ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2011, том 21, № 3, с. 83–96

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 537.534.7: 621.319.7

© А. С. Бердников

МЕНЯЮЩИЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ОПИСАНИЮ УСРЕДНЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ. Ч. 2. ОБЩАЯ ФОРМУЛА

В этом цикле работ рассматривается новый метод управления движением заряженных частиц с помощью высокочастотных электрических полей, характеризующихся медленноменяющимися во времени эффективными потенциалами. Данная работа посвящена выводу общей формулы для медленноменяющегося псевдопотенциала. Показано, что классический эффективный потенциал является лишь главным членом ряда для эффективного гамильтониана, разложенного в двойной ряд: по малому параметру, характеризующему амплитуду высокочастотного электрического поля, и по обратным частотам высокочастотного электрического поля. Получена формула для эффективного потенциала (главного члена ряда для эффективного гамильтониана), позволяющего приближенно описывать усредненное движение заряженных частиц в высокочастотных электрических полях, характеризуемых "быстрым" и "медленным" временем характерного изменения поля.

Кл. сл.: масс-спектрометрические приборы, радиочастотные приборы, эффективный потенциал, гамильтонова динамика, гамильтоновы динамические системы, техники усреднения динамических гамильтоновых уравнений, высокочастотные электрические поля, радиочастотные электрические поля

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе этого цикла рассматривались теоретические основы нового способа управления движением заряженных частиц с помощью высокочастотных электрических полей. А именно: с помощью специальным образом организованных высокочастотных полей можно захватывать в локальные зоны устойчивости заряженные частицы с разными массами, энергиями и зарядами и синхронно перемещать указанные зоны захвата заряженных частиц в выбранной области пространства. Захваченные заряженные частицы перемещаются синхронно с перемещением областей захвата заряженных частиц, и тем самым осуществляется целенаправленное управление транспортировкой заряженных частиц. Характерной особенностью указанного способа является то, что в локальной области захвата объединяются как положительно, так и отрицательно заряженные частицы.

Указанные зоны устойчивости образуются в окрестностях локальных минимумов медленноменяющегося эффективного потенциала, соответствующего данному высокочастотному электрическому полю. В данной работе выводится общая формула для медленноменяющегося эффективного потенциала высокочастотного электрического поля, характеризуемого "медленным" и "быстрым" временем изменения электрического поля. Эта формула является обобщением известной классической формулы эффективного потенциала для высокочастотных электрических полей, представимых в виде суммы высокочастотных гармоник с постоянными (но зависящими от точки пространства) амплитудами. Приведенное здесь обобщение классической теории эффективного потенциала в виде медленноменяющихся эффективных потенциалов является новым и ранее не использовалось.

1. "МЕДЛЕННЫЕ" И "БЫСТРЫЕ" ФУНКЦИИ

Придадим конкретный математический смысл, что будет пониматься далее под "медленными" и "быстрыми" временами. Пусть имеются верхняя граница "медленных" частот δ и нижняя граница "быстрых" частот Δ. Очевидным образом предполагается, что $\Delta >> \delta$. Функция $h(t)$ называется "медленной", если ее спектр равен нулю (или пренебрежимо мал) вне интервала частот $\omega \in (-\delta, +\delta)$. Функция $H(t)$ называется "быстрой", если ее спектр равен нулю (или пренебрежимо мал) на интервале частот $\omega \in (-\Delta, +\Delta)$. Т. е. функция $H(t)$ содержит только высокочастотные компоненты и не содержит низкочастотных, а функция $h(t)$ содержит только низкочастотные компоненты и не содержит высокочастотных. Интервалы частот для низкочастотных и для высокочастотных компонентов не пересекаются и достаточно далеко разнесены друг от друга.

Указанные ограничения на спектр функций влекут за собой справедливые "в среднем" неравенства:

$$\left|\mathrm{d}h(t)/\mathrm{d}t\right|^2 / \left|h(t)\right|^2 \le \delta^2$$

$$\text{и } \left|\mathrm{d}H(t)/\mathrm{d}t\right|^2 / \left|H(t)\right|^2 \ge \Delta^2,$$

где усредненный квадрат модуля вещественного временнóго сигнала $f(t)$ получается в результате предельного перехода $\left|f(t)\right|^2 \sim \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_{t-T}^{t+T} f^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. В силу указанных соотношений для функций $H(t)$ и $h(t)$ в выражении $\mathrm{d}\big(H(t)h(t)\big)/\mathrm{d}t = h(t)\mathrm{d}H(t)/\mathrm{d}t + H(t)\mathrm{d}h(t)/\mathrm{d}t$ для полной производной по времени от произведения $H(t)h(t)$ вклад члена $h(t)\mathrm{d}H(t)/\mathrm{d}t$ существенно превышает вклад члена $H(t)\mathrm{d}h(t)/\mathrm{d}t$, поскольку выполняется соотношение

$$\left|\mathrm{d}H(t)/\mathrm{d}t\right|^2 / \left|H(t)\right|^2 >> \left|\mathrm{d}h(t)/\mathrm{d}t\right|^2 / \left|h(t)\right|^2.$$

Этот факт может использоваться при процедуре усреднения уравнений движения для разделения членов уравнения, имеющих разные порядки малости.

Очевидно, что класс "медленных" функций образует линейное пространство (тождественный нуль — тоже "медленная" функция). Более того, произведение двух "медленных" функций также является "медленной функцией, но с более слабым показателем "медленности": после преобразования Фурье произведение функций превращается в свертку спектров, так что спектр произведения двух "медленных" функций будет равен нулю вне интервала частот $\omega \in (-2\delta, +2\delta)$. Соответственно спектр произведения N "медленных" функций будет равен нулю вне интервала частот $\omega \in (-N\delta, +N\delta)$.

В отличие от "медленных" функций, "быстрые" функции, как они определены выше, представляют собой более сомнительный математический объект. Класс "быстрых" функций не является линейным пространством (отсутствует нуль). Сумма двух "быстрых" функций может содержать в неявном виде "медленное" время:

$$\cos(\omega-\delta)t + \cos(\omega+\delta)t = 2\cos\delta t\cos\omega t.$$

Произведение двух "быстрых" функций может быть как "быстрой" функцией ($\cos\omega t \cdot \sin\omega t = (1/2)\sin 2\omega t$), так и содержать "медленную" компоненту ($\cos\omega t \cdot \cos\omega t = (1/2) - (1/2)\cos 2\omega t$).

Произведение "медленной" функции и "быстрой" функции является с формальной точки зрения "быстрой" функцией: в силу превращения произведения в свертку спектров, спектр произведения равен нулю на интервале частот $\omega \in \big(-(\Delta-\delta), +(\Delta-\delta)\big)$, однако выделение "медленных" временны́х зависимостей на фоне "быстрых" как раз и является нашей задачей.

Поэтому в качестве "быстрых" функций мы будем рассматривать более узкий класс — набор гармоник $\cos\omega_k t$ и $\sin\omega_k t$, к которому для полноты базиса добавлена "медленная" функция 1. Частоты ω_k будут предполагаться "быстрыми" ($|\omega_k| \ge \Delta$) и "далеко разнесенными" ($\forall m \ne n : |\omega_m - \omega_n| \ge \Delta$). Набор частот ω_k будет предполагаться фиксированным, однако в процессе работы к нему по мере необходимости могут добавляться суммарные и разностные частоты вида $\omega_m \pm \omega_n$.

Предполагается, что расширенный набор частот по-прежнему удовлетворяет условию $\forall m \ne n : |\omega_m - \omega_n| \ge \Delta$, однако при наличии несоизмеримых частот и при повторении указанного шага достаточное число раз это условие может начать нарушаться. Наиболее безопасным в этом смысле является набор кратных "быстрых" гармоник $\omega_k = k\omega$, который изначально содержит в себе все возможные суммарные и разностные частоты и при этом удовлетворяет условию, что все частоты являются "далеко разнесенными" ($\forall m \ne n : |\omega_m - \omega_n| \ge \omega \ge \Delta$). Тем не менее, если добавление суммарных и разностных частот ограничивается несколькими шагами, вполне допустимо рассматривать наборы "быстрых" частот ω_k, которые не являются кратными.

В центре нашего внимания, однако, будет находиться отличный от этих двух классов третий класс функций — "быстро-медленные" функции времени, которые представимы в виде $A_0(t) + \sum\big(A_k(t)\cos\omega_k t + B_k(t)\sin\omega_k t\big)$, где $A_k(t)$ и $B_k(t)$ — медленные функции, а ω_k — фиксированный набор быстрых и далеко разнесенных частот. Такие функции образуют линейное пространство, а произведение этих функций принадлежит к подобному же классу, но с ослабленным параметром медленности и с расширенным набором частот ω_k. Физически данный класс функций представляет собой функции времени, спектр которых отличен от нуля на далеко разнесенных и узких интервалах $\omega \in \left(\omega_k - \delta, \omega_k + \delta\right)$ с фиксированными центрами ω_k и равен нулю (или пренебрежимо мал) для всех остальных частот. В следующей работе будет показано, что функции времени $f\left(t\right)$, у которых спектр обладает указанным свойством, действительно всегда могут быть приведены к виду

$$A_0\left(t\right) + \sum\left(A_k\left(t\right)\cos\omega_k t + B_k\left(t\right)\sin\omega_k t\right).$$

2. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КРЫЛОВА—БОГОЛЮБОВА КАК СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ ФОРМУЛ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Использование высокочастотных электрических полей для манипулирования заряженными частицами в масс-спектрометрии имеет давнюю традицию. Обзор основных классов подобных устройств и описание основных закономерностей их функционирования может быть найден, например, в [1–3].

