 x}), & x > L, \\ W_2 e^{-ik_1 x}, & x < -L. \end{cases}$$

Сравнивая (14) и (15), получаем следующие выражения для коэффициентов V_j и W_j :

$$V_1 = -\tilde{V}_1, \quad V_2 = -\tilde{V}_2, \tag{16}$$

$$W_1 = \frac{k_2}{k_1} \tilde{W}_1, \quad W_2 = \frac{k_1}{k_2} \tilde{W}_2; \tag{16}$$

$$k_1 W_1 = k_2 W_2, \tag{17}$$

$$k_1 V_2 = -k_2 \frac{\tilde{V}_1 \tilde{W}_2}{\tilde{W}_1}, \tag{18}$$

$$(1 - |V_1|^2) = \frac{k_1}{k_2} |W_1|^2, \tag{19}$$

$$(1 - |V_2|^2) = \frac{k_2}{k_1} |W_2|^2. \tag{20}$$

Отметим, что соотношения (10)–(13) получены для функции U — решения уравнения (8) с асимптотиками (9), исходя из свойств вронскиана решений уравнения (8). Поперечная сила $-T \frac{\partial u}{\partial x}$ с асимптотиками (14), (15), вообще говоря, уравнению (8) не подчиняется. Действительно, представим уравнение (8) в виде

$$LU = (D^2 + a(x))U = 0, \quad a(x) = \frac{\omega^2}{c^2(x)},$$

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n}.$$

Воздействуем оператором L на функцию $D^1U = DU = \frac{dU}{dx}$:

$$LDU = D^3U + a(x)DU.$$

Учитывая что $D(a(x)U) = a(x)DU + UDa(x)$, получаем в последнем выражении:

$$\begin{aligned} LDU &= D^3U + a(x)DU = \\ &= D^3U + D(a(x)U) - UDa(x) = \\ &= D(D^2U + a(x)U) - UDa(x) = -UDa(x). \end{aligned}$$

Величина $LDU = -UDa(x)$ в общем случае тождественно равна нулю только при условии $a(x) = \text{const}$.

Тем не менее, например, фундаментальные энергетические соотношения на асимптотических участках (19), (20) точно соответствуют аналогичным соотношениям (12), (13). А именно, учитывая из (16), что $|V_j| = |\widetilde{V}_j|$, $j = 1, 2$, равны соответствующие левые части соотношений (12), (13) и (19), (20). Вследствие соотношений (16) равны и их правые части. То же справедливо и для соотношений (10), (11) и (17), (18).

Далее рассмотрим энергетические характеристики на однородных участках струны вне отрезка $|x| < L$, т. к. именно от них будет зависеть радиационное давление.

Общая энергия струны состоит из суммы кинетической W_k и потенциальной W_p энергий и равна [12, с. 126]

$$\begin{aligned} W(a, b) &= W_k(a, b) + W_p(a, b) = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Скорость изменения энергии части струны, лежащей между a и b , получается дифференцированием $W(a, b)$ по времени

$$\begin{aligned} \frac{dW(a, b)}{dt} &= T \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \\ &= T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_b - T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_a. \end{aligned}$$

Величина $-T \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}$ есть поток энергии в положительном направлении оси x через точку x [12, с. 127]. Плотность энергии получаем, рассматривая суммарную энергию (21) на единице длины струны:

$$E = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (22)$$

Плотности кинетической и потенциальной энергий в плоской волне совпадают, и суммарная плотность энергии равна

$$E = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (23)$$

Из (23), а также из равенства $-T \frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial t} = \rho c$ непосредственно получаем, что поток энергии плоской волны на однородном участке струны, так же как и в трехмерном акустическом случае, выражается через плотность энергии [5, 8]

$$-T \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = \rho c \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = cE. \quad (24)$$

