ISSN 0868–5886 *НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2011, том 21, № 3, с. 97–102*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 534.29

© Б. П. Шарфарец

РАДИАЦИОННОЕ ДАВЛЕНИЕ В ТРЕХМЕРНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ ОДНОМЕРНЫМ УРАВНЕНИЕМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрен расчет среднего давления, осуществляемого нормально падающей бегущей плоской волной при ее рассеянии на слоистом включении конечной толщины между двумя однородными жидкими полупространствами с разными свойствами. Приведены свойства элементов матрицы рассеяния получившейся одномерной задачи в терминах коэффициентов отражения и преломления по давлению. Проанализирован физический смысл соотношений между элементами матрицы рассеяния.

Кл. сл.: радиационное давление, коэффициент отражения, коэффициент преломления, бегущая плоская волна, слоистое пространство

ВВЕДЕНИЕ

Расчет радиационного давления на границы раздела сред в акустическом случае представляет самостоятельный научный и практический интерес. Кроме того, рассмотрение этого вопроса для трехмерных слоисто-неоднородных сред может быть полезным и при рассмотрении радиационного давления на включение на струне, т. к. формализм решения обеих задач существенно совпадает. В настоящее время рассмотрен простейший случай расчета радиационного давления [1, с. 364], где приведено решение о среднем давлении $\overline{P}$, оказываемом, в частности, при нормальном падении плоской волны $p_1 = p_0 e^{ik_1 x}$ (фактор $e^{-i\omega t}$ подразумевается) на границу раздела двух однородных жидких сред в трехмерном случае:

$$\overline{P} = \overline{E}_1 + \overline{E'}_1 - \overline{E}_2 . \qquad (1)$$

Здесь $\overline{E}_1$, $\overline{E'}_1$, $\overline{E}_2$ — средняя плотность энергии в падающей, отраженной и преломленной плоских волнах соответственно; например, средняя плотность энергии в падающей волне равна $\overline{E}_1 = \dfrac{p_0{}^2}{2\rho_1 c_1{}^2}$. Черта сверху означает усреднение по периоду гармонических колебаний.

Аналогичное выражение приводится в работе [2, с. 19] для среднего давления плоской волны на плоскую же стенку, нормаль к которой совпадает с нормалью к фронту волны. Представляет же интерес рассмотрение более сложной задачи — определение радиационного давления в слоисто-неоднородной среде, состоящей из двух однородных жидких полупространств со слоисто-неоднородной жидкой прослойкой конечной толщины. Эта прослойка может рассматриваться как неоднородное включение, рассеивающее первичную волну и тем самым приводящее к возникновению радиационного давления. Такая постановка задачи приводит в случае нормального падения к одномерной задаче рассеяния, характерной как для струны (см., например [3]), так и для одномерного квантовомеханического рассеяния (см., например [4, 5]).

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Пусть трехмерная среда представляет собой два однородных жидких полупространства: первое $x \in [-\infty, -L]$ характеризуется скоростью звука c_1 и плотностью ρ_1 и второе $x \in [L, \infty]$ — c_2 и ρ_2 соответственно. Между ними находится слоисто-неоднородная среда $x \in [-L, L]$ с переменной плотностью и скоростью звука. Пусть свойства этой среды и распространяющиеся в ней волны зависят только от координаты x:

$$c(x) = \begin{cases} c_1 = \text{const}, \ x < -L, \\ \tilde{c}(x), \ x \in [-L, L], \\ c_2 = \text{const}, \ x > L; \end{cases}$$
$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 = \text{const}, \ x < -L, \\ \tilde{\rho}(x), \ x \in [-L, L], \\ \rho_2 = \text{const}, \ x > L. \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда гармоническое поле давления с фактором $e^{-i\omega t}$ описывается амплитудой $p(x,y,z)=p(x)$ и справедливо одномерное уравнение Гельмгольца [6, 7]

$$u''+k^2(x)u=0,\ x\in R^1, \tag{3}$$

где

$$u(x)=p(x)/\rho^{1/2}(x),$$
$$k^2(x)=k_0{}^2 n(x)+\frac{1}{2\rho}\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}x^2}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right)^2, \tag{4}$$