Основой функционирования большинства радиочастотных масс-спектрометрических устройств является свойство высокочастотного электрического поля "выталкивать" заряженные частицы, независимо от знака заряда, из области с большой амплитудой электрического поля в область с меньшей амплитудой электрического поля. Это свойство является следствием инерции движения заряженных частиц с ненулевой массой, происходящего под воздействием быстро осциллирующего электрического поля.

Количественно данный эффект описывается с помощью теории эффективного потенциала, или псевдопотенциала, впервые введенного, по-видимому, П.Л. Капицей [4–6]. А именно, если частота ω осцилляций электрического поля $\mathbf{E}\left(x,y,z,t\right)$, происходящих по закону

$$\mathbf{E}\left(x,y,z,t\right) = \mathbf{E}_0\left(x,y,z\right)\cos\left(\omega t + \varphi\right),$$

достаточно высока, а смещение заряженной частицы с массой m и зарядом e за один период изменения электрического поля мало, то движение заряженной частицы можно представить в виде "усредненного", или "медленного" движения, на которое наложено быстроосциллирующее движение, имеющее, впрочем, маленькую амплитуду. Уравнение для усредненного движения выглядит так, как будто движение происходит в электрическом поле с потенциалом $\bar{U}\left(x,y,z\right) = e\left|\mathbf{E}_0\left(x,y,z\right)\right|^2 \Big/ \left(4m\omega^2\right)$. В более общем случае высокочастотное электрическое поле представляется в виде ряда Фурье, как

$$\mathbf{E}\left(x,y,z,t\right) = \\ = \sum\left(\mathbf{E}_c^{(k)}\left(x,y,z\right)\cos\left(k\omega t\right) + \mathbf{E}_s^{(k)}\left(x,y,z\right)\sin\left(k\omega t\right)\right),$$

и тогда эффективный потенциал должен вычисляться по формуле

$$\bar{U}\left(x,y,z\right) = \\ = e\sum\left(\left|\mathbf{E}_c^{(k)}\left(x,y,z\right)\right|^2 + \left|\mathbf{E}_s^{(k)}\left(x,y,z\right)\right|^2\right)\Big/\left(4m\omega^2 k^2\right).$$

Если же высокочастотное электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E}\left(x,y,z,t\right) = \\ = \sum\left(\mathbf{E}_c^{(k)}\left(x,y,z\right)\cos\omega_k t + \mathbf{E}_s^{(k)}\left(x,y,z\right)\sin\omega_k t\right),$$

где ω_k — произвольный набор частот, то эффективный потенциал, вычисляемый по формуле

$$\bar{U}\left(x,y,z\right) = \\ = e\sum\left(\left|\mathbf{E}_c^{(k)}\left(x,y,z\right)\right|^2 + \left|\mathbf{E}_s^{(k)}\left(x,y,z\right)\right|^2\right)\Big/\left(4m\omega_k^2\right),$$

будет правильно описывать усредненное движение заряженных частиц только тогда, когда среди частот ω_k нет близких друг к другу. Подробности и обоснование теории эффективного потенциала можно найти в упомянутых выше ссылках [4–6], некоторые тонкие моменты указанной теории рассматриваются также в [7–13].

Для обобщения классической теории эффективного потенциала на случай высокочастотных электрических полей, характеризуемых быстрыми и медленными характерными временами изменения электрического поля, будет использоваться метод усреднения Крылова—Боголюбова [14–16] в соответствии с рекомендациями, указанными в [7]. Несмотря на то что получающиеся в результате формулы можно обосновать также более простым способом с помощью нестрогих и интуитивных соображений по аналогии с [4, 5], имеет смысл воспользоваться строгим и математически корректным подходом.[1)]

[1)] Хотя с помощью нестрогих подходов можно получать правильные результаты, это не делает нестрогие подходы более корректными, и без надлежащего обоснования всегда есть опасность, что на этот раз с помощью некорректных рассуждений был получен некорректный результат. Для иллюстрации данного тезиса полезно сравнить формулы для эффективных вихревых сил, действующих на заряженную частицу, которые приведены в [5], и формулы для эффективного потенциала, приведенные в данной работе.

Пусть дано некоторое устройство для управления движением заряженных частиц, обладающее набором электродов и создающее в объеме движения заряженных частиц высокочастотное электрическое поле при приложении к электродам устройства высокочастотных электрических напряжений. Будем считать, что сигналы, прикладываемые к электродам, относятся к специальному классу, характеризуемому медленными и быстрыми временами эволюции сигнала во времени, так что высокочастотное электрическое поле, возникающее в объеме устройства, может быть представлено, как

$$\mathbf{E}(x,y,z,t)=\mathbf{E}_0(x,y,z,t)+$$
$$+\sum\left(\mathbf{E}_k^{(c)}(x,y,z,t)\cos\omega_k t+\mathbf{E}_k^{(s)}(x,y,z,t)\sin\omega_k t\right),$$

где компоненты высокочастотного электрического поля $\mathbf{E}_0(x,y,z,t)$, $\mathbf{E}_k^{(c)}(x,y,z,t)$ и $\mathbf{E}_k^{(s)}(x,y,z,t)$ являются медленными функциями времени, а ω_k — быстрыми и далеко разнесенными частотами. (В следующей работе будет показано, как от электрических сигналов, характеризуемых медленными и быстрыми временами, можно перейти к такому представлению для электрического поля).

Опишем вкратце процедуру усреднения гамильтоновых уравнений движения, используемую в данной работе. Для системы уравнений движения вводится каноническая замена гамильтоновых переменных

$$\mathbf{r}=\mathbf{w}+\varepsilon\mathbf{R}_1(\mathbf{w},\mathbf{v},t)+\varepsilon^2\mathbf{R}_2(\mathbf{w},\mathbf{v},t)+\ldots,$$
$$\mathbf{p}=\mathbf{v}+\varepsilon\mathbf{P}_1(\mathbf{w},\mathbf{v},t)+\varepsilon^2\mathbf{P}_2(\mathbf{w},\mathbf{v},t)+\ldots,$$

переводящая одни гамильтоновы уравнения в другие гамильтоновы уравнения (здесь $(\mathbf{w},\mathbf{v})$ — новые координаты и импульсы, $(\mathbf{r},\mathbf{p})$ — исходные координаты и импульсы). Функции $\mathbf{R}_k(\mathbf{w},\mathbf{v},t)$ и $\mathbf{P}_k(\mathbf{w},\mathbf{v},t)$ содержат зависимость от "быстрого" времени в виде быстроосциллирующих функций с нулевым средним значением, поэтому по своему физическому смыслу $(\mathbf{w},\mathbf{v})$ — это усредненные функции $(\mathbf{r},\mathbf{p})$, определенные с помощью указанной замены переменных математически корректным способом. Функции $\mathbf{R}_k(\mathbf{w},\mathbf{v},t)$ и $\mathbf{P}_k(\mathbf{w},\mathbf{v},t)$ выбираются так, чтобы после использования этой подстановки результирующий гамильтониан не содержал "быстрого" времени (хотя, возможно, в нем останется зависимость от "медленного" времени). В результате применения указанного подхода динамические уравнения для усредненных переменных получаются в виде гамильтоновых уравнений движения с медленно меняющимся во времени гамильтонианом, которым подчиняются усредненные координаты и импульсы $(\mathbf{w},\mathbf{v})$. Все инварианты и законы сохранения, справедливые для исходных уравнений, автоматически сохраняются для преобразованных уравнений, а сами усредненные уравнения оказываются автоматически представлены в гамильтоновой форме.

Возникает естественный вопрос: существуют ли требуемые нам замены переменных? Ответ на этот вопрос является положительным. Действительно, решение любой гамильтоновой системы может рассматриваться, как зависящее от времени преобразование начальных точек фазового пространства в конечные точки фазовой траектории. Указанная замена переменных будет канонической, т. е. обеспечивать преобразование любых исходных гамильтоновых уравнений в новые гамильтоновы уравнения [17]. Преобразование гамильтоновых координат, обратное к каноническому, тоже будет каноническим. Однако, если взять в качестве гамильтоновой системы, порождающей такое каноническое преобразование, саму систему уравнений движения заряженной частицы, то после преобразования в качестве системы уравнений должна получиться система уравнений с нулевыми правыми частями (начальные координаты траектории, выраженные через конечные точки траектории, являются первыми интегралами). Тем самым по крайней мере одна такая замена переменных существует, хотя ее нахождение будет эквивалентно решению исходной системы динамических уравнений в общем виде, и совсем не обязательно, что такая замена переменных будет оптимальной для наших целей.