При отражении и преломлении волн без потерь, как и в трехмерном случае [5, с. 359, 364], должен сохраняться баланс среднего потока энергии. В случае отражения и преломления плоских волн силы F_u из (15) такой баланс имеет вид

$$c_1 \bar{E}_1 = c_1 \bar{E}'_1 + c_2 \bar{E}_2. \quad (25)$$

Здесь черта сверху означает усреднение по периоду колебаний; \bar{E}_1 , \bar{E}'_1 и \bar{E}_2 — средняя плотность энергии в падающей, отраженной и преломленной волнах соответственно. При первичной падающей плоской волне $F_0 e^{ik_1 x}$ в асимптотике F_u в (15) имеем из (23)

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \frac{1}{2T} |F_0|^2, \quad \bar{E}'_1 = \frac{1}{2T} |F_0|^2 |V_1|^2, \\ \bar{E}_2 &= \frac{1}{2T} |F_0|^2 |W_1|^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Напомним, что ранее было принято $T = \text{const}$. Подставляя (26) в (25), получаем энергетическое соотношение (19). Соотношение (20) для волн F_v -типа получается аналогично.

(См. Замечание*).

Перейдем к расчету радиационного давления на неоднородное включение на струне. Это включение вызывает возникновение рассеянной волны. Взаимодействие первичной и рассеянной волн приводит к средней в единицу времени потере импульса, что описывается возникновением средних сил, действующих на включение. Тогда, очевидно, радиационное давление волны на неоднородное включение будет равно разности средних продольных сил, с которыми струна извне действует на оконечности этого отрезка $x = \pm L$.

Продольная сила F_- , с которой струна воздействует на границу $x = -L$, равна

$$F_- = -T \cos \alpha_- . \quad (27)$$

Аналогично продольная сила F_+ на границе $x = L$ равна

$$F_+ = T \cos \alpha_+ . \quad (28)$$

Результирующая сила равна

$$F_\Sigma = F_+ + F_- .$$

Здесь α_\pm — угол наклона струны в точке $x = \pm L$. Учитывая, что

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} ,$$

*) **Замечание.** Иногда удобнее оперировать плотностью энергии в терминах амплитуды смещения u_0 падающей волны, отличной от единицы в выражении (9):

$$u(x) \sim u_0 \begin{cases} e^{ik_1 x} + \tilde{V}_1 e^{-ik_1 x}, & x < -L, \\ \tilde{W}_1 e^{ik_2 x}, & x > L; \end{cases} \quad (96)$$

$$v(x) \sim u_0 \begin{cases} e^{-ik_2 x} + \tilde{V}_2 e^{ik_2 x}, & x > L, \\ \tilde{W}_2 e^{-ik_1 x}, & x < -L. \end{cases}$$

Умножение выражений (9), (9а) и (14) на величину u_0 позволяет записать

$$F_0 = iu_0 T k_j, \quad |F_0|^2 = |u_0 T k_j|^2, \quad j = 1, 2$$

для волны F_u ($j = 1$) и F_v ($j = 2$). Тогда выражения (26) для F_u -случая переписутся в терминах амплитуды смещения u_0 так:

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{2} T |u_0 k_1|^2, \quad \bar{E}'_1 = \frac{1}{2} T |u_0 k_1|^2 |V_1|^2, \quad (26a)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{1}{2} T |u_0 k_1|^2 |W_1|^2,$$

что уже соответствует принятым в [4] обозначениям.

после разложения до величин второго порядка малости получаем

$$\cos \alpha \sim 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 .$$

Тогда радиационное давление равно

$$\bar{F} = \bar{F}_- + \bar{F}_+ = \frac{1}{2} T \left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \Big|_{-L} - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \Big|_L \right] .$$

Согласно (23), имеем

$$\bar{F} = \frac{1}{2} \left(\bar{E} \Big|_{-L} - \bar{E} \Big|_L \right), \quad (29)$$