а показатель преломления $n(x)$ можно определить, например, так $n(x)=c_1^2/c^2(x)$. Тогда волновое число k_0 из (4) равно $k_0=k_1=\omega/c_1$. Как видно из (4), предполагается, что функция плотности среды дважды дифференцируема. Если же плотность или показатель преломления имеют разрывы первого рода, то происходит сшивание решений в точках разрыва при условии непрерывности давления и нормальной компоненты колебательной скорости. При этом функции $u(x)$ и $u'(x)$ остаются непрерывными, а функция $u''(x)$ терпит разрыв первого рода.

Будем рассматривать две подзадачи.

i. В первой: слева из $x=-\infty$ набегает исходная плоская волна $u(x)=e^{ik_1x}$, вызывающая на границе $x=-L$ отраженную волну $\widetilde{V}_1e^{-ik_1x}$, а в полупространстве $x>L$ преломленную волну $\widetilde{W}_1e^{ik_2x}$.

ii. Во второй: справа из $x=\infty$ набегает исходная плоская волна $v(x)=e^{-ik_2x}$, вызывающая на границе $x=L$ отраженную волну $\widetilde{V}_2e^{ik_2x}$, а в полупространстве $x<-L$ преломленную волну $\widetilde{W}_2e^{-ik_2x}$.

$\widetilde{V}_i$, $\widetilde{W}_i$ — коэффициенты отражения и прозрачности для функций $u(x)$, $v(x)$, $i=1,2$.

Необходимо найти среднее давление, вызванное этими полями на границы $x=-L$ и $x=L$.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Вначале вследствие большой схожести уместно привести некоторые сведения об одномерном квантовомеханическом рассеянии. Будем пользоваться результатами, изложенными в работах [4, 5], где приводятся свойства матрицы рассеяния $\widetilde{S}$ для задач i и ii:

$$\widetilde{S}=\begin{pmatrix}\widetilde{W}_1 & \widetilde{V}_1\\ \widetilde{V}_2 & \widetilde{W}_2\end{pmatrix}.$$

Так, в работе [4, с. 35] задача одномерного квантовомеханического рассеяния ставится в виде, аналогичном (3)

$$y''+k^2q(x)y=0,\ x\in R^1, \tag{5}$$

где принято: $k_1=k_2=k=\mathrm{const}$; $q(x)\in C^\infty(R^1)$, $q(x)>0$ при всех $x\in R^1$ и существует такое $L<\infty$, что $q(x)=1$ при $|x|>L$. Как видно, здесь предъявляются жесткие требования к гладкости функции $q(x)$.

Постановка (5) является классической в том смысле, что пространство, окружающее неоднородное включение, является однородным.

В работе [5, с. 103, 109–112] рассматривается уравнение

$$y''+\left(\varepsilon-U(x)\right)y=0, \tag{6}$$

где ε — постоянный параметр, связанный с энергией стационарного состояния частицы в квантовомеханическом рассеянии; $U(x)$ — с точностью до мультипликативной константы равен потенциалу рассеяния. Здесь уже не исключаются разрывы первого рода у потенциала $U(x)$, что обеспечивает непрерывность функций y' и y в (7). В [5] также полагается, что потенциал достаточно быстро достигает своих пределов: U_1 — по мере уменьшения x, U_2 — по мере увеличения x относительно начала координат. Примем, что эти пределы достигаются в рамках интервала $x\in[-L,L]$. Тогда, согласно пунктам i, ii, получено два асимптотических решения:

$$u(x)\sim\begin{cases}e^{ik_1x}+\widetilde{V}_1e^{-ik_1x}, & x<-L,\\ \widetilde{W}_1e^{ik_2x}, & x>L;\end{cases}$$
$$v(x)\sim\begin{cases}e^{-ik_2x}+\widetilde{V}_2e^{ik_2x}, & x>L,\\ \widetilde{W}_2e^{-ik_1x}, & x<-L.\end{cases} \tag{7}$$

Здесь $k_{1,2}=\sqrt{\varepsilon-U_{1,2}}$.