Достаточно трудоемкие выкладки по нахождению приближенных выражений для требуемой нам замены переменных будут приведены в следующих разделах данной работы. В результате этих вычислений получим, что в первом приближении усредненное движение заряженной частицы представляет из себя движение в электрическом потенциале $U_0(x,y,z,t)+\bar{U}(x,y,z,t)$, где $U_0(x,y,z,t)$ — это медленный электрический потенциал, соответствующий низкочастотной компоненте электрического поля $\mathbf{E}_0(x,y,z,t)$, а $\bar{U}(x,y,z,t)$ — это медленный эффективный потенциал, который выражается через медленные амплитуды быстрых гармоник электрического поля, как

$$\bar{U}(x,y,z,t)=$$
$$=e\sum\left(\left|\mathbf{E}_k^{(c)}(x,y,z,t)\right|^2+\left|\mathbf{E}_k^{(s)}(x,y,z,t)\right|^2\right)\Big/\left(4m\omega_k^2\right).$$

Данное выражение является прямым аналогом классического эффективного потенциала, обобщенного на случай быстро осциллирующего электрического поля, характеризуемого медленным и быстрым временами.

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ УСРЕДНЯЮЩЕЙ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим движение заряженной частицы в быстро осциллирующем электрическом поле указанного вида. Из предположения, что напряженность высокочастотного электрического поля может быть записана в форме $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)= =\mathbf{E}_0(\mathbf{x},t)+\varepsilon\sum\mathbf{E}_j^{(c)}(\mathbf{x},t)\cos(\omega_j t)+\mathbf{E}_j^{(s)}(\mathbf{x},t)\sin(\omega_j t)$, следует, что потенциал данного электрического поля имеет вид $U(\mathbf{x},t)=U_0(\mathbf{x},t)+ +\varepsilon\sum U_j^{(c)}(\mathbf{x},t)\cos(\omega_j t)+U_j^{(s)}(\mathbf{x},t)\sin(\omega_j t)$, где гармоники потенциала $U_k(\mathbf{x},t)$ — медленные функции, ω_k — быстрые и далеко разнесенные друг от друга частоты, ε — малый параметр, а $\mathbf{x}=(x,y,z)$ — вектор, характеризующий положение частицы в пространстве.

Гамильтониан, описывающий движение заряженной частицы в таком электрическом поле, имеет вид[2)]

$$H=\frac{1}{2m}\left(\sum P_k^2\right)+eU_0(\mathbf{X},t)+$$
$$+\varepsilon e\sum\left(U_j^{(c)}(\mathbf{X},t)\cos\omega_j t+U_j^{(s)}(\mathbf{X},t)\sin\omega_j t\right),$$

где $\mathbf{X}$ — исходные пространственные координаты, $\mathbf{P}$ — соответствующие им импульсы, t — время, m — масса частицы, e — заряд частицы. Замена переменных записывается в форме:

$$X_k=x_k+\varepsilon X_k^a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\varepsilon^2 X_k^b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\ldots,$$
$$P_k=p_k+\varepsilon P_k^a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\varepsilon^2 P_k^b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\ldots.,$$

где $\mathbf{x}$ — усредненные координаты $\mathbf{X}$, $\mathbf{p}$ — усредненные импульсы $\mathbf{P}$, а функции $X_k^a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$, $X_k^b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$, $P_k^a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$, $P_k^a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$, подлежат определению как функции независимых переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ и t.

Указанная замена переменных не может быть произвольной, чтобы после замены переменных новая система уравнений была гамильтоновой. Дифференциальные соотношения, которым должны в самом общем случае удовлетворять эти функции, приводятся, например, в [17]:

$$\sum p_k\delta x_k-G(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\delta t\equiv$$
$$\equiv D\cdot\left(\sum P_k\delta X_k-H(\mathbf{X},\mathbf{P},t)\delta t\right)-\delta F(\mathbf{x},\mathbf{p},t),$$

где $G(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ — новый гамильтониан, $H(\mathbf{X},\mathbf{P},t)$ — гамильтониан до замены переменных, $F(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ — некоторая свободная функция, D — константа, а значок δ в данном контексте обозначает варьирование функции по переменным $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ и t.

После замены переменных исходный гамильтониан приобретает вид

$$H(\mathbf{X},\mathbf{P},t)=$$
$$=H_0(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\varepsilon H_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\varepsilon^2 H_b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\ldots,$$

где ε — малый параметр. Естественно искать решение в виде

$$G(\mathbf{x},\mathbf{p},t)=G_0(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\varepsilon G_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\varepsilon^2 G_b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\ldots,$$
$$D=D_0+\varepsilon D_a+\varepsilon^2 D_b+\ldots,$$
$$F(\mathbf{x},\mathbf{p},t)=F_0(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\varepsilon F_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\varepsilon^2 F_b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)+\ldots$$

Подставив эти выражения в исходные дифференциальные соотношения и сгруппировав члены с разными степенями малого параметра при независимых дифференциалах δx_k, δp_k и δt, получим систему уравнений относительно частных производных $\partial F_0/\partial x_k$, $\partial F_0/\partial p_k$, $\partial F_0/\partial t$, $\partial F_a/\partial x_k$, $\partial F_a/\partial p_k$, $\partial F_a/\partial t$, $\partial F_b/\partial x_k$, $\partial F_b/\partial p_k$, $\partial F_b/\partial t$, …, стоящих в левой части. Эти вспомогательные уравнения приводятся далее в разделах 3.1, 3.2, 3.3. Разрешимость их требует отдельного анализа, который там и будет выполнен.

Отметим, однако, полезный прием, который будет многократно использоваться нами в дальнейшем. Пусть дана система уравнений в частных производных $\partial F/\partial t_k=T_k(\mathbf{t})$, где $\mathbf{t}=(t_1,t_2,\ldots)$ — независимые переменные, $F(\mathbf{t})$ — неизвестная функция, $T_k(\mathbf{t})$ — известные правые части, не зависящие от неизвестной функции $F(\mathbf{t})$. Тогда система уравнений имеет решение, причем единственное с точностью до аддитивной константы, тогда и только тогда, когда $\forall m,n$ выполнены соотношения $\partial T_m/\partial t_n=\partial T_n/\partial t_m$.

Указанные соотношения следуют из перестановочности частных производных $\partial(\partial F/\partial t_m)/\partial t_n=$

[2)] Удобнее обозначить исходные переменные большими буквами, а усредненные переменные — маленькими буквами, поскольку вся основная работа будет происходить в пространстве усредненных переменных.

$=\partial\left(\partial F/\partial t_n\right)/\partial t_m$, и поэтому они очевидным образом являются необходимыми для разрешимости данной системы уравнений. Достаточность же этих условий следует, например, из общей теории совместности систем уравнений в частных производных [18–20].

Однако в данном случае достаточность можно легко доказать и без привлечения общей теории. Выберем одно из уравнений, например уравнение $\partial F/\partial t_m = T_m(\mathbf{t})$. Поскольку $\forall k \;\; \partial T_m/\partial t_k = \partial T_k/\partial t_m$, то после замены $\bar{F}(\mathbf{t}) = F(\mathbf{t}) - \int T_m(\mathbf{t})\,\mathrm{d}t_m$ в уравнениях $\partial\bar{F}/\partial t_k = T_k(\mathbf{t}) - \int\left(\partial T_m(\mathbf{t})/\partial t_k\right)\mathrm{d}t_m$, полученных для новой функции $\bar{F}$, правые части $\bar{T}_k = T_k - \int\left(\partial T_m/\partial t_k\right)\mathrm{d}t_m$ не зависят от t_m, для новых уравнений снова справедливы условия $\partial\bar{T}_k/\partial t_n = \partial\bar{T}_n/\partial t_k$ и, кроме того, $\partial\bar{T}_k/\partial t_m = 0$, $\partial\bar{F}/\partial t_m = 0$. Последовательно исключая переменные t_1, t_2, …, получим в конце концов одно уравнение с одной свободной переменной, которое имеет единственное решение с точностью до аддитивной константы.

Тем самым мы не только доказали разрешимость системы уравнений $\partial F/\partial t_k = T_k(\mathbf{t})$ при выполнении соотношений $\partial T_m/\partial t_n = \partial T_n/\partial t_m$ для $\forall m,n$, но и нашли решение в явном виде.

3.1. Уравнения нулевого порядка для усредняющей замены переменных

Уравнения нулевого порядка имеют вид $\partial F_0/\partial p_k = 0$, $\partial F_0/\partial x_k = (D_0 - 1)\,p_k$, $\partial F_0/\partial t = G_0 - D_0 H_0$. Из равенства смешанных производных $\partial\left(\partial F_0/\partial p_k\right)/\partial x_k = \partial\left(\partial F_0/\partial x_k\right)/\partial p_k$ следует условие $D_0 = 1$. Из равенства смешанных производных $\partial\left(\partial F_0/\partial p_k\right)/\partial t = \partial\left(\partial F_0/\partial t\right)/\partial p_k$ и $\partial\left(\partial F_0/\partial x_k\right)/\partial t = \partial\left(\partial F_0/\partial t\right)/\partial x_k$ получаются уравнения $\partial G_0/\partial p_k = \partial H_0/\partial p_k$, $\partial G_0/\partial x_k = \partial H_0/\partial x_k$, имеющие очевидное решение

$$G_0(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = H_0(\mathbf{x},\mathbf{p},t) + \mathrm{const}(t),$$

где произвольная аддитивная добавка $\mathrm{const}(t)$ никак не влияет на динамические уравнения, порождаемые гамильтонианом $G(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$. Решение $F_0(\mathbf{x},\mathbf{p},t) \equiv 0$ получившейся системы уравнений, не имеющее, впрочем, большого самостоятельного значения, завершает анализ уравнений нулевого порядка.