где $\bar{E} \Big|_{-L}$, $\bar{E} \Big|_L$ — средние плотности энергии на границах $x = -L$ и $x = L$ соответственно со стороны однородных полупространств. Как известно [13, с. 111], для плоских волн, бегущих навстречу друг другу, плотности энергии складываются, не образуя корреляционной добавки, как это имеет место в случае бегущих в одном направлении двух плоских волн. Поэтому имеем, учитывая (26):

$$\begin{aligned} \bar{E} \Big|_{-L} &= \bar{E}_1 + \bar{E}'_1 = \frac{1}{2T} |F_0|^2 + \frac{1}{2T} |F_0|^2 |V_1|^2, \\ \bar{E} \Big|_L &= \bar{E}_2 = \frac{1}{2T} |F_0|^2 |W_1|^2. \end{aligned}$$

Тогда окончательно имеем для средней силы (29):

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{1}{2} \left(\bar{E} \Big|_{-L} - \bar{E} \Big|_L \right) = \frac{1}{2} \left(\bar{E}_1 + \bar{E}'_1 - \bar{E}_2 \right) = \\ &= \frac{|F_0|^2}{4T} \left(1 + |V_1|^2 - |W_1|^2 \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Такой результат очень похож на представленный в работах [5, 6] для случая среднего давления на плоскую границу между двумя однородными трехмерными полупространствами, а также на результат работы [8], где рассматривается трехмерная акустическая задача, сводящаяся к одномерной, эквивалентной рассмотренной в настоящей работе. Однако в упомянутых работах среднее давление оказывалось равным (в эквивалентных обозначениях)

$$\bar{F} = \left(\bar{E} \Big|_{-L} - \bar{E} \Big|_L \right) = \left(\bar{E}_1 + \bar{E}'_1 - \bar{E}_2 \right),$$

т. е. без понижающего коэффициента $1/2$.

Далее приведем пример того, что полученное для радиационного давления на струне выражение (30) работает не всегда.

Контрпример

Воспользуемся приведенными выражениями для расчета радиационного давления на колечко [4]. Согласно этой работе, радиационное давление на расположенное в точке $x=0$ колечко при падении плоской волны слева направо равно

$$\bar{F} = 2\bar{E}_1 \frac{z^2}{4+z^2}.$$

Здесь $z = \frac{m\omega^2}{kT}$; $\bar{E}_1 = \frac{1}{2}T|u_0k|^2$ — средняя плотность энергии падающей волны; m — масса колечка; $k = k_1 = k_2 = \omega/c$.

Попытаемся получить этот результат в рамках полученной теории. Как будет показано ниже, выражение для u -волны (9б) в случае колечка имеет вид ($e^{-i\omega t}$ опущено)

$$U(x) \sim u_0 \begin{cases} e^{ikx} + \tilde{V}_1 e^{-ikx}, & x < 0; \\ \tilde{W}_1 e^{ikx}, & x > 0; \end{cases} = \\ = u_0 \begin{cases} e^{ikx} - \frac{\Phi}{2ikT} e^{-ikx}, & x < 0; \\ \left(1 - \frac{\Phi}{2ikT}\right) e^{ikx}, & x > 0. \end{cases} \quad (31)$$

Здесь $\tilde{V}_1 = -\frac{\Phi}{2ikT}$, $\tilde{W}_1 = 1 - \frac{\Phi}{2ikT}$ — коэффициенты отражения и преломления соответственно по смещению; Φ — поперечная сила, с которой колечко действует на струну, которая равна [4] $\Phi = \frac{2m\omega^2 u_0}{2 + m\omega^2 / ikT}$. В терминах поперечной силы выражение (31) преобразуется к виду

$$F(x) \sim F_0 \begin{cases} e^{ikx} + V_1 e^{-ikx}, & x < 0, \\ W_1 e^{ikx}, & x > 0, \end{cases} \quad (32) \\ V_1 = \frac{\Phi}{2ikT}, \quad W_1 = 1 - \frac{\Phi}{2ikT},$$

где $F_0 = iu_0Tk$.