В работе [5] приведены следующие универсальные соотношения для элементов матрицы рассеяния, справедливые для задачи (6), а следовательно, и задачи (5):

$$k_2\widetilde{W}_1=k_1\widetilde{W}_2, \tag{8}$$

$$k_2\widetilde{V}_2=-k_1\frac{\overline{\widetilde{V}}_1\widetilde{W}_2}{\overline{\widetilde{W}}_1}, \tag{9}$$

$$k_1\left(1-\left|\widetilde{V}_1\right|^2\right)=k_2\left|\widetilde{W}_1\right|^2, \tag{10}$$

$$k_1\left|\widetilde{W}_2\right|^2 = k_2\left(1-\left|\widetilde{V}_2\right|^2\right). \qquad (11)$$

Видоизменим равенства (8)–(11) применительно к акустическому давлению. Равенства (8)–(11) получены при помощи хорошо известного свойства вронскиана линейно независимых решений уравнения вида (3), (5) или (6). Вронскиан Wr в случае такого сорта уравнений сохраняет постоянное значение при всех x (см., например, [5, с. 103, 104]). Равенства (8)–(11) получены путем вычисления вронскианов следующих решений из (7): $Wr(u,v)$ (тождество (8)), $Wr(u,\bar{v})$ (тождество (9)), $Wr(u,\bar{u})$ (тождество (10)) и $Wr(v,\bar{v})$ (тождество (11)) вне неоднородностей при $|x|>L$. Напомним, что вронскиан функций u и v равен $Wr(u,v)=uv'-u'v$, где штрих означает производную по x. Учитывая связь (4) давления p с решением u уравнения (3), преобразуем асимптотики (7) в терминах давления:

$$u(x)\sim\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\rho_1}}\left(e^{ik_1x}+V_1e^{-ik_1x}\right), & x<-L,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\rho_2}}W_1e^{ik_2x}, & x>L;\end{cases}$$
$$v(x)\sim\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\rho_2}}\left(e^{-ik_2x}+V_2e^{ik_2x}\right), & x>L,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\rho_1}}W_2e^{-ik_1x}, & x<-L.\end{cases} \qquad (12)$$

Здесь множители коэффициентов $\dfrac{1}{\sqrt{\rho_i}}$, $i=1,2$ выражены уже в терминах давления:

$$p_u(x)\sim\begin{cases}e^{ikx}+V_1e^{-ikx}, & x<-L,\\ W_1e^{ikx}, & x>L;\end{cases}$$
$$p_v(x)\sim\begin{cases}e^{-ikx}+V_2e^{ikx}, & x>L,\\ W_2e^{-ikx}, & x<-L,\end{cases} \qquad (13)$$

а V_i и W_i — уже коэффициенты отражения и прозрачности по давлению. Тогда, используя технику применения вронскианов в асимптотических областях к выражениям (12), преобразуем тождества (8)–(11) для исходных функций к соответствующим соотношениям по давлению:

$$\frac{1}{Z_2}W_1=\frac{1}{Z_1}W_2, \qquad (14)$$

$$\frac{1}{Z_2}V_2=-\frac{1}{Z_1}\frac{\overline{V}_1W_2}{\overline{W}_1}, \qquad (15)$$

$$\frac{1}{Z_2}\left|W_1\right|^2=\frac{1}{Z_1}\left(1-\left|V_1\right|^2\right), \qquad (16)$$

$$\frac{1}{Z_1}\left|W_2\right|^2=\frac{1}{Z_2}\left(1-\left|V_2\right|^2\right). \qquad (17)$$

Здесь $Z_i=\rho_ic_i$ — волновое сопротивление жидкости вне слоя $|x|<L$, $i=1,2$ (см. (2)).