3.2. Уравнения первого порядка для усредняющей замены переменных

Уравнения первого порядка имеют вид:

$$\partial F_a/\partial p_n = \sum_k p_k\,\partial X_k^a/\partial p_n,$$
$$\partial F_a/\partial x_m = P_m^a + D_a p_m + \sum_k p_k\,\partial X_k^a/\partial x_m,$$
$$\partial F_a/\partial t = G_a - D_a H_0 - H_a + \sum_k p_k\,\partial X_k^a/\partial t.$$

Здесь учитывается условие $D_0 = 1$, полученное ранее. Смешанные производные

$$\partial\left(\partial F_a/\partial p_n\right)/\partial p_m = \partial\left(\partial F_0/\partial p_m\right)/\partial p_n$$

дают условие $\partial X_n^a/\partial p_m = \partial X_m^a/\partial p_n$.
Смешанные производные

$$\partial\left(\partial F_a/\partial x_n\right)/\partial x_m = \partial\left(\partial F_0/\partial x_m\right)/\partial x_n$$

дают условие $\partial P_n^a/\partial x_m = \partial P_m^a/\partial x_n$.
Смешанные производные

$$\partial\left(\partial F_a/\partial x_m\right)/\partial p_m = \partial\left(\partial F_0/\partial p_m\right)/\partial x_m$$

дают условие $D_a + \partial X_m^a/\partial x_m + \partial P_m^a/\partial p_m = 0$,
а смешанные производные

$$\partial\left(\partial F_a/\partial x_m\right)/\partial p_n = \partial\left(\partial F_0/\partial p_n\right)/\partial x_m \quad —$$

условие $\partial X_n^a/\partial x_m + \partial P_m^a/\partial p_n = 0, \quad m \neq n.$.

Из этих условий следует, что система уравнений

$$\partial S_a/\partial p_k = X_k^a + D_a x_k/2,$$
$$\partial S_a/\partial x_k = -P_k^a - D_a p_k/2$$

относительно неизвестной функции $S_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ при заданных функциях X_k^a и P_k^a оказывается совместной и имеет единственное решение. С другой стороны, если замена переменных определена, как $X_k^a = \partial S_a/\partial p_k - D_a x_k/2$, $\quad P_k^a = -\partial S_a/\partial x_k - D_a p_k/2$, где $S_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ — произвольная функция, то автоматически выполнены нужные нам условия совместности для уравнений первого порядка.

С учетом этой подстановки оставшиеся неиспользованными смешанные производные $\partial\left(\partial F_a/\partial t\right)/\partial p_m = \partial\left(\partial F_0/\partial p_m\right)/\partial t$ и $\partial\left(\partial F_a/\partial t\right)/\partial x_m = \partial\left(\partial F_0/\partial x_m\right)/\partial t$ дают нам уравнения для функции $G_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$:

$$\partial G_a/\partial p_k = D_a\,\partial H_0/\partial p_k + \partial H_a/\partial p_k - \partial^2 S_a/\partial p_k \partial t,$$
$$\partial G_a/\partial x_k = D_a\,\partial H_0/\partial x_k + \partial H_a/\partial x_k - \partial^2 S_a/\partial x_k \partial t,$$

очевидным решением которых является

$$G_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \\ = D_a H_0(\mathbf{x},\mathbf{p},t) + H_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t) - \partial S_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)/\partial t.$$

Правильным подбором функции $S_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ и константы D_a можно добиться, чтобы новый гамильтониан $G_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ имел удобный для нас вид.

3.3. Уравнения второго порядка для усредняющей замены переменных

Уравнения второго порядка имеют вид

$$\partial F_a/\partial p_n = \\ = \sum_k p_k\,\partial X_k^b/\partial p_n + \sum_k P_k^a\,\partial X_k^a/\partial p_n + D_a\sum_k p_k\,\partial X_k^a/\partial p_n,$$

$$\partial F_a/\partial x_m = P_m^b + D_a P_m^a + D_b p_m + \\ + \sum_k p_k\,\partial X_k^b/\partial x_m + \sum_k P_k^a\,\partial X_k^a/\partial x_m + D_a\sum_k p_k\,\partial X_k^a/\partial x_m,$$

$$\partial F_a/\partial t = G_a - D_b H_0 - D_a H_a - H_b + \\ + \sum_k p_k\,\partial X_k^b/\partial t + \sum_k P_k^a\,\partial X_k^a/\partial t + D_a\sum_k p_k\,\partial X_k^a/\partial t.$$

Смешанные производные $\partial(\partial F_a/\partial p_n)/\partial p_m = = \partial(\partial F_0/\partial p_m)/\partial p_n$ дают условие

$$\partial X_n^b/\partial p_m + D_a\partial X_n^a/\partial p_m + \sum_k(\partial P_k^a/\partial p_n)(\partial X_k^a/\partial p_m) = \\ = \partial X_m^b/\partial p_n + D_a\,\partial X_m^a/\partial p_n + \sum_k(\partial P_k^a/\partial p_m)(\partial X_k^a/\partial p_n).$$

Смешанные производные $\partial(\partial F_a/\partial x_n)/\partial x_m = = \partial(\partial F_0/\partial x_m)/\partial x_n$ дают условие

$$\partial P_n^b/\partial x_m + D_a\partial P_n^a/\partial x_m + \sum_k(\partial P_k^a/\partial x_m)(\partial X_k^a/\partial x_n) = \\ = \partial P_m^b/\partial x_n + D_a\,\partial P_m^a/\partial x_n + \sum_k(\partial P_k^a/\partial x_n)(\partial X_k^a/\partial x_m).$$

Смешанные производные $\partial(\partial F_a/\partial x_m)/\partial p_m = = \partial(\partial F_0/\partial p_m)/\partial x_m$ дают условие

$$D_b + D_a\partial P_m^a/\partial p_m + D_a\,\partial X_m^a/\partial x_m + \partial P_m^b/\partial p_m + \\ + \partial X_m^b/\partial x_m = \sum_k(\partial P_k^a/\partial x_m)(\partial X_k^a/\partial p_m) - \\ - \sum_k(\partial P_k^a/\partial p_m)(\partial X_k^a/\partial x_m),$$

а смешанные производные $\partial(\partial F_a/\partial x_m)/\partial p_n = = \partial(\partial F_0/\partial p_n)/\partial x_m$ — условие

$$D_a\partial P_m^a/\partial p_n + D_a\,\partial X_n^a/\partial x_m + \partial P_m^b/\partial p_n + \partial X_n^b/\partial x_m = \\ = \sum_k(\partial P_k^a/\partial x_m)(\partial X_k^a/\partial p_n) - \\ - \sum_k(\partial P_k^a/\partial p_n)(\partial X_k^a/\partial x_m).$$

Можно проверить, что когда для функций X_k^b и P_k^b выполнены указанные здесь условия совместности, то система уравнений $\partial S_b/\partial p_n = X_n^b - M_n$, $\partial S_b/x_m = -P_m^b + N_m$ относительно неизвестной функции $S_b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ также оказывается совместной и имеет единственное решение, где функции M_n и N_m выражаются через функции X_k^a и P_k^a по формулам

$$M_n = (1/2)\sum_k\left(P_k^a\,\partial X_k^a/\partial p_n - \partial P_k^a/\partial p_n\,X_k^a\right) - \\ - D_b X_n^a - D_b\,x_n/2,$$

и $$N_m = (1/2)\sum_k\left(\partial P_k^a/\partial x_m\,X_k^a - P_k^a\,\partial X_k^a/\partial x_m\right) - \\ - D_b P_m^a - D_b\,p_m/2.$$

Точно также легко проверить, что если замена переменных определена как $X_n^b = \partial S_b/\partial p_n + M_n$, $P_m^b = -\partial S_b/\partial x_m + N_m$, где $S_b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ — произвольная функция, а функции M_n и N_m выражаются через функции X_k^a и P_k^a, как указано выше, то нужные нам условия совместности для уравнений второго порядка будут выполнены автоматически.

С учетом этой подстановки, оставшиеся неиспользованными смешанные производные $\partial(\partial F_b/\partial t)/\partial p_m = \partial(\partial F_b/\partial p_m)/\partial t$ и $\partial(\partial F_b/\partial t)/\partial x_m = = \partial(\partial F_b/\partial x_m)/\partial t$ дают нам для функции $G_b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ систему уравнений, для которых условия совместности оказываются всегда выполнены. Решением этих уравнений является функция

$$G_b = D_b H_0 + D_a H_a + H_b - \partial S_b/\partial t + \\ + (1/2)\sum_k\left(X_k^a\partial P_k^a/\partial t - P_k^a\,\partial X_k^a/\partial t\right).$$

Правильным подбором функции $S_b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ и константы D_b можно добиться, чтобы новый гамильтониан $G_b(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ имел удобный для нас вид.