Далее после подстановки (32) в выражение для радиационного давления (30) получаем

$$\bar{F} = \frac{|F_0|^2}{4T} (1 + |V_1|^2 - |W_1|^2) = \\ = \frac{T|u_0k|^2}{4} \left(1 + \frac{|\Phi|^2}{|2kT|^2} - 1 - \frac{|\Phi|^2}{|2kT|^2} \right) \equiv 0.$$

Таким образом, применение описанного метода приводит к неверному результату — радиационное давление на колечко оказывается равным ну-

лю. Произошло это по следующей причине. При обосновании результата (30) мы исходили из того, что является справедливым однородное уравнение (8). Однако хорошо известно, что в случае с массивным колечком речь идет о приложении сосредоточенной силы, что отвечает непрерывности смещения и разрыв первого рода для ее пространственной производной в точке приложения силы [14, с. 155], что в свою очередь эквивалентно превращению уравнения (8) в неоднородное уравнение с дельтаобразным источником в правой части

$$U'' + k^2U = -u_0 \frac{\Phi}{T} \delta(x), \quad (8a)$$

из которого непосредственно и следует решение (31).

Приведенный пример еще раз показывает, что предложенным подходом следует пользоваться аккуратно, учитывая возможность неоднородности уравнения (8). А именно, изложенный подход справедлив, если решение уравнения (8) и его первая производная непрерывны, а вторая производная может иметь разрыв первого рода.

ВЫВОДЫ

В работе был рассмотрен вопрос расчета радиационного давления на неоднородное включение на струне в поле бегущей волны. Как и в акустическом случае [8], это давление выражается через плотности энергии на границах включения, однако с тем отличием, что оно равно не разности, а полуразности средней плотности энергии перед включением и средней плотности энергии за ним. Показано, что полученные соотношения верны при определенной гладкости решения задачи о смещении струны и его первых двух производных.

По аналогии с квантовой механикой приведены свойства элементов матрицы рассеяния полученной одномерной задачи в терминах коэффициентов отражения и преломления по поперечной силе. Проанализирован физический смысл соотношений между элементами матрицы рассеяния.

Результаты могут иметь существенное прикладное значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh F.* On the pressure of vibrations // *Phil. Mag. Ser. 6.* 1902. V. 3. P. 338–346.
2. *Николаи Е.* К вопросу о давлении вибраций // *Записки Петербургского политехнического ин-та.* XVIII. 1912. P. 49–60.
3. *Nicolai E.* On a dynamical illustration of the pressure of radiation // *Phil. Mag.* S6-49N289. 1925. P. 171–177.

4. Данилов С.Д., Миронов М.А. Одномерное моделирование средних сил в акустике // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 3. С. 306–309.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
6. Акустика в задачах / Под ред. С.Н. Гурбатова и О.В. Руденко. М.: Наука, 1996. 336 с.
7. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
8. Шарфарец Б.П. Радиационное давление в трехмерной акустической среде, описываемой одномерным уравнением Гельмгольца // Здесь. С. 97–102.
9. Морз(с) Ф. Колебания и звук. М.: ГИТТЛ, 1949. 497 с.
10. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1962. 344 с.
11. Мессиа А. Квантовая механика. Т. 1. М.: Наука, 1978. 480 с.
12. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958. 931 с.
13. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, Изд-во Наука, 2004. 798 с.

*Институт аналитического приборостроения РАН,
г. Санкт-Петербург*

Контакты: Шарфарец Борис Пинкусович,
sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 18.04.2011.

RADIATION PRESSURE ON NONHOMOGENOUS INCLUSIONS IN THE FIELD OF PROGRESSIVE PLANE WAVE ON THE INFINITE STRING

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint-Petersburg

The problem of the calculation of radiation pressure on nonhomogenous inclusions on the string in the field of progressive plane wave was studied. The pressure was shown to be expressed through energy densities on the margins of inclusion and equals half-difference of the average density of energy before the inclusion and average density of energy behind it. The obtained data were shown to be true at certain string shift smoothness and its two first derivatives. Like quant mechanics properties of elements of scattering matrix of the resulting one-dimension problem in the terms of reflection coefficients and refraction index at lateral force are given. Physical correlation between matrix elements was analyzed. The results may be of a vast applied significance.

Keywords: string, radiation pressure, reflection coefficient, refractive index, progressive plane wave, nonhomogeneous inclusion