Проверим соотношения (14)–(17) на конкретном примере двух жидких полупространств с плоской границей раздела $x=0$. Обозначим волновое сопротивление полупространства $x<0$ через $Z_1=\rho_1c_1$, полупространства $x>0$ — через $Z_2=\rho_2c_2$. Используя методику расчета коэффициентов отражения и преломления по давлению [7, с. 8–12], находим элементы матрицы рассеяния такой структуры при нормальном падении плоских волн:

$$S=\begin{pmatrix}W_1 & V_1\\ V_2 & W_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2Z_2}{Z_1+Z_2} & \dfrac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}\\ \dfrac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2} & \dfrac{2Z_1}{Z_1+Z_2}\end{pmatrix}. \qquad (18)$$

После подстановки элементов матрицы (18) в соотношения (14)–(17) получаем тождественные равенства.

Прокомментируем физический смысл соотношений (14)–(17) между элементами матрицы рассеяния. Равенство (14) при $Z_1=Z_2$ в акустике следует трактовать как соотношение взаимности для амплитуды рассеяния [8]. Для этого выпишем соотношение взаимности в теории рассеяния для случая трехмерного уравнения Гельмгольца [8, с. 127]:

$$T(\mathbf{k}_s,\mathbf{k}_i)=T(-\mathbf{k}_i,-\mathbf{k}_s). \qquad (19)$$

Здесь $T(\mathbf{k}_s,\mathbf{k}_i)$ — функция, с точностью до постоянного коэффициента совпадающая с амплитудой рассеяния; $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_s$ — волновые вектора в падающей и рассеянной волнах соответственно. Далее перепишем (13) при $k_1=k_2=k$ в классическом виде как сумму падающей и рассеянной волн:

$$p_u(x)\sim\begin{cases}e^{ikx}+V_1e^{-ikx}, & x<-L,\\ e^{ikx}+\left(W_1-1\right)e^{ikx}, & x>L;\end{cases}$$
$$p_v(x)\sim\begin{cases}e^{-ikx}+V_2e^{ikx}, & x>L,\\ e^{-ikx}+\left(W_2-1\right)e^{-ikx}, & x<-L.\end{cases} \qquad (20)$$

Применительно к нашему случаю для $T(k_s, k_i)$ и $T(-k_i, -k_s)$ из (20) с точностью до постоянного коэффициента следует

$$T(k_s, k_i) = (W_1 - 1), \quad T(-k_i, -k_s) = (W_2 - 1).$$

Откуда из (18) следует (14).

Из соотношения (9) следует [5, с. 112]:

$$\text{фаза}\left(\frac{V_1}{W_1}\right) = \pi - \text{фаза}\left(\frac{V_2}{W_2}\right). \qquad (21)$$

Соотношения (10), (16) и (11), (17) связывают коэффициенты отражения и соответствующие коэффициенты преломления. Характерно, что эти тождества приведены для квадратов модулей соответствующих коэффициентов. В квантовой механике тождества (10), (11) называются соотношениями *сохранения потока* [5, с. 111] и означают, что число частиц, входящих в зону действия потенциала в единицу времени равно числу частиц, выходящих из этой зоны в тот же промежуток времени. В акустике этому также можно дать простую интерпретацию. При отражении и преломлении волн без потерь должен сохраняться баланс плотности потока энергии. Согласно [1, с. 359, 364], в случае отражения и преломления плоских волн такой баланс имеет вид

$$c_1 \overline{E}_1 = c_1 \overline{E'}_1 + c_2 \overline{E}_2 . \qquad (22)$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в (1) и (2). Выражение (22) дано для случая, когда падающая волна двигается слева направо со стороны $x = -\infty$. Средняя плотность энергии для плоской волны в однородной среде удовлетворяет соотношению [1]

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\frac{|p|^2}{cZ}.$$

Здесь p — амплитуда давления в плоской волне; c, Z — скорость звука в среде и ее волновое сопротивление. Отсюда имеем для падающей, отраженной и преломленной волн:

$$c_1 \overline{E}_1 = \frac{1}{2}\frac{|p_0|^2}{Z_1}, \qquad c_1 \overline{E'}_1 = \frac{|V|^2}{2}\frac{|p_0|^2}{Z_1},$$
$$c_2 \overline{E}_2 = \frac{|W|^2}{2}\frac{|p_0|^2}{Z_2}.$$

Здесь p_0 — амплитуда плоской падающей волны. Подставляя эти выражения в (22), получаем соотношение (16). Аналогично получается выражение (17).