3.4. Уравнения третьего и четвертого порядка для усредняющей замены переменных

Используя ту же самую схему рассуждений, можно получить, что для уравнений третьего порядка замена переменных должна иметь вид:

$$X_n^c(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \partial S_c(\mathbf{x},\mathbf{p},t)/\partial p_n + (1/2)\sum_k\left(P_k^b\,\partial X_k^a/\partial p_n - X_k^a\,\partial P_k^b/\partial p_n\right) + (1/2)\sum_k\left(P_k^a\,\partial X_k^b/\partial p_n - X_k^b\,\partial P_k^a/\partial p_n\right) + (D_a/2)\sum_k\left(P_k^a\,\partial X_k^a/\partial p_n - X_k^a\,\partial P_k^a/\partial p_n\right) - D_a X_n^b - D_b X_n^a - D_c\,x_n/2,$$

$$P_m^c(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = -\partial S_c(\mathbf{x},\mathbf{p},t)/\partial x_m + (1/2)\sum_k\left(X_k^a\,\partial P_k^b/\partial x_m - P_k^b\,\partial X_k^a/\partial x_m\right) + (1/2)\sum_k\left(X_k^b\,\partial P_k^a/\partial x_m - P_k^a\,\partial X_k^b/\partial x_m\right) + (D_a/2)\sum_k\left(X_k^a\,\partial P_k^a/\partial x_m - P_k^a\,\partial X_k^a/\partial x_m\right) - D_a P_m^b - D_b P_m^a - D_c\,p_m/2,$$

где $S_c(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ — произвольная вспомогательная функция.

Поправка $G_c(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ к гамильтониану определяется по формуле

$$G_c(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = D_c H_0(\mathbf{x},\mathbf{p},t) + D_b H_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t) + D_a H_b(\mathbf{x},\mathbf{p},t) + H_c(\mathbf{x},\mathbf{p},t) - \partial S_c(\mathbf{x},\mathbf{p},t)/\partial t + (1/2)\sum_k\left(X_k^a\,\partial P_k^b/\partial t - P_k^b\,\partial X_k^a/\partial t\right) + (1/2)\sum_k\left(X_k^b\,\partial P_k^a/\partial t - P_k^a\,\partial X_k^b/\partial t\right) + (D_a/2)\sum_k\left(X_k^a\,\partial P_k^a/\partial t - P_k^a\,\partial X_k^a/\partial t\right).$$

Соответственно для уравнений четвертого порядка замена переменных должна иметь вид:

$$X_n^d(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \partial S_d(\mathbf{x},\mathbf{p},t)/\partial p_n + (1/2)\sum_k\left(P_k^c\,\partial X_k^a/\partial p_n - X_k^a\,\partial P_k^c/\partial p_n\right) + (1/2)\sum_k\left(P_k^b\,\partial X_k^b/\partial p_n - X_k^b\,\partial P_k^b/\partial p_n\right) + (1/2)\sum_k\left(P_k^a\,\partial X_k^c/\partial p_n - X_k^c\,\partial P_k^a/\partial p_n\right) + (D_b/2)\sum_k\left(P_k^a\,\partial X_k^a/\partial p_n - X_k^a\,\partial P_k^a/\partial p_n\right) + (D_a/2)\sum_k\left(P_k^b\,\partial X_k^a/\partial p_n - X_k^a\,\partial P_k^b/\partial p_n\right) + (D_a/2)\sum_k\left(P_k^a\,\partial X_k^b/\partial p_n - X_k^b\,\partial P_k^a/\partial p_n\right) - D_a X_n^c - D_b X_n^b - D_c X_n^b - D_d\,x_n/2,$$

$$P_m^d(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = -\partial S_d(\mathbf{x},\mathbf{p},t)/\partial x_m + (1/2)\sum_k\left(X_k^a\,\partial P_k^c/\partial x_m - P_k^c\,\partial X_k^a/\partial x_m\right) + (1/2)\sum_k\left(X_k^b\,\partial P_k^b/\partial x_m - P_k^b\,\partial X_k^b/\partial x_m\right) + (1/2)\sum_k\left(X_k^c\,\partial P_k^a/\partial x_m - P_k^a\,\partial X_k^c/\partial x_m\right) + (D_b/2)\sum_k\left(X_k^a\,\partial P_k^a/\partial x_m - P_k^a\,\partial X_k^a/\partial x_m\right) + (D_a/2)\sum_k\left(X_k^a\,\partial P_k^b/\partial x_m - P_k^b\,\partial X_k^a/\partial x_m\right) + (D_a/2)\sum_k\left(X_k^b\,\partial P_k^a/\partial x_m - P_k^a\,\partial X_k^b/\partial x_m\right) - D_a P_m^c - D_b P_m^b - D_c P_m^b - D_d\,p_m/2,$$

а поправка к гамильтониану вычисляется, как

$$G_d(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = D_d H_0(\mathbf{x},\mathbf{p},t) + D_c H_a(\mathbf{x},\mathbf{p},t) + D_b H_b(\mathbf{x},\mathbf{p},t) + D_a H_c(\mathbf{x},\mathbf{p},t) + H_d(\mathbf{x},\mathbf{p},t) - \partial S_d(\mathbf{x},\mathbf{p},t)/\partial t + (1/2)\sum_k\left(X_k^a\,\partial P_k^c/\partial t - P_k^c\,\partial X_k^a/\partial t\right) + (1/2)\sum_k\left(X_k^b\,\partial P_k^b/\partial t - P_k^b\,\partial X_k^b/\partial t\right) + (1/2)\sum_k\left(X_k^c\,\partial P_k^a/\partial t - P_k^a\,\partial X_k^c/\partial t\right) + (D_b/2)\sum_k\left(X_k^a\,\partial P_k^a/\partial t - P_k^a\,\partial X_k^a/\partial t\right) + (D_a/2)\sum_k\left(X_k^a\,\partial P_k^b/\partial t - P_k^b\,\partial X_k^a/\partial t\right) + (D_a/2)\sum_k\left(X_k^b\,\partial P_k^a/\partial t - P_k^a\,\partial X_k^b/\partial t\right),$$

где $S_d(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ — произвольная вспомогательная функция.

4. МЕДЛЕННОМЕНЯЮЩИЙСЯ ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Наш исходный гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(P^2 + Q^2 + R^2\right) + eU + \varepsilon\cdot e\sum\left(V^{(k)}\cos\omega_k t + W^{(k)}\sin\omega_k t\right),$$

где X,Y,Z — пространственные координаты; P,Q,R — соответствующие им импульсы; t — время; $U = U(X,Y,Z,t)$ — низкочастотный ("медленноменяющийся") потенциал электрического поля; $V^{(k)} = V^{(k)}(X,Y,Z,t)$ и $W^{(k)} = W^{(k)}(X,Y,Z,t)$ — "медленноменяющиеся" потенциалы, соответствующие гармоникам высокочастотного электрического поля; ω_k — (круговые) частоты соответствующих гармоник; m — масса частицы; e — заряд частицы, а ε — малый параметр. Сделаем для этого гамильтониана замену переменных:

$$X = x + \varepsilon X_a + \varepsilon^2 X_b + \ldots,\quad Y = y + \varepsilon Y_a + \varepsilon^2 Y_b + \ldots,$$

$$Z = z + \varepsilon Z_a + \varepsilon^2 Z_b + \ldots,\quad P = p + \varepsilon P_a + \varepsilon^2 P_b + \ldots,$$
$$Q = q + \varepsilon Q_a + \varepsilon^2 Q_b + \ldots,\quad R = r + \varepsilon R_a + \varepsilon^2 R_b + \ldots,$$

где x,y,z — усредненные координаты X,Y,Z, p,q,r — усредненные импульсы P,Q,R, а функции $X_a(\ldots)$, $X_b(\ldots)$ и т. д. подлежат определению как функции независимых переменных x,y,z, p,q,r и t.

После подстановки новых (усредненных) переменных в старый гамильтониан он может быть представлен в виде ряда по малому параметру ε, как $H = H_0 + \varepsilon H_a + \varepsilon^2 H_b + \ldots$, где функции $H_0(\ldots)$, $H_a(\ldots)$, $H_b(\ldots)$, … являются в конечном счете функциями новых переменных x,y,z, p,q,r и t. Выпишем в явном виде эти функции, поскольку они нам понадобятся в дальнейшем:

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + q^2 + r^2\right) + eU(x,y,z,t),$$
$$H_a = \frac{1}{m}\left(pP_a + qQ_a + rR_a\right) + e\left(U_x X_a + U_y Y_a + U_z Z_a\right) + e\sum\left(V^{(k)}\cos\omega_k t + W^{(k)}\sin\omega_k t\right),$$
$$H_b = \frac{1}{2m}\left(P_a^2 + Q_a^2 + R_a^2 + 2pP_b + 2qQ_b + 2rR_b\right) + e\left(U_x X_b + U_y Y_b + U_z Z_b\right) + \frac{1}{2}e\left(U_{xx}X_a^2 + U_{yy}Y_a^2 + U_{zz}Z_a^2 + 2U_{xy}X_aY_a + 2U_{xz}X_aZ_a + 2U_{yz}Y_aZ_a\right) + e\sum\left[\left(V_x^{(k)}X_a + V_y^{(k)}Y_a + V_z^{(k)}Z_a\right)\cos\omega_k t + \left(W_x^{(k)}X_a + W_y^{(k)}Y_a + W_z^{(k)}Z_a\right)\sin\omega_k t\right].$$

Новый гамильтониан G разлагается в ряд по малому параметру ε и может быть представлен, как

$$G(\cdots,t) = G_0(\cdots,t) + \varepsilon G_a(\cdots,t) + \varepsilon^2 G_b(\cdots,t) + \ldots,$$

где функции $G_0(\ldots)$, $G_a(\ldots)$, $G_b(\ldots)$ как функции новых переменных x,y,z, p,q,r и t нам, собственно, и надо определить. Из раздела 3.1 следует, что для элемента $G_0(\cdots,t)$ справедливо выражение

$$G_0 = H_0 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + q^2 + r^2\right) + eU(x,y,z,t).$$

Нахождение остальных членов ряда для нового гамильтониана потребует существенно большей работы.

Из раздела 3.2 следует, что для первого порядка замена переменных $X_a(\cdots,t)$, $Y_a(\cdots,t)$, $Z_a(\cdots,t)$, $P_a(\cdots,t)$, $Q_a(\cdots,t)$, $R_a(\cdots,t)$ может быть записана с помощью вспомогательной функции $S_a(x,y,z,p,q,r,t)$ и константы D_a, как

$$X_a = \partial S_a/\partial p - D_a x/2,\quad Y_a = \partial S_a/\partial q - D_a y/2,$$
$$Z_a = \partial S_a/\partial r - D_a z/2,\quad P_a = -\partial S_a/\partial x - D_a p/2,$$
$$Q_a = -\partial S_a/\partial y - D_a q/2,\quad R_a = -\partial S_a/\partial z - D_a r/2.$$

При такой параметризации замены переменных гамильтониан равен

$$G_a(\cdots,t) = D_a H_0 + H_a - \partial S_a/\partial t.$$

Из приведенного выше представления для функции $H_a(\cdots,t)$ легко заметить, что для того чтобы "убрать" из нового гамильтониана $G_a(\cdots,t)$ все быстроосциллирующие члены, нам надо использовать функции вида

$$S_a(\ldots,t) = S_a^{(0)} + \sum\left(S_{v,a}^{(k)}\cos\omega_k t + S_{w,a}^{(k)}\sin\omega_k t\right),$$

где функции $S_a^{(0)}(\ldots,t)$, $S_{v,a}^{(k)}(\ldots,t)$, $S_{w,a}^{(k)}(\ldots,t)$ зависят от координат x,y,z, импульсов p,q,r и "медленного" времени t.

Подставив это представление для функции S_a в формулы для вычисления функций X_a, Y_a, Z_a, P_a, Q_a, R_a, мы легко получим, что эти функции будут содержать только быстроосциллирующие члены, если выполнены соотношения

$$\partial S_a^{(0)}/\partial p = D_a x/2,\ \partial S_a^{(0)}/\partial q = D_a y/2,$$
$$\partial S_a^{(0)}/\partial r = D_a z/2,\ \partial S_a^{(0)}/\partial x = -D_a p/2,$$
$$\partial S_a^{(0)}/\partial y = -D_a q/2,\ \partial S_a^{(0)}/\partial z = -D_a r/2.$$

Из условий совместности для этой системы уравнений в частных производных следует, что это возможно только при $D_a = 0$. В этом случае решением указанной системы уравнений является функция $S_a^{(0)} \equiv 0$ (с точностью до аддитивной функции времени, которая на уравнения движения, выводимые из гамильтониана, никак не влияет).

Для того, чтобы в гамильтониане $G_a(\cdots,t)$ отсутствовали "быстрые" функции, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены уравнения

$$\partial S_{v,a}^{(k)}/\partial t + \left(p\cdot\partial S_{v,a}^{(k)}/\partial x + q\cdot\partial S_{v,a}^{(k)}/\partial y + r\cdot\partial S_{v,a}^{(k)}/\partial z\right)/m - eU_x\cdot\partial S_{v,a}^{(k)}/\partial p - eU_y\cdot\partial S_{v,a}^{(k)}/\partial q - eU_z\cdot\partial S_{v,a}^{(k)}/\partial r +$$

$$+\omega_k S_{w,a}^{(k)} = eV^{(k)},$$

$$\partial S_{w,a}^{(k)} / \partial t + \\ + \left(p \cdot \partial S_{w,a}^{(k)} / \partial x + q \cdot \partial S_{w,a}^{(k)} / \partial y + r \cdot \partial S_{w,a}^{(k)} / \partial z \right) / m - \\ - eU_x \cdot \partial S_{w,a}^{(k)} / \partial p - eU_y \cdot \partial S_{w,a}^{(k)} / \partial q - eU_w \cdot \partial S_{v,a}^{(k)} / \partial r - \\ - \omega_k S_{v,a}^{(k)} = eW^{(k)}.$$

Любое решение этих уравнений обеспечивает нам замену переменных с требуемыми свойствами, и, как легко понять, таких решений будет достаточно много. При этом сам гамильтониан G_a остается неизменным ($G_a \equiv 0$), однако уравнения для компонентов гамильтониана более высоких порядков зависят от используемой на этом уровне замены переменных самым существенным образом.

Для нашей цели далеко не любое решение указанной системы дифференциальных уравнений в частных производных является допустимым и осмысленным. Из физических соображений следует, что полученные формулы должны оставаться регулярными при больших значениях частот высокочастотного электрического поля. В частности, следует ожидать, что при $\omega_k \to \infty$ замена переменных, использованная для перехода от физических переменных к усредненным переменным, должна обращаться в тождество и что указанная замена переменных является регулярной в окрестности точки $\omega_k \approx \infty$ по меньшей мере. С учетом этого соображения удобно искать решение в виде ряда по обратным степеням круговых частот $1/\omega_k$. При таком представлении подходящие решения указанных дифференциальных соотношений оказываются строго единственными, причем для наших непосредственных целей достаточно ограничиться только главными членами разложения. Опуская ненужные технические подробности, получаем с точностью до квадратичных членов требуемый результат:

$$S_{v,a}^{(k)} \approx -eW^{(k)} / \omega_k + \\ + e\left(V_t^{(k)} + \left(pV_x^{(k)} + qV_y^{(k)} + rV_z^{(k)} \right) / m \right) / \omega_k^2 + \ldots,$$

$$S_{w,a}^{(k)} \approx +eV^{(k)} / \omega_k + \\ + e\left(W_t^{(k)} + \left(pW_x^{(k)} + qW_y^{(k)} + rW_z^{(k)} \right) / m \right) / \omega_k^2 + \ldots$$

Из раздела 3.3 следует, что во втором порядке замена переменных может быть записана с помощью вспомогательной функции $S_b(x, y, z, p, q, r, t)$ и константы D_b, как

$$X_b = \partial S_b / \partial p + F^{(p)} - D_b X_a - D_b\, x/2,$$
$$Y_b = \partial S_b / \partial q + F^{(q)} - D_b Y_a - D_b\, y/2,$$
$$Z_b = \partial S_b / \partial r + F^{(r)} - D_b Z_a - D_b\, z/2,$$
$$P_b = -\partial S_b / \partial x + F^{(x)} - D_b P_a - D_b\, p/2,$$
$$Q_b = -\partial S_b / \partial y + F^{(y)} - D_b Q_a - D_b\, q/2,$$
$$R_b = -\partial S_b / \partial z + F^{(z)} - D_b R_a - D_b\, r/2,$$

где

$$F^{(p)} = (1/2)\left(P_a\, \partial X_a / \partial p - X_a\, \partial P_a / \partial p + Q_a\, \partial Y_a / \partial p - \\ - Y_a\, \partial Q_a / \partial p + R_a\, \partial Z_a / \partial p - Z_a\, \partial R_a / \partial p \right),$$

$$F^{(q)} = (1/2)\left(P_a\, \partial X_a / \partial q - X_a\, \partial P_a / \partial q + Q_a\, \partial Y_a / \partial q - \\ - Y_a\, \partial Q_a / \partial q + R_a\, \partial Z_a / \partial q - Z_a\, \partial R_a / \partial q \right),$$

$$F^{(r)} = (1/2)\left(P_a\, \partial X_a / \partial r - X_a\, \partial P_a / \partial r + Q_a\, \partial Y_a / \partial r - \\ - Y_a\, \partial Q_a / \partial r + R_a\, \partial Z_a / \partial r - Z_a\, \partial R_a / \partial r \right),$$

$$F^{(x)} = (1/2)\left(X_a\, \partial P_a / \partial x - P_a\, \partial X_a / \partial x + Y_a\, \partial Q_a / \partial x - \\ - Q_a\, \partial Y_a / \partial x + Z_a\, \partial R_a / \partial x - R_a\, \partial Z_a / \partial x \right),$$

$$F^{(y)} = (1/2)\left(X_a\, \partial P_a / \partial y - P_a\, \partial X_a / \partial y + Y_a\, \partial Q_a / \partial y - \\ - Q_a\, \partial Y_a / \partial y + Z_a\, \partial R_a / \partial y - R_a\, \partial Z_a / \partial y \right),$$

$$F^{(z)} = (1/2)\left(X_a\, \partial P_a / \partial z - P_a\, \partial X_a / \partial z + Y_a\, \partial Q_a / \partial z - \\ - Q_a\, \partial Y_a / \partial z + Z_a\, \partial R_a / \partial z - R_a\, \partial Z_a / \partial z \right),$$

а функции X_a, Y_a, Z_a, P_a, Q_a, R_a соответствуют замене переменных, полученных при анализе уравнений для первого порядка. В случае такой параметризации для замены переменных новый гамильтониан равен

$$G_b(\cdots, t) = D_b H_0 + D_a H_a + H_b + F^{(t)} - \partial S_b / \partial t,$$