Отметим, что базовые соотношения (14)–(17) помогают решать задачи рассеяния в рассматриваемом случае при разнообразных распределениях коэффициентов при нулевой производной решения в (3), (5) или (6). Многочисленные примеры расчета элементов матрицы рассеяния приведены в [5], а также в [8].

Теперь можно приступить непосредственно к решению поставленной в работе проблемы — расчету среднего давления, оказываемого на неоднородный слой акустическими волнами. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат. Два основания параллелепипеда единичной площади находятся в плоскостях $x = -L$ и $x = L$ (т.е. нормально к потоку энергии). На боковые грани параллелепипеда в силу геометрии задачи никакие силы не воздействуют. Тогда очевидно, что результирующее среднее давление (результирующая средняя сила на указанный параллелепипед) будет равна разности усредненных по периоду колебаний тензоров плотности потока импульса на левом и правом основании параллелепипеда

$$\overline{P} = \overline{\Pi}_{xx}\Big|_{x=-L} - \overline{\Pi}_{xx}\Big|_{x=L} . \qquad (23)$$

Средний тензор плотности потока импульса в идеальной жидкой среде с точностью до величин второго порядка малости равен [1, с. 361]

$$\overline{\Pi}_{xx} = \overline{p''} + \rho\overline{v_x v_x} . \qquad (24)$$

Для $\overline{p''}$ справедливо равенство [1, с. 361]

$$\overline{p''} = -\frac{\rho\overline{v^2}}{2} + \frac{\overline{p'^2}}{2\rho c^2}. \qquad (25)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ — вектор колебательной скорости; $v = |\mathbf{v}|$; p', p'' — акустическое давление в первом и втором приближении соответственно; ρ, c — равновесная плотность среды и скорость звука в ней соответственно.

Отметим, что выражение (25) в случае бегущей плоской волны равно разности средних плотностей кинетической и внутренней энергий. В такой волне эти энергии равны даже без усреднения, поэтому слагаемое $\overline{p''}$ в выражении (24) для среднего тензора плотности потока импульса при наличии только бегущей плоской волны отсутствует. Именно такая ситуация возникнет на границе $x = L$. На границе $x = -L$ присутствует совокупность падающей и отраженной плоской волн. Примем, что давление определяется выражением

$$p(x) = \begin{cases} e^{ik_1x} + V_1 e^{-ik_1x}, & x < -L, \\ W_1 e^{ik_2x}, & x > L. \end{cases}.$$

Тогда колебательная скорость равна

$$v(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{Z_1}\left(e^{ik_1x}-V_1e^{-ik_1x}\right), & x<-L,\\ \dfrac{W_1}{Z_2}e^{ik_2x}, & x>L.\end{cases}$$

Вычислим (24) на границе $x=-L$. Средние значения амплитуд давления и скорости при $x=-L$ равны

$$\begin{aligned}\left.\overline{v^2}\right|_{x=-L}&=\frac{1}{2Z_1^{\,2}}\left|e^{-ik_1L}-V_1e^{ik_1L}\right|^2=\\&=\frac{1}{2Z_1^{\,2}}\left(1+\left|V_1\right|^2-2\operatorname{Re}\left(Ve^{2ik_1L}\right)\right),\\ \left.\overline{p'^2}\right|_{x=-L}&=\frac{1}{2}\left|e^{-ik_1L}+V_1e^{ik_1L}\right|^2=\\&=\frac{1}{2}\left(1+\left|V_1\right|^2+2\operatorname{Re}\left(Ve^{2ik_1L}\right)\right).\end{aligned}\tag{26}$$

Подставляя полученные выражения в (25), получаем

$$\overline{p''}=\frac{1}{\rho_1c_1^{\,2}}\operatorname{Re}\left(V_1e^{2ik_1L}\right).$$

Используя (26), имеем

$$\rho\overline{v_xv_x}=\rho\overline{v^2}=\frac{1}{2\rho_1c_1^{\,2}}\left(1+\left|V_1\right|^2-2\operatorname{Re}\left(Ve^{2ik_1L}\right)\right).$$