где

$$F^{(t)} = (1/2)\left(X_a\, \partial P_a / \partial t - P_a\, \partial X_a / \partial t + Y_a\, \partial Q_a / \partial t - \\ - Q_a\, \partial Y_a / \partial t + Z_a\, \partial R_a / \partial t - R_a\, \partial Z_a / \partial t \right).$$

Поэтому для того, чтобы "убрать" из нового гамильтониана $G_b(\cdots, t)$ все быстроосциллирующие члены, нам надо использовать функции вида

$$S_b(\ldots, t) = S_b^{(0)} + \sum_k \left(S_{v,b}^{(k)} \cos \omega_k t + \\ + S_{w,b}^{(k)} \sin \omega_k t + S_{2v,b}^{(k)} \cos 2\omega_k t + S_{2w,b}^{(k)} \sin 2\omega_k t \right) + \\ + \sum_{k>j} \left[S_{+v,b}^{(k,j)} \cos\left(\omega_k + \omega_j\right) t + S_{+w,b}^{(k,j)} \sin\left(\omega_k + \omega_j\right) t + \\ + S_{-v,b}^{(k,j)} \cos\left(\omega_k - \omega_j\right) t + S_{-w,b}^{(k,j)} \sin\left(\omega_k - \omega_j\right) t \right],$$

где неизвестные функции зависят от координат x, y, z, импульсов p, q, r и "медленного" времени t. Существенно, что в соответствии со сделанным ранее предположением о том, что частоты ω_k должны быть "далеко разнесенными", функции $\cos\left(\omega_k-\omega_j\right)$ и $\sin\left(\omega_k-\omega_j\right)$ будут "быстрыми".

Соответствующие выкладки требуют привлечения серьезных программ для символьных вычислений типа [21]. Легко получить, что $S_{v,b}^{(k)}\equiv 0$ и $S_{w,b}^{(k)}\equiv 0$. Учитывая, что решения системы дифференциальных уравнений в частных производных для функций $S_{2v,b}^{(k)}$, $S_{2w,b}^{(k)}$, $S_{+v,b}^{(k,j)}$, $S_{+w,b}^{(k,j)}$, $S_{-v,b}^{(k,j)}$, $S_{-w,b}^{(k,j)}$ должны быть регулярными при $\omega_k,\omega_j\to\infty$, можно вывести, что

$$S_{2v,b}^{(k)}\approx -e^2\left(V_x^{(k)}W_x^{(k)}+V_y^{(k)}W_y^{(k)}+V_z^{(k)}W_z^{(k)}\right)\Big/\left(4m\omega_k^3\right),$$

$$S_{2w,b}^{(k)}\approx \frac{e^2}{\left(8m\omega_k^3\right)}\left(\left(V_x^{(k)}\right)^2+\left(V_y^{(k)}\right)^2+\left(V_z^{(k)}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(W_x^{(k)}\right)^2-\left(W_y^{(k)}\right)^2-\left(W_z^{(k)}\right)^2\right),$$

$$S_{+v,b}^{(k,j)}\approx e^2\left(V_x^{(k)}W_x^{(j)}+V_y^{(k)}W_y^{(j)}+V_z^{(k)}W_z^{(j)}+W_x^{(k)}V_x^{(j)}+\right.$$
$$\left.+W_y^{(k)}V_y^{(j)}+W_z^{(k)}V_z^{(j)}\right)\cdot\left(\omega_k-\omega_j\right)^2\Big/\left(4m\omega_k^2\omega_j^2\left(\omega_k+\omega_j\right)\right),$$

$$S_{+w,b}^{(k,j)}\approx e^2\left(-V_x^{(k)}V_x^{(j)}-V_y^{(k)}V_y^{(j)}-V_z^{(k)}V_z^{(j)}+W_x^{(k)}W_x^{(j)}+\right.$$
$$\left.+W_y^{(k)}W_y^{(j)}+W_z^{(k)}W_z^{(j)}\right)\cdot\left(\omega_k-\omega_j\right)^2\Big/\left(4m\omega_k^2\omega_j^2\left(\omega_k+\omega_j\right)\right),$$

$$S_{-w,b}^{(k,j)}\approx -e^2\left(V_x^{(k)}V_x^{(j)}+V_y^{(k)}V_y^{(j)}+V_z^{(k)}V_z^{(j)}+W_x^{(k)}W_x^{(j)}+\right.$$
$$\left.+W_y^{(k)}W_y^{(j)}+W_z^{(k)}W_z^{(j)}\right)\cdot\left(\omega_k+\omega_j\right)^2\Big/\left(4m\omega_k^2\omega_j^2\left(\omega_k-\omega_j\right)\right),$$

$$S_{-v,b}^{(k,j)}\approx -e^2\left(W_x^{(k)}V_x^{(j)}+W_y^{(k)}V_y^{(j)}+W_z^{(k)}V_z^{(j)}-V_x^{(k)}W_x^{(j)}-\right.$$
$$\left.-V_y^{(k)}W_y^{(j)}-V_z^{(k)}W_z^{(j)}\right)\cdot\left(\omega_k+\omega_j\right)^2\Big/\left(4m\omega_k^2\omega_j^2\left(\omega_k-\omega_j\right)\right).$$

Здесь сохранены члены, не более чем кубичные по степеням $1/\omega_k$.

Уравнения в частных производных для функции $S_b^{(0)}\left(\cdots,t\right)$, выражающие тот факт, что функции $X_b\left(\cdots,t\right)$, $Y_b\left(\cdots,t\right)$, $Z_b\left(\cdots,t\right)$, $P_b\left(\cdots,t\right)$, $Q_b\left(\cdots,t\right)$, $R_b\left(\cdots,t\right)$ содержат только быстроосциллирующие члены с нулевым средним значением, являются достаточно сложными, и, вообще говоря, для них не выполняются условия совместности в случае произвольных высокочастотных электрических полей. Однако, если в этих уравнениях ограничиться членами, не более чем квадратичными относительно обратных частот $1/\omega_k$, они принимают уже знакомый нам вид:

$$\partial S_b^{(0)}\big/\partial p=D_b x/2,\ \partial S_b^{(0)}\big/\partial q=D_b y/2,$$
$$\partial S_b^{(0)}\big/\partial r=D_b z/2,\ \partial S_b^{(0)}\big/\partial x=-D_b p/2,$$
$$\partial S_b^{(0)}\big/\partial y=-D_b q/2,\ \partial S_b^{(0)}\big/\partial z=-D_b r/2,$$

откуда следуют условия $D_b=0$ и $S_b^{(0)}\left(\cdots,t\right)\equiv 0$. Из всех этих соотношений можно получить, что

$$G_b\left(\cdots,t\right)\approx e^2\sum_k\left[\left(\left(V_x^{(k)}\right)^2+\left(V_y^{(k)}\right)^2+\left(V_z^{(k)}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(W_x^{(k)}\right)^2+\left(W_y^{(k)}\right)^2+\left(W_z^{(k)}\right)^2\right)\Big/\left(4m\omega_k^2\right)\right].$$

Здесь сохранены члены, не более чем квадратичные по степеням $1/\omega_k$.

5. ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Мы получили, что после введенной нами замены переменных исходная динамическая система с гамильтонианом $H\left(\cdots,t\right)$ переходит в новую динамическую систему с гамильтонианом

$$G\left(\cdots,t\right)\approx G_0\left(\cdots,t\right)+\varepsilon G_a\left(\cdots,t\right)+\varepsilon^2 G_b\left(\cdots,t\right)+\cdots,$$

где функции $G_0\left(\cdots,t\right)$, $G_a\left(\cdots,t\right)$, $G_b\left(\cdots,t\right)$ вычисляются, как

$$G_0\left(\cdots,t\right)=\frac{1}{2m}\left(p^2+r^2+s^2\right)+eU_0\left(x,y,z,t\right),$$
$$G_a\left(\cdots,t\right)=0,$$
$$G_b\left(\cdots,t\right)\approx e^2\sum_k\left[\left(\left(V_x^{(k)}\right)^2+\left(V_y^{(k)}\right)^2+\left(V_z^{(k)}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(W_x^{(k)}\right)^2+\left(W_y^{(k)}\right)^2+\left(W_z^{(k)}\right)^2\right)\Big/\left(4m\omega_k^2\right)\right].$$

Замена переменных целенаправленно организована так, чтобы новые переменные имели физический смысл исходных физических переменных, усредненных по быстрым осцилляциям.
Величины

$$\left|\mathbf{E}_k^{(c)}\left(x,y,z,t\right)\right|^2=\left(\partial V^{(k)}\left(x,y,z,t\right)\big/\partial x\right)^2+$$
$$+\left(\partial V^{(k)}\left(x,y,z,t\right)\big/\partial y\right)^2+\left(\partial V^{(k)}\left(x,y,z,t\right)\big/\partial z\right)^2$$

и

$$\left|\mathbf{E}_k^{(s)}\left(x,y,z,t\right)\right|^2=\left(\partial W^{(k)}\left(x,y,z,t\right)\big/\partial x\right)^2+$$
$$+\left(\partial W^{(k)}\left(x,y,z,t\right)\big/\partial y\right)^2+\left(\partial W^{(k)}\left(x,y,z,t\right)\big/\partial z\right)^2$$

имеют смысл квадратов модулей напряженности электрического поля (точнее, квадратов амплитуд напряженности высокочастотного электрического поля). Функции $U_0(x,y,z,t)$, $V^{(k)}(x,y,z,t)$ и $W^{(k)}(x,y,z,t)$, использованные в этих формулах, берутся из представления потенциала $U(x,y,z,t)$ высокочастотного электрического поля в виде разложения

$$U(x,y,z,t)=U_0(x,y,z,t)+ +\varepsilon\sum\left(V^{(k)}(x,y,z,t)\cos\omega_k t+W^{(k)}(x,y,z,t)\sin\omega_k t\right)$$

по быстрым и далеко разнесенным вдоль оси частот гармоническим осцилляциям $\cos\omega_k t$ и $\sin\omega_k t$.