Окончательно имеем для усредненного тензора плотности потока импульса (24) на границе $x=-L$:

$$\left.\overline{\Pi}_{xx}\right|_{x=-L}=\overline{p''}+\left.\rho\overline{v_xv_x}\right|_{x=-L}=\frac{1}{2\rho_1c_1^{\,2}}\left(1+\left|V_1\right|^2\right).\tag{27}$$

Очевидно, если падающая плоская волна имеет не единичную амплитуду, а амплитуду p_0, то выражение (27) перепишется в виде

$$\left.\overline{\Pi}_{xx}\right|_{x=-L}=\frac{\left|p_0\right|^2}{2\rho_1c_1^{\,2}}\left(1+\left|V_1\right|^2\right).\tag{27a}$$

Как видно из (27а), средний тензор плотности потока импульса на плоскости $x=-L$ оказывается равным аддитивной сумме средних плотностей энергии в исходной и отраженной бегущих плоских волнах. Это полностью отвечает тому факту, что для плоских волн, бегущих навстречу друг другу, плотности энергии просто складываются, не образуя корреляционной добавки, как это имеет место в случае бегущих в одном направлении двух плоских волн [9, с. 111].

Действуя аналогично для границы $x=L$, находим:

$$\left.\overline{\Pi}_{xx}\right|_{x=L}=\frac{\left|p_0\right|^2}{2\rho_2c_2^{\,2}}\left|W_1\right|^2.$$

Здесь уже, как было сказано выше, величина $\overline{p''}$ равна нулю.

Окончательно получаем результат, полностью по смыслу совпадающий с результатом (1), полученным в [1, с. 364] для случая двух однородных полупространств и приведенным также в [2, с. 19]:

$$\overline{P}=\left.\overline{\Pi}_{xx}\right|_{x=-L}-\left.\overline{\Pi}_{xx}\right|_{x=L}=\overline{E}_1+\overline{E}'_1-\overline{E}_2\,.\tag{28}$$

Таким образом, искомое среднее давление на неоднородный слой, помещенный между двумя однородными полупространствами, равно разности суммарной средней плотности энергии перед слоем и средней плотности энергии за слоем.

Ряд примеров возникновения радиационных сил при отражении и преломлении плоских волн от плоских границ и тел дано в работе [10].

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе поставлена и решена задача расчета среднего давления, осуществляемого нормально падающей бегущей плоской волной при ее рассеянии на слоистом включении конечной толщины между двумя однородными жидкими полупространствами с разными свойствами. По аналогии с квантовой механикой приведены свойства элементов матрицы рассеяния получившейся одномерной задачи в терминах коэффициентов отражения и преломления по давлению. Проанализирован физический смысл соотношений между элементами матрицы рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
2. Акустика в задачах / Под ред. С.Н. Гурбатова и О.В Руденко. М.: Наука, 1996. 336 с.
3. *Данилов С.Д., Миронов М.А.* Одномерное моделирование средних сил в акустике // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 3. С. 306–309.
4. *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1982. 296 с.
5. *Мессиа А.* Квантовая механика. Т. 1. М.: Наука, 1978. 480 с.
6. *Шарфарец Б.П.* К вопросу о вычислении амплитуды рассеяния объемных и поверхностных рассеивателей // Научное приборостроение. 2007. Т. 17, № 1. С. 62–72.

7. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
8. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Иностранная литература, 1960. 896 с.
9. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
10. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 31.01.2011.

RADIATION PRESSURE IN THREE-DIMENYIONAL ACOUSTIC MEDIA, DESCRIBED BY ONE-DIMENTIONAL HELMHOLTZ EQUATION

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg

Calculation of the average pressure caused by normally falling progressive plane wave at its dispersion on the laminated inclusion of the final thickness between two homogeneous liquid semispaces with different properties is discussed. Properties of dispersion matrix elements of the resulting one-dimensional problem in terms of reflection and refraction factors are presented. The physical significance of correlation between dispersion matrix elements is analyzed.

Keywords: radiation pressure, reflection coefficient, refractive index, progressive plane wave, layered medium