Тем самым решения динамических уравнений, полученных для усредненных переменных (координат и импульсов), будут такими, как будто заряженная частица с зарядом e и массой m двигается в электрическом поле с потенциалом $U_0(x,y,z,t)+\varepsilon^2\bar{U}(x,y,z,t)$, где $U_0(x,y,z,t)$ — это низкочастотная (квазистатическая) составляющая электрического поля, а эффективный потенциал $\bar{U}(x,y,z,t)$ определяется выражением

$$\bar{U}(x,y,z,t)= =e\sum\left(\left|\mathbf{E}_k^{(c)}(x,y,z,t)\right|^2+\left|\mathbf{E}_k^{(s)}(x,y,z,t)\right|^2\right)\Big/\left(4m\omega_k^2\right)$$

и также является медленной (низкочастотной и квазистатической) функцией времени. При этом указанный эффективный потенциал $\bar{U}(x,y,z,t)$ уже не обязан удовлетворять уравнению Лапласа, что обеспечивает нам новые интересные возможности по управлению заряженными частицами.

Отметим, что "малость" малого параметра ε при выводе соответствующих формул требует всего лишь, чтобы соответствующий формальный ряд был сходящимся, или чтобы по крайней мере следующий (опущенный) член разложения оказывался много меньше последнего сохраненного члена ряда — и, по-видимому, не является слишком обременительным условием. Более существенно, что при выводе этих формул использовались только главные члены разложения по степеням обратных частот $1/\omega_k$, справедливых при условии $\omega_k\to\infty$. Тот факт, что поправка $G_b(\cdots,t)$ зависит только от усредненных координат и не зависит от усредненных импульсов (и, следовательно, может трактоваться как поправка к электрическому потенциалу), является следствием сохранения исключительно главных членов разложения и отбрасывания последующих членов ряда по степеням $1/\omega_k$. Сохранение отброшенных младших членов и переход тем самым от эффективного потенциала к эффективному гамильтониану может быть интересным направлением в плане уточнения и обобщения классической теории эффективного потенциала.

Подведем промежуточные итоги. По определению, эффективный потенциал $\bar{U}(x,y,z,t)$ — это такая скалярная функция, высчитываемая по определенным правилам через имеющееся в системе высокочастотное поле, что усредненное движение заряженной частицы в данном высокочастотном поле описывается уравнениями движения заряженной частицы в псевдоэлектрическом поле $\bar{U}(x,y,z,t)$ с точностью до поправочных членов малого порядка (где вопрос о том, что именно считать членами малого порядка, является достаточно нечетко определенным и в значительной степени определяется априорными предположениями и вкусами исследователя). Математическое выражение для эффективного потенциала в случае использования класса высокочастотных электрических полей вида

$$\mathbf{E}_0(x,y,z,t)+ +\sum\mathbf{E}_k^{(c)}(x,y,z,t)\cos(\omega_k t)+\mathbf{E}_k^{(s)}(x,y,z,t)\sin(\omega_k t),$$

полученное выше, выводится из данного физического смысла, причем физический смысл является определяющим. Обобщение указанной процедуры на случай импульсных функций, равно как и рецепт вычисления эффективного потенциала для случая импульсных функций, могут быть осуществлены по такой же схеме, однако ее детальное изложение выходит за рамки данного текста. Приведенное обобщение классической теории эффективного потенциала на класс медленно меняющихся эффективных потенциалов является, по-видимому, новым и ранее не использовалось.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В следующих работах данного цикла будет показанана универсальность представления временны́х сигналов, характеризуемых "медленными" и "быстрыми" временами, в форме $f(t)=\sum A_n(t)\cos(\omega_n t)+B_n(t)\sin(\omega_n t)$, где $A_n(t)$ и $B_n(t)$ — "медленные" функции, а ω_n — "быстрые" и "далеко отстоящие" друг от друга частоты (и, как следствие, обоснована возможность представлений высокочастотных электрических полей, характеризуемых "медленными" и "быстрыми" временами, в виде

$$\mathbf{E}(x,y,z,t)=\mathbf{E}_0(x,y,z,t)+ +\sum_n\mathbf{E}_n^{(c)}(x,y,z,t)\cos(\omega_n t)+\mathbf{E}_n^{(s)}(x,y,z,t)\sin(\omega_n t),$$

где $\mathbf{E}_0(x,y,z,t)$, $\mathbf{E}_n^{(c)}(x,y,z,t)$, $\mathbf{E}_n^{(s)}(x,y,z,t)$ —

"медленные" функции, а ω_n — "быстрые" и "далеко разнесенные" друг от друга частоты). Будут рассмотрены технические способы создания требуемых электрических напряжений $f_k(t)$ и соответствующих им высокочастотных электрических полей в объеме устройства. Приведены примеры использования высокочастотных электрических полей указанного вида для управления движением заряженных частиц. Наконец, будут рассмотрены перспективные способы применения нового метода управления движением заряженных частиц для создания новых классов масс-спектрометрических приборов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *March R.E., Todd J.F.J.* Quadrupole ion trap mass spectrometry, 2nd edition. Wiley-InterScience, 2005. 346 p.
2. *Major F.J., Gheorghe V.N., Werth G.* Charged particle traps. Springer, 2005. 354 p.
3. *Werth G., Gheorghe V.N., Major F.J.* Charged particle traps II. Springer, 2009. 275 p.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика, сер. Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2004. 220 с.
5. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
6. *Yavor M.I.* Optics of charged particle analyzers, Ser. Advances of imaging and electron physics, V. 157. Elsevier, 2009.
7. *Чирков А.Г.* Асимптотическая теория взаимодействия заряженных частиц и квантовых систем с внешними электромагнитными полями. СПб.: Санкт-Петербургский государственный технический университет, 2001.
8. Гапонов В.А., Миллер М.А. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном поле // Журнал экспериментальной и технической физики. 1958. Т. 34, № 2. С. 242–243.
9. *Миллер М.А.* Движение заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях // Известия вузов, сер. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 3. С. 110–123.
10. *Бурштейн Э.Л., Соловьев Л.С.* Гамильтониан усредненного движения // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139, № 4. С. 855–858.
11. *Литвак А.Г., Миллер, М.А., Шолохов Н.В.* Уточнение усредненного уравнения движения заряженных частиц в поле стоячей электромагнитной волны // Известия вузов, сер. Радиофизика. 1962. Т. 5, № 6. С. 1160–1174.
12. *Сивухин Д.В.* Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях // Вопросы теории плазмы, вып. 1. М.: Госатомиздат, 1963. С. 7–97.
13. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Движение заряженной частицы в электромагнитных полях // Вопросы теории плазмы, вып. 2. М.: Госатомиздат, 1963. С. 177–261.
14. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наукова Думка, 1971. 440 с.
15. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
16. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
17. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической динамике. М.: Физматлит, 2002. 386 с.
18. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ., 1957. 443 с.
19. *Гюнтер Н.М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М.-Л.: ОНТИ, 1934. 359 с.
20. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. 432 с.
21. Программа для символьных вычислений Mathematica. URL: (http://www.wolfram.com).

Институт аналитического приборостроения РАН, г. Санкт-Петербург

Контакты: *Бердников Александр Сергеевич*, asberd@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 20.04.2011.

TIME-DEPENDENT PSEUDOPOTENTIAL AND ITS APPLICATION FOR DESCRIPTION OF THE AVERAGED MOTION OF THE CHARGED PARTICLES. PART 2. GENERAL EXPRESSION FOR TIME-DEPENDENT PSEUDOPOTENTIALS

A. S. Berdnikov

Institute for Analytical Instrumentation of RAS, Saint Petersburg

The series of publications describes a new method to control the movement of the charged particles by high frequency electric fields. This new class of high frequency electric fields is characterized by pseudopotentials slowly evolving in time. The paper considers the deriving of the basic expression for slowly evolving pseudopotentials. It is shown that the classical pseudopotential is just the leading term of decomposition of the true pseudo-Hamiltonian in a double series: with respect to a small parameter which characterizes the amplitude of the electric field, and with respect to the frequency of the electric field. The classical pseudopotential expression is generalized to include the case of high frequency electric fields which are characterized by "fast" and a "slow" characteristic time scales simultaneously.

Keywords: mass spectrometric devices, radio frequency devices, pseudopotentials, Hamiltonian dynamics, Hamiltonian dynamic systems, averaging techniques for Hamiltonian dynamics, high frequency electric fields, radio frequency electric fields